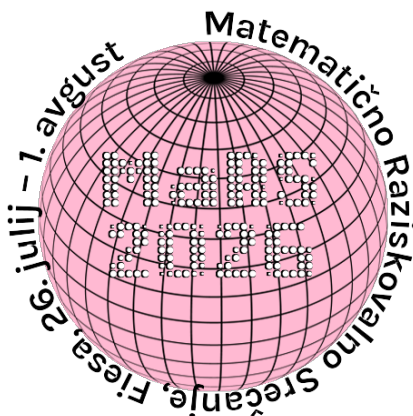


Tropski polkolobar in problem najkrajše poti

Val Čokl, Teja Zabukovec

Mentor: Juš Kocutar



Povzetek

Definirani so tropski polkolobar in tropski polinomi. Kot primer uporabe tropskih operacij je dokazano, da je mogoče izračunati dolžino najkrajše poti med dvema vozliščema v usmerjenem grafu z nenegativnimi utežmi kot element dovolj visoke tropske potence matrike sosednosti tega grafa.

Uvod

Na množici realnih števil definiramo nenavadni operaciji, poimenovani tropsko seštevanje in tropsko množenje, označeni z $\oplus$ in $\odot$. Ugotovimo, da imata podobne lastnosti kot običajno seštevanje in množenje, če množici $\mathbb{R}$ dodamo še element ∞ , zato si tudi zaslužita takšni imeni. Kot primer uporabe teh definicij obravnavamo problem iz teorije grafov, ki je druga veja matematike. Ugotovimo namreč, da se tropski operaciji naravno pojavita pri problemu iskanja dolžine najkrajše poti med vozlišči v uteženem usmerjenem grafu.

1 Tropsko seštevanje in tropsko množenje

Definirajmo novo množico, ki bo ob vseh realnih številih vsebovala še en element, ki ga označimo s simbolom ∞ , in jo bomo uporabljali v nadaljevanju. Element ∞ ima lastnost, da je večji od vseh realnih števil.

Definicija 1. Definirajmo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in naj velja $x < \infty$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Za $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ naj $\min(x, y)$ označuje manjše izmed njiju. Velja torej $\min(x, y) = y$, če je $x \geq y$, drugače je $\min(x, y) = x$.

Definicija 2. Tropsko seštevanje je operacija na množici $\overline{\mathbb{R}}$, definirana s predpisom $x \oplus y = \min(x, y)$.

Lema 1. Za operacijo tropskega seštevanja veljata asociativnost in komutativnost, obstaja tudi nevtralni element.

Dokaz. Preverimo, da velja asociativnost

$$(x \oplus y) \oplus z = \min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z) = \min(x, \min(y, z)) = x \oplus (y \oplus z).$$

Drži tudi komutativnost $x \oplus y = \min(x, y) = \min(y, x) = y \oplus x$. Za nevtralni element $y \in \overline{\mathbb{R}}$ mora veljati, da za vsak $x \in \overline{\mathbb{R}}$ drži, da $x \oplus y = \min(x, y) = x$. Zlahka preverimo, da ∞ zadošča tej lastnosti in je zato nevtralni element za operacijo $\oplus$. $\square$

Omenimo še, da je ∞ edini element v $\overline{\mathbb{R}}$, ki ima inverz za operacijo $\oplus$, namreč ∞ . Za poljuben $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}$ in $y \in \overline{\mathbb{R}}$ velja $x \oplus y \leq x$. Njuna vsota zato ne more biti enaka nevtralnemu elementu ∞ .

Definicija 3. Definirajmo operacijo na množici $\overline{\mathbb{R}}$, imenovano tropsko množenje, s predpisom $x \odot y = x + y$, če sta $x, y \in \mathbb{R}$. Definiramo tudi $x \odot \infty = \infty \odot x = \infty$ za vsak $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Tropsko množenje je na množici realnih števil definirano enako kot običajno seštevanje, zato si na $\mathbb{R}$ deli tudi njegove lastnosti.

Lema 2. Tropsko množenje je asociativno in komutativno, obstaja nevtralen element. Vsak element $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}$ ima inverz.

