

1.1. Osnovni pojmi in definicije

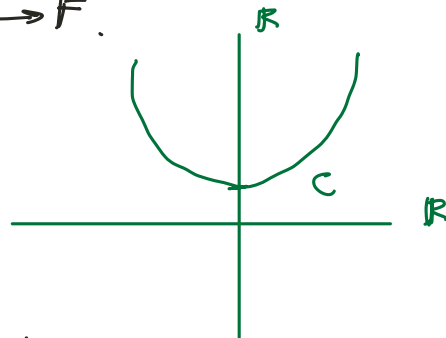
• Notacija: $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

• Def.:

1. Dinamični sistem je funkcija $f: F \rightarrow F$.

Primer: Glavni (edini) primer $C \in F$

$$f_C(x) := x^2 + C$$

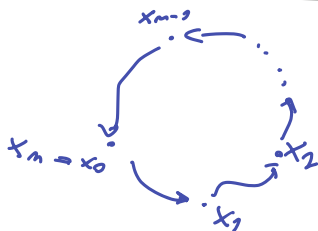


2. Orbita t.e. $x \in F$ (dinamičnega sistema f) je zaporedje:

$$x_0 := x, \quad x_1 := f(x_0), \dots, \quad x_n := f(x_{n-1}), \dots$$

"oblasti"

3. t.e. $x \in F$ je periodična, če $\exists n \in \mathbb{N}$, da $x_n = x_0$



Pravimo, da ima x periodo $\hat{n} \in \mathbb{N}$, če $\hat{n}$ najmanjši tak n št.

(t.j. da $x_{\hat{n}} = x_0$)

(če $x_{\hat{n}} = x_0 \rightarrow x_{2\hat{n}} = x_0$)

• Primer: $F = \mathbb{R}$, $f_{-1}(x) = x^2 - 1$

• $x_0 = 0 \rightsquigarrow x_1 = -1 \rightsquigarrow x_2 = 0 \rightsquigarrow 0$ je periodična t.e. s periodo 2

• $x_0 = -1 \rightsquigarrow x_1 = 0 \rightsquigarrow x_2 = -1 \rightsquigarrow -1 \dots$

• Def.: "n-ti iterat" je funkcija

$$f^n: F \longrightarrow F, \quad f^n(x) := \overbrace{f(\dots f(x))}^{n \text{ x}} \dots$$

- Def.: Periodična tč. s periodom 1 fiksnu točku, tj.

$$f(x) = x$$

- Opomba: Naj bo $x \in F$ periodična tč. s periodom m , potem

$$f^m(x) = x.$$

Tj. x je fiksna tč. funkcije f^m .

- Pozor: Naj bo $x \in F$ fiksna tč. d.s. f , potem velja

$$f^m(x) = f(\dots f(x)) = x$$

Sledi, da je x tudi fiksna tč. f^m , ampak x nima perioda m (če $m > 1$)

- Algoritem za iskanje periodičnih tč. s periodom m :

- Naj bo $k \in \mathbb{N}$, ki $k|m$ (npr. $k=2, m=4 \Rightarrow 2|4$) (tudi $k=m$).

Poišči vse fiksne tč. funkcije f^k .

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{periodična tč.} \\ \text{s periodom } m \end{array} \right\} = \{x \in F \mid f^m(x) = x\} \setminus \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k|m \\ k \neq m}} \{x \in F \mid f^k(x) = x\}$$

- Primer: $f_{-1}(x) = x^2 - 1$

- Fiksna tč.: $x = f_{-1}(x) = x^2 - 1 \leadsto$ rešiti moramo en. $x^2 - x - 1$

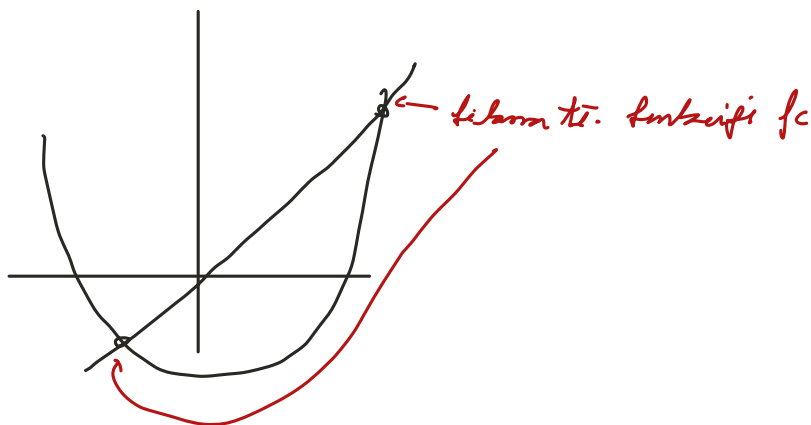
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Fiksna tč. f_{-1}^2 : $x = f_{-1}^2(x) = f_{-1}(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1$

