

2. KOMPLEKSNA DINAMIKA

2.1. Ponovitev kompleksnih števil

- Motivacija: Želimo rešiti enačbo

$$x^2 = -1$$

Nad $\mathbb{R}$ to ne moremo, saj $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

- Razširili bomo $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$:

$$i := \sqrt{-1}$$

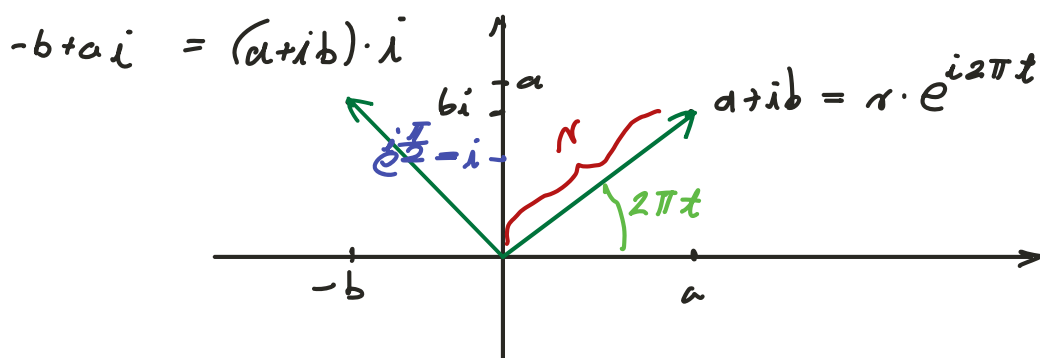
$$\mathbb{C} = \{ a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\sqrt{2} + 3i, \quad 3 - \pi \cdot i$$

- Šeštevanje:

$$(a + ib) + (a' + ib') := (a + a') + i(b + b')$$

- Geometrijska interpretacija



• Množenje :

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = a a' + ab'i + ba'i + bb'i^2$$

↖ -1

$$:= (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

• Polarni zapis : Vsako $x \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo kot

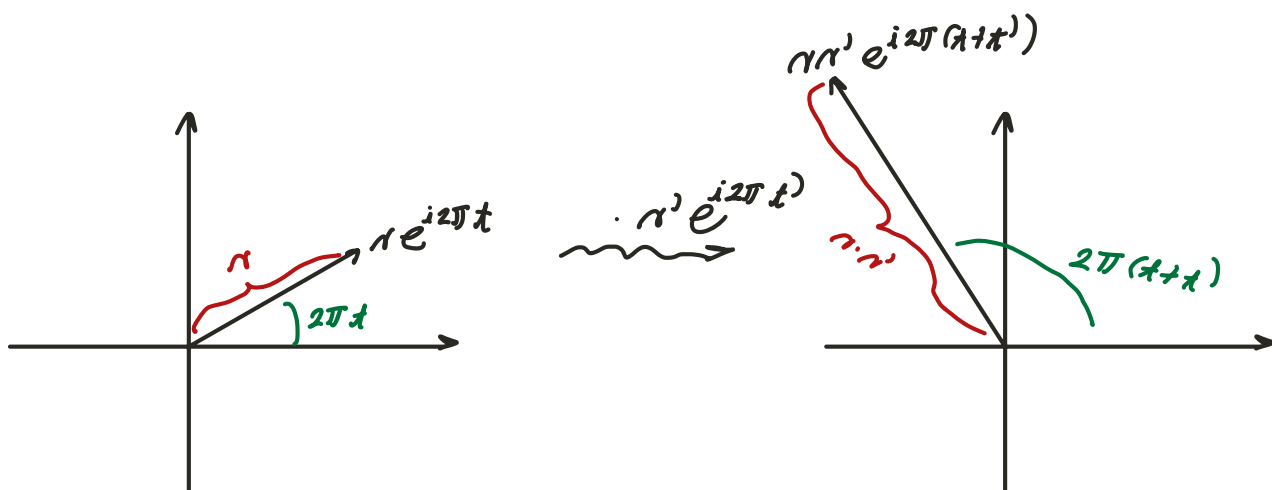
$$x = r \cdot e^{i2\pi t},$$

kjer sta $r \in [0, \infty)$ in $t \in [0, 1)$ enolično določena

(skoraj. pri $r=0$ lahko vzamemo kateri koli t)

Množenje je potem enostavnejše:

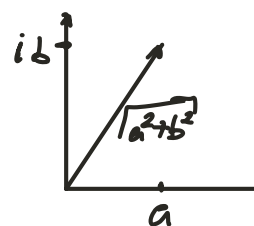
$$r e^{i2\pi t} \cdot r' e^{i2\pi t'} = (r \cdot r') \cdot e^{i2\pi(t+t')}$$



