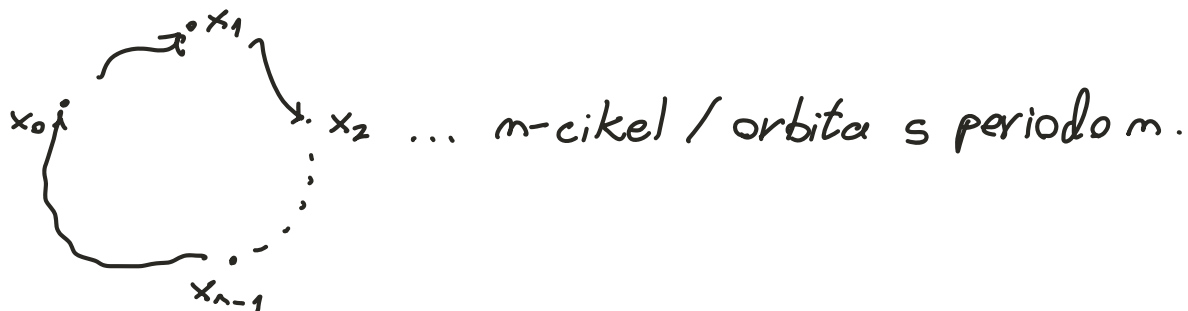


PONOVITEV

- $f_c(x) = x^2 + c$

$$x_0 \in \mathbb{C} \leadsto x_1 = f(x_0), \dots, x_m = f^m(x_0)$$



- Fiksne tč.: $x \in \mathbb{C} : f(x) = x$

$$n\text{-cikel} : x \in \mathbb{C} : \underbrace{f(\dots f(x))}_n = x$$

Privlačna fiksna tč.: $x_0 \in \mathbb{C}$, da $|f'(x_0)| < 1$

$$\exists \varepsilon > 0 : |x_0| < \frac{1}{2}$$

Odbojna fiksna tč.: $x_0 \in \mathbb{C}$, da $|f'(x_0)| > 1$

$$\exists \varepsilon > 0 : |x_0| > \frac{1}{2}$$

- Pri dinamiki $f_c(x)$ je $x_0 \in \mathbb{C} :$

1) $(x_n)_n \dots$ ostala omejena

2) $(x_n)_n \dots$ eksplodirala.

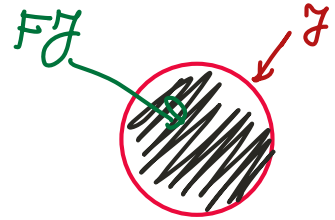
$$FJ(f_c) = \{x \in \mathbb{C} \mid (x_n)_n \dots \text{omejena}\}$$

- Izrek: "kritične točke se privlačijo k privlačnemu ciklu"

Za $f_c(x) = x^2 + c$ je kritična točka 0

Posledica: Pri fiksnem c imamo natanko eno privlačno orbito / cikel.

2.4. Opis Juliajeve množice



- Juliajeva množica:

$$J(f) = \bigcap_{n \geq 0} FJ(f^n)$$

- Dinamika na $J(f)$ je kaotična.
- Izrek: Fiksirajmo $c \in \mathbb{C}$. Potem velja ena izmed možnosti:
 - 1) Orbita kritične točke je omejena. V tem primeru sta $FJ(f_c)$ in $J(f_c)$ povezani

Anti primer:



2) orbita kritične tč. je neomejena. V tem primeru je $\mathcal{I}(f_c)$ popolnoma nepovezana - je homeomorfna kantorjevi množici

Kantorjeva množica:



∞. Kantorjeva množica

2.5. Mandelbrot množica

• Def.: Mandelbrot množica je def. kot

$$\mathcal{M} := \{ c \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}(f_c) \text{ povezana} \}$$

$$\stackrel{\text{IZREK}}{=} \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{orbita kritične tč. je omejena} \}$$

• Algoritem za risanje $\mathcal{M}$

1. Izberi pravokotnik centriran okoli izhodišča

2. Razdeli pravokotnik na stolpce in vrstice.

Presečišča teh imenujemo piksli. V središču vsakega piksla imamo parameter c .

3. Iteriraj kritično tč.: $f_c(0), f_c^2(0), \dots, f_c^{1000}(0)$.

a) Iteracija pobegne iz krogle z radijem 2.

Pobarvaj piksel z ustreznim odtenkom (npr.)

vijolične. Če je orbita kritične tč. kasneje

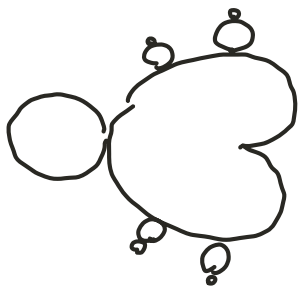
pobegnila, potem pobarvamo z ustreznim temnejšim odtenkom.

b) Če orbita ne pobegne, pobarvaj piksel s črno

Lastnosti

1. Iz algoritma sklepamo, da $M \subseteq B(0, 2)$

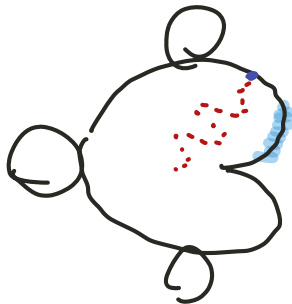
2. M je povezana množica.



3. M je Fraktal = če dovolj približamo v M spet vidimo M .

4. Kaka izmed "komponent" ustreza nekemu m -ciklu,

5. $\mathcal{M}$ je zaprta množica :



Komponente $\mathcal{M}$

- Glavna komponenta je v obliki srca

Iščemo parametre $c \in \mathbb{C}$, da ima f_c privlačno fiksno točko.

1. f_c ima fiksno točko: $f_c(x) = x$

2. f_c ima privlačno fiksno točko: $|f'_c(x)| < 1$

$$x^2 + c = x \leadsto x^2 - x + c = 0$$

$$f'_c(x) = \pi \cdot e^{i2\pi \cdot x} \quad r < 1$$

$$\Downarrow \\ 2x \leadsto x = \frac{\pi}{2} e^{i \cdot 2\pi x}$$

To vstavimo v 1. enačbo in izrazimo c :

$$c = \frac{r}{2} e^{i2\pi t} - \frac{r^2}{4} e^{i4\pi t}$$

• Druga najprejšnja komponenta

Iščemo parametre c , da ima f_c privlačen 2-cikel

1. f_c ima 2-cikel: $f_c^2(x) = x$

2. f_c ima privlačen 2-cikel: $|f_c^{2'}(x)| < 1$

$$(x^2 + c)^2 + c = x$$

$$\underline{x^4 + 2x^2c + c^2 + c = x}$$

$$f_c^{2'}(x) = r e^{i2\pi t} \quad r < 1$$

$$f_c'(x) f_c'(f_c(x)) = r e^{i2\pi t}$$

$$\underline{2x \cdot 2 \cdot (x^2 + c) = r e^{i2\pi t}}$$

Želimo izraziti c s parametrom r in t .

$$c(t, r) = -1 + \frac{1}{4} \cdot r \cdot e^{2\pi i t}$$

