

Ojačano pronicanje v kvadratnih mrežah

Dr. Jaka Hedžet

1 Uvod

Ojačano pronicanje je proces, pri katerem se informacija oziroma določena lastnost postopoma širi po mreži ali grafu. V obravnavanem problemu si predstavljamo šahovnico, katere posamezna polja so pobarvana črno ali belo. Določena polja na začetku pobarvamo črno, nato pa se barva po vnaprej določenem pravilu širi na preostala polja. Osnovno vprašanje je, koliko črnih polj moramo izbrati na začetku, da bo po končanem procesu celotna šahovnica pobarvana črno.

Naloga: Naj bo dana kvadratna šahovnica velikosti $n \times n$. Belo polje se pobarva črno, če ima vsaj dve črni sosedi. Označimo s $p(n)$ najmanjše število začetno črnih polj, ki zagotavljajo, da bo na koncu celotna šahovnica črna. Za določitev natančne vrednosti parametra $p(n)$ moramo dokazati dve neenakosti:

$$p(n) \leq k \quad \text{in} \quad p(n) \geq k.$$

Prva zahteva konstrukcijo, ki pokaže, da je k polj dovolj, druga pa dokaz, da z manj kot k polji procesa ni mogoče uspešno zaključiti.

2 Osnovni problem na kvadratni mreži

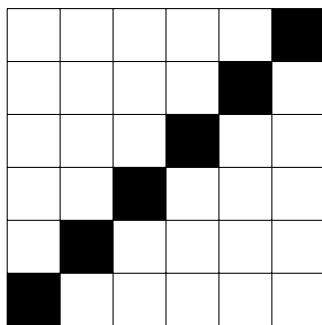
Za zgornjo mejo lahko uporabimo diagonalno konstrukcijo (slika 1). Za šahovnico velikosti $n \times n$ izberemo vsa polja na eni od diagonal. Tako dobimo n začetno črnih polj. Zaradi izbranega pravila se nato črnina postopoma širi po šahovnici. Enak princip lahko uporabimo za poljubno naravno število n , zato dobimo

$$p(n) \leq n.$$

Da bi pokazali, da je ta zgornja meja tudi optimalna, potrebujemo spodnjo mejo. Pri tem uporabimo geometrijski argument, ki temelji na obsegu črnega območja. Označimo obseg črnega območja z o . Ko se belo polje pobarva črno, ima že vsaj dve črni sosedi. Zaradi tega dodajanje novega polja ne poveča skupnega obsega črnega območja. Obseg se lahko ohrani ali zmanjša, nikoli pa se v procesu ne poveča. To pomeni, da mora začetni obseg biti vsaj tolikšen, kot je končni.

Na koncu procesa je črna celotna šahovnica. Njen obseg je

$$o = 4n.$$



Slika 1: Diagonalna konstrukcija.

Na začetku lahko vsako posamezno črno polje prispeva največ štiri enote k skupnemu obsegu. Če je začetno število črnih polj enako k , je zato začetni obseg največ $4k$. Ker se obseg med procesom ne more povečati, mora veljati

$$4k \geq 4n.$$

Od tod sledi

$$k \geq n,$$

oziroma

$$p(n) \geq n.$$

Skupaj z zgornjo mejo tako dobimo pomemben rezultat

$$\boxed{p(n) = n}.$$

To pomeni, da je za popolno pronicanje na kvadratni šahovnici velikosti $n \times n$ potrebnih natanko n začetno črnih polj.

3 Pravokotne mreže

Naravna nadgradnja osnovnega problema je, da namesto kvadratne mreže opazujemo pravokotno šahovnico velikosti $m \times n$. Označimo najmanjše potrebno število začetno črnih polj s $p(m, n)$ in predpostavimo, da je $m > n$.

Tudi v tem primeru lahko dobimo zgornjo mejo s konstrukcijo, ki temelji na diagonalah. Na začetku izberemo n polj na diagonalah. V preostalih $m - n$ stolpcih nato izberemo po eno črno polje iz vsakega drugega stolpca. Če je $m - n$ sodo število, se konstrukcija lepo zaključi. Če je $m - n$ liho, ostane en stolpec, v katerem moramo dodati še eno začetno črno polje. Tako dobimo

$$p(m, n) \leq n + \left\lceil \frac{m - n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m + n}{2} \right\rceil.$$

Za spodnjo mejo ponovno uporabimo argument z obsegom. Obseg celotne pravokotne šahovnice je

$$o = 2m + 2n.$$

Ker se obseg med procesom ne more povečati in lahko vsako začetno črno polje prispeva največ štiri enote k obsegu, mora biti začetno število črnih polj vsaj

$$\left\lceil \frac{2m + 2n}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{m + n}{2} \right\rceil.$$

Zato dobimo

$$p(m, n) \geq \left\lceil \frac{m + n}{2} \right\rceil.$$

Kombinacija zgornje in spodnje meje vodi do rezultata

$$p(m, n) = \left\lceil \frac{m + n}{2} \right\rceil.$$

4 Sprememba pravila pronicanja

Nadalje lahko spremenimo osnovno pravilo. Namesto da se belo polje pobarva že takrat, ko ima vsaj dve črni sosedi, zahtevamo, da ima tri ali celo štiri črne sosede. Takšna sprememba bistveno oteži proces pronicanja, saj mora biti za spremembo barve izpolnjen strožji pogoj.