Dokaz. Tropsko množenje je komutativno, saj velja $x \odot y = x + y = y + x = y \odot x$, tudi kadar je kateri izmed členov enak ∞ . Preveriti moramo, ali za vse $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ velja asociativnost

$$(x \odot y) \odot z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \odot (y \odot z).$$

To očitno velja, kadar so $x, y, z \in \mathbb{R}$. Kadar je vsaj eden izmed x, y ali z enak ∞ , bo njegova vsota s poljubnim realnim številom enaka ∞ , zato bosta obe strani zgornjega izraza enaki ∞ , torej enaki. Nevtralni element je enak kot pri navadnem seštevanju, torej 0, za vsak $x \in \overline{\mathbb{R}}$ velja namreč $x \odot 0 = x$. Inverz imajo vsa števila razen ∞ , torej razen nevtralnega elementa za seštevanje $\oplus$. $\square$

Izrek 1. Za operaciji tropskega seštevanja in množenja velja distributivnost.

Dokaz. Naj bodo $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$. Sledi

$$x \odot (y \oplus z) = x + \min(y, z) = \min(x + y, x + z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Tako preverimo veljavnost leve distributivnosti. Desna sledi iz komutativnosti tropskega množenja. $\square$

Množici $\overline{\mathbb{R}}$ skupaj z operacijama $\oplus$ in $\odot$ pravimo tropski polkolobar. Z uporabo tropskih operacij namesto običajnih različic lahko še vedno računamo kot običajno zaradi vseh zgornjih pravil. Edina bistvena razlika je, da v splošnem ni inverzov za tropsko seštevanje.

Definicija 4. Za $x \in \overline{\mathbb{R}}$ in $n \in \mathbb{N}_0$ označimo tropsko n -to potenco na sledeči način

$$x^{\odot n} := \overbrace{x \odot x \odot \cdots \odot x}^{n\text{-krat}} = \overbrace{x + x + \cdots + x}^{n\text{-krat}} = nx.$$

Če je $n = 0$, naj bo $x^{\odot 0} := 0$.

Poljubno tropsko potenco dvočlenika lahko izračunamo na enostaven način.

Izrek 2. Za $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja $(x \oplus y)^{\odot n} = x^{\odot n} \oplus y^{\odot n}$.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da velja $x, y \in \mathbb{R}$. Prevedimo izraz z običajnimi operacijami,

$$(x \oplus y)^{\odot n} = n \cdot \min(x, y) = \min(nx, ny) = x^{\odot n} \oplus y^{\odot n}.$$

Izraz tudi velja, kadar je kateri izmed x in y enak ∞ . $\square$

1.1 Tropski kvadratni polinomi

Tropski polinom je funkcija iz $\overline{\mathbb{R}}$ v $\overline{\mathbb{R}}$ definirana enako kot običajni polinom, samo da klasični operaciji seštevanja in množenja zamenjamo s tropskima različicama.

Definicija 5. *Tropski polinom je funkcija $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ s predpisom $f(x) = \bigoplus_{i=0}^n (a_i \odot x^{\odot i})$ za $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$ in $a_n \neq \infty$.*

Osredotočimo se na tropske kvadratne polinome. Z običajnimi operacijami lahko poljubni tropski kvadratni polinom zapišemo kot

$$(a \odot x^{\odot 2}) \oplus (b \odot x) \oplus c = \min(a + 2x, b + x, c),$$

kjer $a \neq \infty$. Gre torej za funkcijo, ki najde minimum treh linearnih funkcij. Linearne funkcije v izrazu imajo različne smerne koeficiente, zato se zagotovo sekajo.

Definicija 6. *Ničla tropskega polinoma $f(x) = \bigoplus_{i=0}^n (a_i \odot x^{\odot i})$ je točka $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, za katero obstajata $0 \leq j < k \leq n$ tako, da $f(x_0) = a_j \odot x_0^{\odot j} = a_k \odot x_0^{\odot k}$.*

Ničla tropskega polinoma je torej točka, v kateri je minimum dosežen vsaj dvakrat. Je tudi točka, v kateri se graf odsekoma linearne funkcije "prelomi".