Tj. moramo rešiti en. $x^4 - 2x^2 - x = 0$

$$x_3 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \leadsto \text{DN: } x_4 = ?$$

Pajčevinasti diagrami

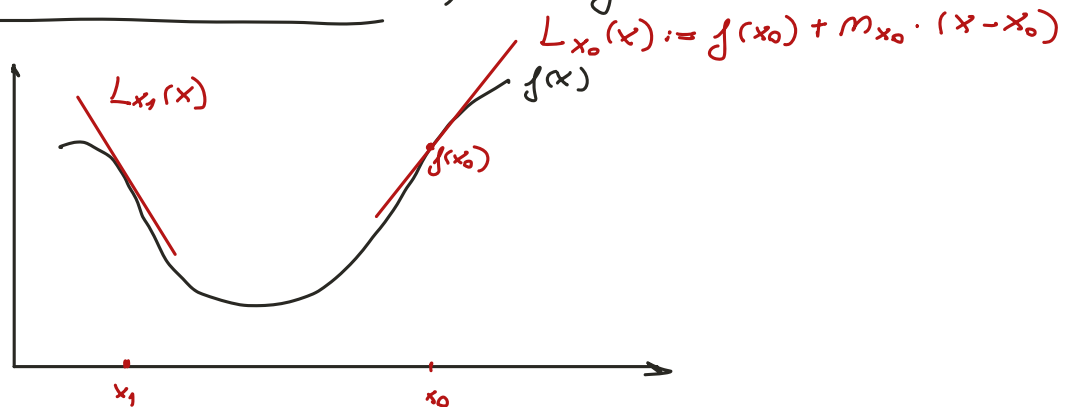


1.2. Klasifikacija fiksnih tč.

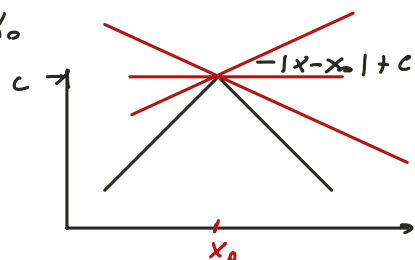
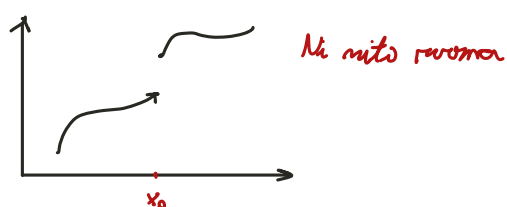
1.2.1. Crash course v odvajanje

- Geometrijska def.: Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka funkcija, da za $x_0 \in \mathbb{R}$ obstaja "najbolje približna premica". Potem pravimo, da je f odvedljiva v tč. x_0

Primer: $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, e^x , $\lg x$, $\sin x$



Anti-primari: Funkcija, ki niso odvedljive v x_0



- Naj bo $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ odvodljiva funkcija ($\forall x \in \mathbb{F}$ odvodljiva v x).
Potem je $f'(x_0) := M_{x_0}$

odvod funkcije f v toč. x_0 .

Če vidimo, da nam definiramo novo funkcijo

$$f': \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \quad x \mapsto f'(x)$$

• Primeri:

- odvod konstantne funkcije: $f(x) := c \leadsto f'(x) = 0$
- odvod funkcije $f(x) = x^m$: $\leadsto f'(x) = m x^{m-1} \quad (m \in \mathbb{N})$
- odvod vsote: $(f+g)' = f' + g'$
- odvod $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$$\leadsto (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)' = a_n \cdot n x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2 x + a_1$$

$$[(x^2 + c)'] = 2x$$

1.2.2. Klasifikacije fiksnih točk in upravljalni odvod

- Def.: Naj bo $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ d.s. + odvodljiva funkcija. Naj bo $x_0 \in \mathbb{F}$ fiksna točka d.s. f . Potem pravimo, da je x_0 :

- 1) Privlačna fiksna točka: $0 < |f'(x_0)| < 1$
- 2) Odbojna fiksna točka: $|f'(x_0)| > 1$
- 3) Neprivlačna fiksna točka: $|f'(x_0)| = 1$
- 4) Superprivlačna: $f'(x_0) = 0$