Pri pravilu s štirimi sosedi lahko iz začetne konfiguracije izpeljemo različne omejitve. Pri strožjih pravilih je pomembno, da začetna konfiguracija ne vsebuje določenih struktur belih polj. Pri pravilu s tremi črnimi sosedi lahko na primer opazimo naslednje pogoje:

- noben stolpec ne sme biti v celoti bel,
- na robu ne smeta biti dve zaporedni beli polji,
- če polja skupaj tvorijo pravokotnik, ne smejo biti vsa bela.

Problem lahko ponovno obravnavamo tako na kvadratnih kot na pravokotnih šahovnicah. Nov parameter označimo s $P(m, n)$. V nasprotju z osnovnim primerom problem v splošnem še ni rešen. Znani so posamezni delni rezultati, med drugim za mreže velikosti $3 \times m$ in $5 \times m$.

5 Imuna vozlišča

Naslednja nadgradnja problema je uvedba imunih polj. Imuno polje je takšno polje, ki se ne glede na število črnih sosed nikoli ne pobarva črno. Takšna polja predstavljajo dodatno oviro za širjenje procesa.

Prisotnost imunih polj lahko povzroči, da moramo na začetku izbrati več črnih polj kot v osnovnem problemu. Po drugi strani pa lahko pri ustrezni izbiri imunih polj začetna konfiguracija ostane dovolj učinkovita in dodatnih začetno črnih polj sploh ne potrebujemo.

Zato parameter ni več odvisen samo od velikosti mreže, temveč tudi od izbire imunih vozlišč. Zanimata nas lahko dve nasprotni situaciji: kako izbrati imuna vozlišča tako, da se vrednost parametra čim bolj poveča, ali pa tako, da ostane čim bližje prvotni vrednosti.

Tudi tukaj lahko uporabimo argument z obsegom. Če se na primer zaradi imunega polja spremeni končni obseg črnega območja, moramo primerjati začetni in končni obseg.

Ustrezna izbira imunega polja lahko povzroči, da se obseg poveča. Ker notranje polje lahko poveča obseg za štiri enote, je v določenih konfiguracijah potrebno eno dodatno začetno črno polje. Če imamo k imunih vozlišč, pri čemer k ni prevelik, lahko tako dobimo spodnjo mejo oblike

$$p(n) \geq n + k.$$

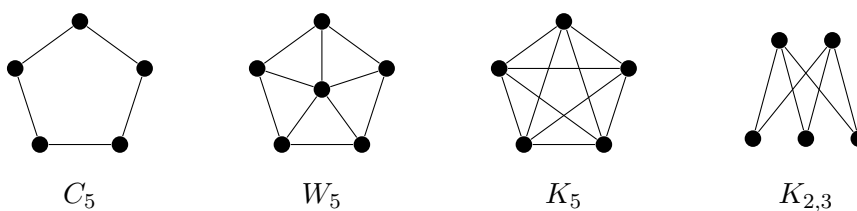
6 Povezava s teorijo grafov

Problem šahovnice lahko naravno prevedemo v jezik teorije grafov. Polja šahovnice predstavljajo vozlišča grafa, sosednja polja pa povežemo z ustreznimi povezavami. Proces barvanja tako postane proces na grafu.

V teoriji grafov se obravnavani proces imenuje r -sosedno ojačano pronicanje. Pri tem barvamo vozlišča grafa G s črno barvo, belo vozlišče pa se pobarva, če ima vsaj r črnih sosedov. Najmanjše število začetno črnih vozlišč, ki zagotavljajo, da bo na koncu celoten graf črn, označimo z

$$m(G, r).$$

Takšna formulacija omogoča, da problem posplošimo daleč preko kvadratnih mrež. Namesto šahovnic lahko obravnavamo različne družine grafov in poskušamo določiti njihove vrednosti $m(G, r)$. Naravni primeri so cikli, kolesa, polni grafi in polni dvodelni grafi.



Slika 2: Primeri grafov. Po vrsti si sledijo cikel, kolo, polni graf, polni dvodelni graf.

7 Zaključek

Ojačano pronicanje v kvadratnih mrežah je preprost problem za formulacijo, vendar omogoča številne zanimive matematične nadgradnje. Osnovni primer na šahovnici pokaže pomembno povezavo med konstrukcijskimi argumenti in invariantami. Z diagonalno konstrukcijo dobimo zgornjo mejo, medtem ko argument z obsegom zagotovi ustrezno spodnjo mejo. Na ta način dobimo natančen rezultat $p(n) = n$.

Nadaljnje spremembe problema, kot so pravokotne mreže, strožja pravila pronicanja in imuna vozlišča, odpirajo zahtevnejša vprašanja. Posebej zanimiv je prehod iz mrež v splošne grafe, kjer proces opišemo s parametrom $m(G, r)$. Tako se problem poveže s širšim področjem teorije grafov in postane mogoče raziskovati njegovo obnašanje na različnih družinah grafov.