Osredotočimo se na ničle tropskega kvadratnega polinoma. Opazimo, da je ∞ ničla, če in samo če je $c = \infty$. V tem primeru, če je tudi $b = \infty$, je ∞ edina ničla, če pa $b \neq \infty$ je druga ničla enaka presečišču $a + 2x$ in $b + x$, ki je enako $b - a$, torej ima polinom dve ničli.

Predpostavimo, da $c \neq \infty$, torej ∞ ni ničla. Izračunajmo ostale potencialne ničle, to so:

- $a + 2x = b + x$, kar velja, ko $x_1 = b - a$,
- $b + x = c$, kar velja, ko $x_2 = c - b$ in
- $a + 2x = c$, kar velja, ko $x_3 = \frac{c-a}{2}$.

Če je $b = \infty$ je x_3 edina ničla, zato predpostavimo, da velja $b \neq \infty$. Izračunajmo $b + x_3 = b + \frac{c-a}{2}$. S tem dobimo vrednost izraza $b + x$ pri presečišču $a + 2x$ in c . Če je $b + \frac{c-a}{2} \geq c$, potem ima polinom eno ničlo x_3 . Če pa je $b + \frac{c-a}{2} < c$, potem ima polinom dve ničli x_1 in x_2 .

Predpostavimo, da noben izmed koeficientov a, b ali c ni enak ∞ . Vrednosti $a + c - 2b$ pravimo tropska diskriminanta, saj ima enake lastnosti kot navadna diskriminanta. Če velja $a + c - 2b > 0$, ima kvadratni polinom dve različni ničli. Če pa je izraz $a + c - 2b \leq 0$ pa ima kvadratni polinom eno ničlo.

Kot zanimivost omenimo "tropski osnovni izrek algebre", ki pravi, da ima tropski polinom stopnje n natanko n ničel, štetih s primerno definicijo večkratnosti.

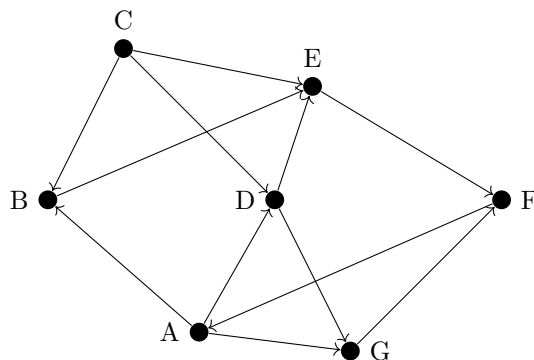
2 Problem najkrajše poti v usmerjenem grafu

V nadaljevanju predstavimo uporabo tropskih operacij na problemu iz teorije grafov. Vseskozi uporabljamo usmerjene grafe.

Definicija 7. *Usmerjen graf $G = (V, E)$ je urejen par, kjer je $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ neprazna končna množica vozlišč in $E \subset V \times V$ množica povezav med njimi.*

Grafe lahko ponazorimo z diagrami, tako da je vsako vozlišče točka. Vsaka povezava je urejen par (u, v) , kar v diagramu predstavimo s puščico, ki poteka od vozlišča u do vozlišča v .

Primer 1. *Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf, kjer je $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ in s povezavami označeni na naslednji sliki.*

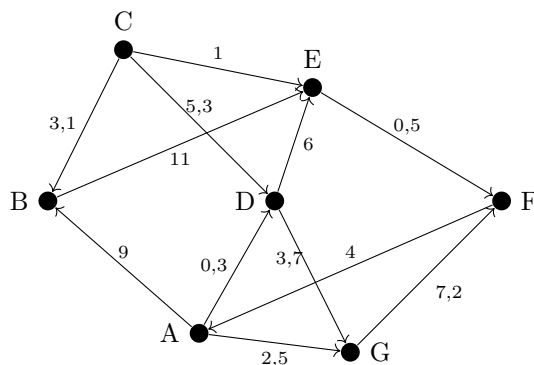


Slika 1: Usmerjen graf.