Lastnosti odroda

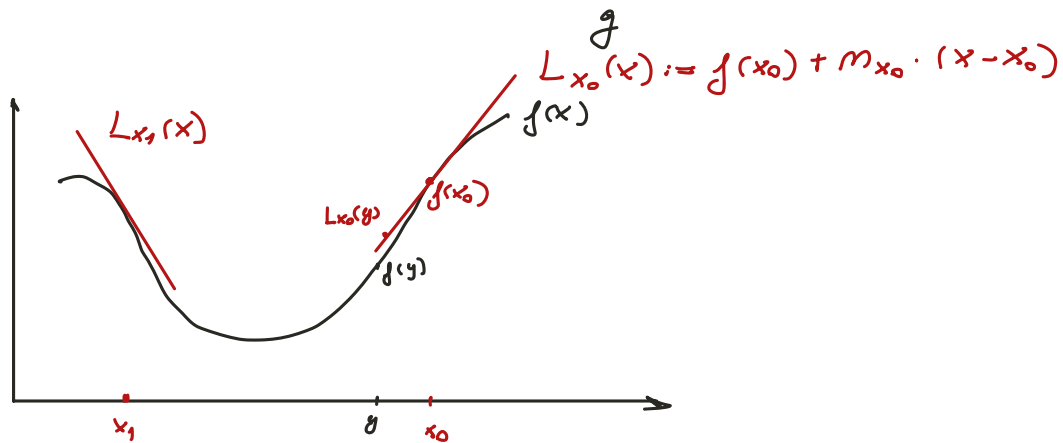
- Naj bo L_{x_0} premica tangenta na graf f v x_0 . To nam dovolj aproksimirati funkcijo f v tč. x_0 :

Naj $x \in F$, ki $|x - x_0| <$ dovolj majhna, potem

$$|f(x) - L_{x_0}(x)| \sim a \cdot |x - x_0|^2 \quad a \in F$$

Drugeče povedano:

$$f(x) \sim L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



- Naj bo $x_0 \in F$ fiksna tč. d. s. f :

$$\begin{aligned} |f(x) - x_0| &= |f(x) - f(x_0)| \\ &\sim |L_{x_0}(x) - L_{x_0}(x_0)| \\ &= |f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0))| \\ &= |f'(x_0)| \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$

- Naj bo $|f'(x_0)| < 1$:

$x \cdot f(x)$ pridemo bližje x_0

$$|f(x) - x_0| < |x - x_0| \dots \text{razdalja se zmanjša}$$

- Naj bo $|f'(x_0)| > 1$:

$$|f(x) - x_0| > |x - x_0| \dots \text{razdalja se poveča}$$

- Naj bo $|f'(x_0)| = 1$: Te ocm moramo narediti. Ne vemo ali se približa ali oddalji.

1.3. Klasifikacija orbit

- Def.: $f: F \rightarrow F$ d.s. + odredjena. Naj bo $x_0 \in F$ privlačna tč. s periodo n . Potem pravimo, da je orbita tč. x_0 :

1. Privlačna, če x_0 privlačna glede na f^n
2. Odbojna, če x_0 odbojna $\iff f^n$
3. Neutralna, če x_0 neutralna $\iff f^n$
4. Supprivlačna, če $x_0 \dots$

- Ind.: Če je f odredjena, potemgi tudi f^n odredjena in velja

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{n-1})$$

Dokaz: DN (hint: pravilo za odvajanje kompozituma)

- Def.: Naj bo $x \in F$ tč. s periodo n . Potem orbita tč. x pravimo m -cikl.

1.4. Bifurkacijski diagram in orbita kritičnih tč.

- Def.: Naj bo $f: F \rightarrow F$ odredjena funkcija. Pravimo, da $x \in F$ kritična tč. funk. f , če

$$f'(x_0) = 0$$

- Primer: $(x^2 + c)' = 2x \rightsquigarrow x_0 = 0$ je edina kritična točka

- **Definīcija:** Naj būs $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ d.s., ki ima privlačno ali supprivlačno orbitu. Patem "orbita privlači" vajeno kritisko tē. d.s. f' .

Rezultāta izskats: Naj būs $A := (X_n)_n$ (super)privlačīga orbita (izvadi vienotības priekšstatu, kas ir konverģents periodu n). Patem eksistē kritiska tē. $z \in \mathbb{C}$, kas velj

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^k(z), A) = 0$$

nozīmē, ka $f^k(z)$ konverģē uz A ,
 $d(f^k(z), A) := \min \{ |f^k(z) - x| \mid x \in A \}$