• Absolutna vrednost :

• 1.1 na $\mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



• 1.1 na $\mathbb{C}$:

$$|x| := \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

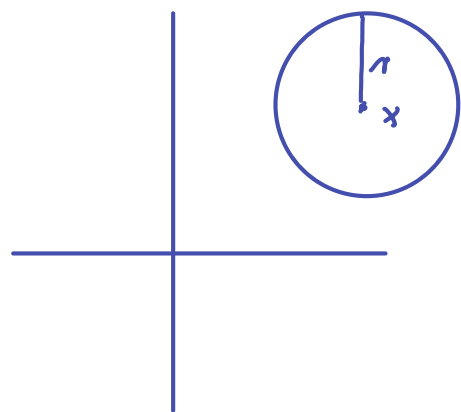
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

- Izrek od večerj: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ d.s. s (super) privlačnim ciklom / orbito. Potem orbita privlači vsaj eno kritično točko.

- Posledica: Dinamični sistem $f_{\mathbb{C}}$ ima največ eno (končno) (super) privlačno orbito.

Dokaz: $x \in \mathbb{C}$, $r \in [0, \infty]$

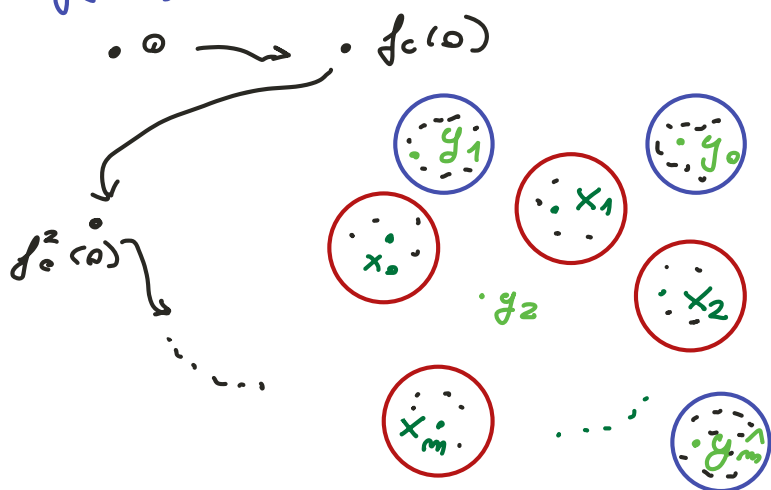
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{C} \mid |x - y| < r\}$$



Uporabili bomo dokaz s protislovjem:

Recimo, da sta $(x_n)_n$ in $(y_n)_n$ (super) privlačni orbiti. Po izreku:

$\forall$ "okolico" orbite $(x_n)_n$ (oz $(y_n)_n$) obstaja dovolj velika $N \in \mathbb{N}$, da so vsi elementi zaporedja $(f_{\mathbb{C}}^k(o))_k$ z indeksom $k \geq N$ vsebovani v tej okolici.



• Primeri:

1) x^2 : fiksne tč: $x^2 = x \leadsto 0 = x^2 - x = x(x-1)$

$\leadsto x=0$ in $x=1$ sta fiksni točki.

$$(x^2)' = 2x$$

• $x=1$: $|2 \cdot 1| > 1 \leadsto$ odbojna fiksna točka

• $x=0$: $|2 \cdot 0| = 0 \leadsto$ super privlačna fiksna tč.

2) $x^2 + 1$: fiksne tč. $x^2 + 1 = x \leadsto x^2 - x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

• $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$: $|2 \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 > 1$

odbojna fiksna tč.

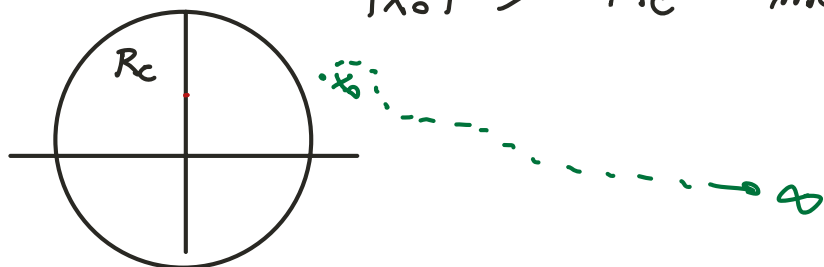
• $x = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$: $|2 \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2}| = 2 > 1$

odbojna fiksna tč.