Povezavam lahko dodamo uteži in tako dobimo utežen graf. Vse uteži lahko predstavimo s preslikavo c iz množice povezav v $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

Definicija 8. Naj bo G usmerjen graf in $c : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ preslikava. Paru (G, c) pravimo utežen graf.

Primer 2. Povezavam grafa iz primera 1 dodelimo uteži, tako da dobimo utežen graf.



Slika 2: Utežen usmerjen graf.

Definicija 9. Pot P med vozliščema v in w je zaporedje $v = u_0, u_1, \dots, u_m = w$, kjer je $(u_i, u_{i+1}) \in E$ za vse $0 \leq i \leq m-1$.

Dolžino poti P definiramo kot vsoto uteži vseh povezav, ki se pojavijo v poti, kar zapišemo kot

$$c(P) = \sum_{i=0}^{m-1} c(u_i, u_{i+1}).$$

Zanima nas kolikšna je najmanjša dolžina poti med poljubnima vozliščema i in j grafa G . Takšni poti pravimo najkrajša pot med i in j . Za enostavnejše računanje bomo grafe predstavili s kvadratnimi matrikami velikosti $n \times n$, kjer je n število vozlišč grafa.

Definicija 10. Matrika A velikosti $p \times q$ je tabela s p vrsticami in q stolpci, kjer za vsak element $a_{ij} = [A]_{ij}$ velja $a_{ij} \in \overline{\mathbb{R}}$. Element a_{ij} se v matriki nahaja v i -ti vrstici in v j -tem stolpcu. Matrika je kvadratna, kadar velja $p = q$. Množico vseh matrik velikosti $p \times q$ označimo z $\overline{\mathbb{R}}^{p \times q}$.

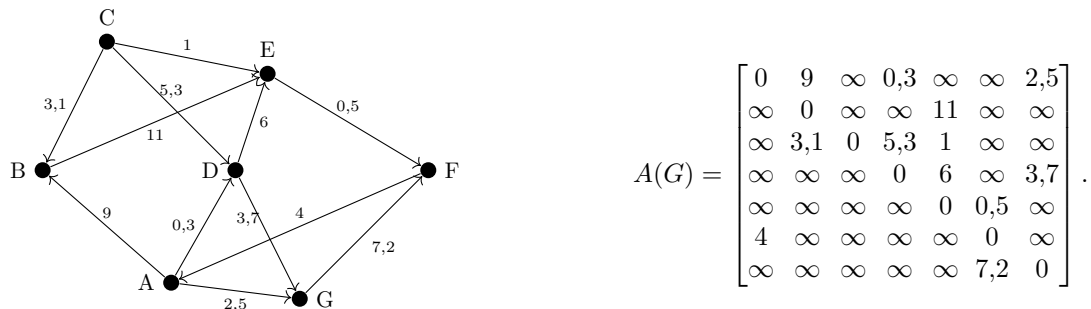
Primer 3. Primer matrike $A \in \overline{\mathbb{R}}^{3 \times 3}$ je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0,5 \\ \pi & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & \infty \end{bmatrix}.$$

Ta matrika je kvadratna, saj ima enako število vrstic in stolpcev.

Definicija 11. Naj bo (G, c) utežen usmerjen graf in $n = |V|$. Definirajmo matriko $A(G) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}^{n \times n}$ s predpisom $[A]_{ij} = c(i, j)$ če velja $i \neq j$ in $(i, j) \in E$ ter $[A]_{ij} = \infty$, če velja $i \neq j$ in $(i, j) \notin E$. Določimo tudi $[A(G)]_{ii} = 0$ za vsak i . Matriki $A(G)$ pravimo utežena matrika sosednosti uteženega grafa (G, c) .

Primer 4. Naj bo G graf iz primera 2. Matriko sosednosti $A(G)$ tega grafa dobimo tako, da za vsak par vozlišč i, j v ustrezno mesto matrike vpišemo težo povezave (i, j) , če ta obstaja. Če povezava ne obstaja, vpišemo ∞ .



Slika 3: Utežen graf in njegova utežena matrika sosednosti.

Naj velja $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$.

Definicija 12. Vsota matrik A in B je matrika $A + B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, za katero velja

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$

Definicija 13. Produkt matrik A in B je matrika $AB \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, za katero velja

$$[AB]_{ij} = \sum_{m=1}^n [A]_{im} [B]_{mj}.$$

Definicija 14. Tropska vsota matrik A in B , sta $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, je matrika $A \oplus B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, za katero velja

$$[A \oplus B]_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}.$$

Primer 5. Naj bosta $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{2 \times 2}$ naslednji matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \infty & -4,3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Njuna tropska vsota je matrika

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \min(2, 0) & \min(5, \sqrt{2}) \\ \min(\infty, 4) & \min(-4,3, 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 4 & -4,3 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da pri tropskem seštevanju matrik v vsakem polju izberemo manjše izmed števil v pripadajočih poljih obeh matrik.

Definicija 15. Naj bosta $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$ matriki. Tropski produkt matrik A in B je matrika $A \odot B \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$, za katero velja

$$[A \odot B]_{ij} = \bigoplus_{m=1}^n ([A]_{im} \odot [B]_{mj}).$$

Primer 6. Naj bosta A, B matriki iz primera 5. Njun tropski produkt $A \odot B \in \overline{\mathbb{R}}^{2 \times 2}$ izračunamo po definiciji, na primer elementa $[A \odot B]_{11}$ in $[A \odot B]_{21}$

$$[A \odot B]_{11} = \min([A]_{11} \odot [B]_{11}, [A]_{12} \odot [B]_{21}) = \min(2 + 0, 5 + 4) = \min(2, 9) = 2,$$

$$[A \odot B]_{21} = \min([A]_{21} \odot [B]_{11}, [A]_{22} \odot [B]_{21}) = \min(\infty + 0, -4.3 + 4) = \min(\infty, -0.3) = -0.3.$$

Na enak način izračunamo še preostale elemente in dobimo

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 + \sqrt{2} \\ -0.3 & 2.7 \end{bmatrix}.$$

Tropsko množenje matrik je asociativno in distributivno nad tropskim seštevanjem matrik.

Izkaže se, da problem najkrajše poti rešimo ravno s tropskim množenjem. To storimo tako, da matriko večkrat tropsko pomnožimo samo s sabo. Matriko, ki smo jo k -krat tropsko pomnožili, zapišemo tudi z $A^{\odot k}$.

Izrek 3. Naj bo (G, c) utežen usmerjen graf z n vozlišči in naj bo $A(G) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}^{n \times n}$ njegova utežena matrika sosednosti. Za $k \geq 1$, drži, da za vsaka $i, j \in V$ element $[A(G)]_{ij}^{\odot k}$ predstavlja dolžino najkrajše poti od vozlišča i do vozlišča j , ki vključuje največ k povezav. Iz tega sledi, da je $[A(G)]_{ij}^{\odot (n-1)}$ enako dolžini najkrajše poti od i do j .

Dokaz. Za $i, j \in V$ in $k \geq 1$ naj $d_{ij}^{(k)} \in \overline{\mathbb{R}}$ označuje dolžino najkrajše poti od i do j z največ k povezavami. Ker so uteži zmeraj nenegativna realna števila ali ∞ velja $d_{ij}^{(1)} = c(i, j)$. Trdimo, da za vsak $k \geq 1$ in $i, j \in V$ velja rekurzivna zveza

$$d_{ij}^{(k+1)} = \min\{d_{im}^{(k)} + c(m, j) \mid m \in V\}.$$

Naj bo $i = u_0, \dots, u_{l+1} = j$ najkrajša pot od i do j z največ $k+1$ povezavami (torej $l \leq k$), ki ne ponavlja vozlišč. Opazimo, da je $i = u_0, \dots, u_l$ najkrajša pot od i do u_l z največ k povezavami. Zato velja

$$d_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=0}^l c(u_r, u_{r+1}) = d_{iu_l}^{(k)} + c(u_l, j) \geq \min\{d_{im}^{(k)} + c(m, j) \mid m \in V\}.$$