2.2. Napolnjena Juliajeva množica

• Trd.: Naj bo $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f_c(x) = x^2 + c$. Potem orbita tč. $x_0 \in \mathbb{C}$ divergira, če

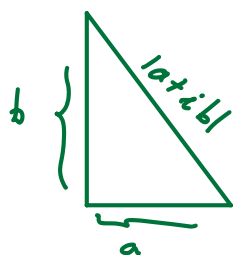
$$|x_0| > R_c := \max(2, |c|)$$



Dokaz:

Pokažali bomo, da $|x_n| > \lambda^n |x_0|$ $\lambda > 1$ $\lambda > 1$
 $|x_0| > |c|$

$$|x_1| = |x_0^2 + c| \stackrel{\Delta}{\geq} |x_0|^2 - |c| > |x_0|^2 - |x_0| = |x_0| \cdot \underbrace{(|x_0| - 1)}_{ii}$$



Δ -neenakost: $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$

$\Delta N \quad |x+y| \geq |x| - |y|$

Uporabimo indukcijo: predpostavi, da velja $|x_{n-1}| > \lambda^{n-1} |x_0|$
($> |x_0|$)

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_{n-1}^2 + c| \stackrel{\Delta}{\geq} |x_{n-1}|^2 - |c| > |x_{n-1}|^2 - |x_{n-1}| \\ &= |x_{n-1}| (|x_{n-1}| - 1) > \lambda^{n-1} \cdot |x_0| \cdot \lambda = \lambda^n \cdot |x_0| \\ &> \lambda^{n-1} |x_0| \geq |x_0| - 1 =: \lambda \end{aligned}$$



• Pozor: če $|x_0| \leq R_c$ še ne pomeni, da $(x_n)_n$ ne bo eksplodirala!

• Def.: Naj bo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ d.s. množici

$$FJ(f) := \{ x \in \mathbb{C} \mid \text{orbita } (f^n(x))_n \text{ je omejena} \}$$

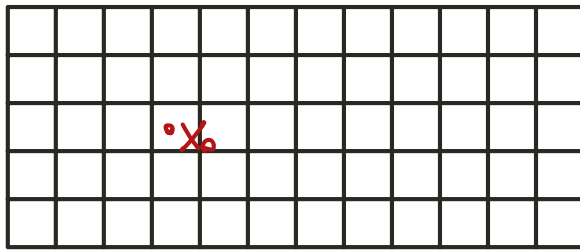
pravimo **hapolnjena Juliajeva množica**.

• Algoritem za risanje $FJ(f)$. Izberi $R > 0$.

1. Izberi pravokotnik centriran okoli izhodišča

2. Razdeli pravokotnik na (velik št.) vrstic

in stolpcev.



Presečišču vrstice in stolpca bomo rekli piksel, Vsak piksel pripada natanko eni vrednosti: $x_0 \in \mathbb{C}$

3. Vsako vrednost x_0 iteriramo (za 1000 korakov).

Potem se zgodi eno izmed:

a) Orbita $x_0, x_1, \dots, x_{1000}$ preseže izbran R (npr. za $f = f_c$ izberemo $R = R_c$). Orbito smatramo kot divergentno. Piksel pobarvamo s primernim odtenkom (npr. oranžne). Če orbita kasneje preseže radij R , pobarvamo piksel svetleje.

b) Orbita $x_0, \dots, x_{1000}$ ne preseže R .

Orbito smatramo kot konvergentno. Piksel pobarvaj z najsvetlejšim odtenkom.

2.2.1. (Napohjena) Juliajeva mn. za $f_0(x) = x^2$

• Kako zgleda $FJ(x^2)$?

• $x \in \mathbb{C}$:

a) $|x| > 1$:

$$|f_0(x)| = |x|^2 > |x|$$

$\vdots$

$$f_0^n(x) = x^{2^n} \rightsquigarrow |f_0^n(x)| = |x|^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Tj. $x \notin FJ(x^2)$

b) $|x| < 1$:

$$|f_0^n(x)| = |x|^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Tj. $x \in FJ(x^2)$