Dokažimo še drugo stran neenakosti. Recimo, da $\{d_{im}^{(k)} + c(m, j) \mid m \in V\}$ doseže minimum v $d_{ip}^{(k)} + c(p, j)$. Naj bo $i = w_0, \dots, w_{q+1} = p$ pot od i do p dolžine največ k , za katero drži $\sum_{r=0}^q c(w_r, w_{r+1}) = d_{ip}^{(k)}$. Potem je $i = w_0, \dots, w_{q+1}, j$ pot od i do j dolžine največ $k+1$ zato po definiciji sledi

$$\min\{d_{im}^{(k)} + c(m, j) \mid m \in V\} = d_{ip}^{(k)} + c(p, j) = \sum_{r=0}^q c(w_r, w_{r+1}) \geq d_{ij}^{(k+1)}.$$

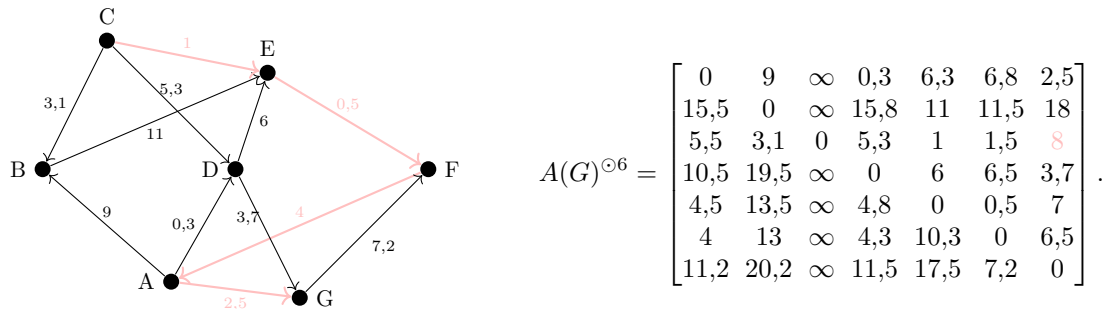
Rekurzivna zveza je dokazana. Za konec pokažimo še, da za vsak $k \geq 1$ velja $[A(G)^{\odot k}]_{ij} = d_{ij}^{(k)}$. Trditev lahko dokažemo z indukcijo, kot smo omenili na začetku dokaza, je res za $k = 1$. Recimo, da velja za nek $k \geq 1$. Potem imamo naslednjo verigo enakosti

$$\begin{aligned} [A(G)^{\odot (k+1)}]_{ij} &= [A(G)^{\odot k} \odot A(G)]_{ij} \\ &= \oplus_{l=1}^n ([A(G)^{\odot k}]_{il} \odot [A(G)]_{lj}) \\ &= \min_{l=1, \dots, n} ([A(G)^{\odot k}]_{il} + [A(G)]_{lj}) \\ &= \min_{l=1, \dots, n} (d_{il}^{(k)} + c(l, j)) \\ &= d_{ij}^{(k+1)}, \end{aligned}$$

kar zaključí indukcijski korak in prvi del izreka.

Uteži v grafu G so nenegativne, zato lahko vsako najkrajšo pot spremenimo v najkrajšo pot, ki obiše vsako vozlišče največ enkrat. To je zato, ker mora vsak cikel, ki se pojavi v najkrajši poti, imeti težo 0. Zato med poljubnima vozliščema $i, j \in V$ obstaja najkrajša pot, ki vključuje največ n vozlišč oziroma $n - 1$ povezav. $\square$

Ponazorimo izrek 3 na primeru 2. Najkrajša pot od vozlišča C do G je označena z roza barvo. Sestavlja jo zaporedje vozlišč C, E, F, A, G dolžine 8. To se sklada s poljem v tretji vrstici in sedmem stolpcu matrike $[A(G)]^{\odot 6}$, ki je prav tako enaka 8.



Slika 4: Utežen graf in šesta tropska potenca njegove matrike sosednosti.

Literatura

B. Sturmfels, M. Michałek *Invitation to Nonlinear Algebra*, Graduate Studies in Mathematics Volume: 211; 2021; dostopno na <https://math.berkeley.edu/~bernd/gsm211.pdf>