c) $|x| = 1$

$$|f_0^n(x)| = |x|^{2^n} = 1^{2^n} = 1$$

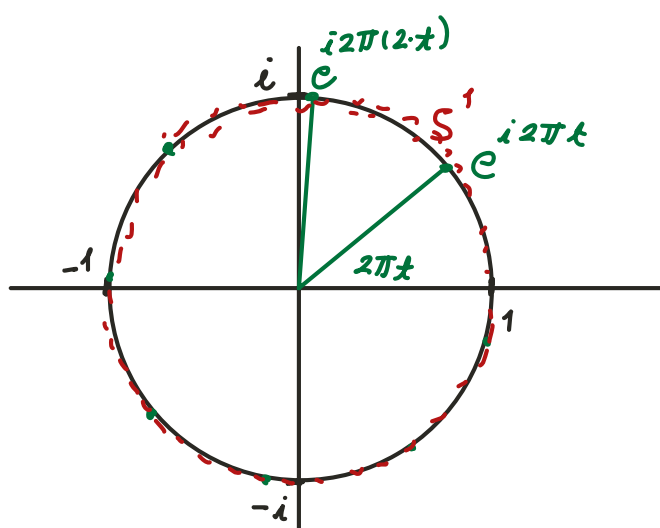
Tj. orbita $(f_0^n(x))_n$ je k $\bar{e}$ zi na kro $\bar{z}$ ni ci z radijem

1. V posebnem $x \in FJ(x^2)$

$$FJ(x^2) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1\} = \overline{B}(0, 1)$$

Dinamika x^2 na $\partial B(0, 1) = S^1$ (enotska kro $\bar{z}$ nica)

• Dinamika je zelo nepredvidljiva



1. $t \in \mathbb{Q}$: $t = \frac{m}{n}$ (m in n tuji celi šl.)

a) $m = 2^k$:

$$\begin{aligned} f_0^k(e^{i2\pi \frac{m}{2^k}}) &= (e^{i2\pi \frac{m}{2^k}})^{2^k} \\ &= e^{i2\pi m} \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) $m = \underline{2^k} \cdot m'$, m' lih

$$f_0^k(e^{i2\pi \frac{m}{2^k m'}}) = e^{i2\pi \frac{m}{m'}}$$

2. $t \notin \mathbb{Q}$: v tem primeru bo orbita gosta podmnožica v S^1 (tako kot so $\mathbb{Q}$ gosta v $\mathbb{R}$)

1) S^1 vsebuje vse odbojne cikle.

m -cikel $(x_n)_n$ zadošča enačbi $f_0^m(x_0) = x_0$

tj. $x_0^{2^m} = x_0$ (če je $\underline{x_0 \neq 0}$)

tj. $x_0^{2^m - 1} = 1 \leadsto 1 = |x_0|^{2^m - 1} \Rightarrow |x_0| = 1$

Z uporabo odvoda lahko preverimo, da so ti cikli vsi odbojni:

$$\begin{aligned} (f_0^m)'(x_0) &= f_0'(x_0) \cdot f_0'(x_1) \cdot \dots \cdot f_0'(x_{m-1}) \\ &= 2 \cdot x_0 \cdot 2 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot x_{m-1} \\ &= 2^m \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{m-1} \end{aligned}$$

$$|(f_0^m)'(x_0)| = 2^m \underbrace{|x_0| \cdot |x_1|^2 \cdot \dots \cdot |x_{m-1}|^2}_{1} = 2^m > 1$$

$\leadsto (x_n)_n$ je odbojen cikel

2) ciklov je "zelo veliko" :

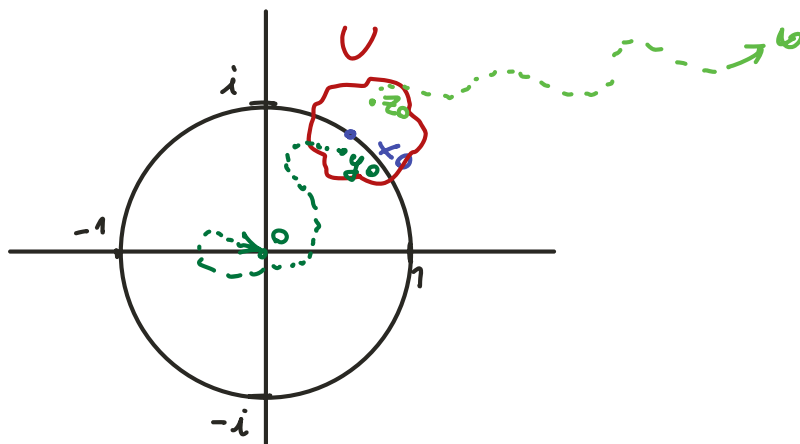
$$\text{Mnozica } C := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_0 \in \mathbb{C} \mid (x_n)_n \text{ je } n\text{-cike}\}$$

gosta v S^1 . To pomeni, da lahko vsako
 št. $y \in S^1$ poljubno dobro aproksimiramo s
 točko s končno periodo.

3) Naj bo $x \in S^1$ in $U \ni x_0$ poljubna okolica
 (npr. $B(x, r)$). Potem obstajata $y_0, z_0 \in U$, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$



• Lastnostim 1-3 ponovadi rečemo KAOŠ.