Kruha in MaRSovskih iger

Evgenija Burger, Karmen Zupančič, Živa Kadunc
Mentorica: Anja Petković

Matematično raziskovalno srečanje
20. avgust 2016

Povzetek

Reševali smo problem gladiatorjev s prenosom moči. Tega smo se lotili s pomočjo teorije verjetnosti, zato smo najprej spoznali njene osnove. Ukvarjali smo se s popolno indukcijo, ki nam je pomagala ugotoviti pravilni vrstni red gladiatorjev.

Vsi vemo, da je bil Mars v Starem Rimu ne le bog pomladi in plodnosti, temveč tudi vojne. Sodobni Marsovci se tega še kako zavedajo, saj med njimi potekajo strašni boji. Do teh je prišlo, ko se je skupina Marsovcev Deimos uprla režimu skupine Fobos. Marsovska aristokratska druščina je določila, naj vsaka izmed teh dveh ekip izbere gladiatorje, ki se bodo borili v areni. Ob tem so podali zapletena navodila. Deimos ima namreč gladiatorje z močmi $s_1, s_2, \ldots, s_m$ in moštvo Fobos ima gladiatorje z močmi $t_1, t_2, \ldots, t_n$. V vsakem krogu bojevanja se bosta spopadla dva gladiatorja, po eden iz vsake ekipe. Verjetnost za zmago gladiatorja je proporcionalna njegovi moči. Če bi se borila gladiatorja z močmi s_i in t_j, bi prvi zmagal z verjetnostjo $\frac{s_i}{s_i+t_j}$, drugi pa z verjetnostjo $\frac{t_j}{s_i+t_j}$. Razumeti moramo tudi, da je hipotetično poražen gladiator izgnan iz lastne ekpe in se od svojega poraza dalje bojuje v korist nasprotne ekipe skupaj z gladiatorjem, ki ga je premagal. Lahko si zamislimo, da se moč poraženega gladiatorja prenese na zmagovalca in tako slednji postane še močnejši, kot je bil prej. Zmaga bo pripadla tistim, ki bodo na svoji strani imeli najmanj enega neporaženega gladiatorja.

Obe skupini sedaj razmišljata, v kakšnem vrstnem redu bi v boj poslali svoje različno močne gladiatorje, da bi bila zmaga najbolj verjetna. Ker so vsi Marsovci neizmerno inteligentni, so ugotovili, da brez strategije ne bodo prišli daleč. Kako verjetno je, da bo zmagala skupina Deimos in se s tem zapisala v zgodovino? Bo to bolj verjetno skupina Fobos?

1 Osnovni pojmi verjetnosti

Ker se v našem problemu gladiatorjev s prenosom moči pojavi verjetnost, moramo spoznati njeno formalno matematično definicijo in njene osnovne lastnosti. Glavna vira pri tem sta [1] in [2].

Premislimo, kako neformalno gledamo na verjetnost in njene sorodne pojme. Intuitivno je verjetnost število, ki nam pove, kolikšna je možnost, da se zgodi nek dogodek. Za dogodek lahko smatramo npr. število pik vržene kocke. Če bi kocko metali 100-krat, bi nam verjetnost povedala, kolikšen delež metov pričakujemo, da predstavljajo meti z nekim fiksnim številom pik. Verjetnost dogodka A označimo s $P(A)$.

Ko računamo verjetnost, se najprej vprašamo, kateri so vsi možni izidi nekega eksperimenta, ki vključuje naključnost. Množico vseh izidov označujemo z Ω. Ukvarjali se bomo s končnimi množicami izidov. *Dogodek* je katerakoli podmnožica množice izidov. Ponavadi ga označimo z A. Če ima dogodek en element, ga imenujemo *elementaren dogodek*. Z elementarnimi dogodki lahko podamo verjetnosti ostalih dogodkov. Intuitivno si lahko predstavljamo verjetnost kot razmerje števila izidov v dogodku proti številu vseh izidov. Za dogodek A to napišemo s formulo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

To je sedaj naša neformalna definicija verjetnosti. Oglejmo si primer.

Primer 1. Pri metu kocke je verjetnost, da pade sodo število pik, enaka

$$P(\text{pade sodo število pik}) = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vprašamo se, kakšne lastnosti pričakujemo od verjetnosti. Ker je dogodek podmnožica množice izidov, ima manjšo ali kvečjemu enako moč kot celotna množica Ω, zato bo verjetnost število iz intervala $[0,1]$. Oglejmo si še druge želene lastnosti verjetnosti:

1. Verjetnost nemogočega dogodka je enaka 0 oziroma $P(\emptyset) = 0$.

2. Verjetnost gotovega dogodka je enaka 1, torej $P(\Omega) = 1$.

3. Verjetnosti disjunktnih dogodkov se seštevajo, kot se seštevajo moči disjunktnih množic.

Trenutna začasna definicija tem lastnostim ustreza, a v splošnem ni nujno, da so vsi izidi enako verjetni. Zato bomo verjetnost definirali še formalno. Najprej pa si poglejmo definiciji množice izidov in dogodka, ki sta povzeti po [4].

Definicija 1. Množica vseh izidov *je univerzalna množica, tj. množica vseh možnih izidov danega poskusa. Ponavadi jo označimo z* Ω.

Definicija 2. Dogodek *je podmnožica množice vseh izidov. Dogodke ponavadi označuejmo z velikimi črkami z začetka abecede, npr.* $A, B, C \ldots$.

Sedaj pa lahko zapišemo še matematično definicijo verjetnosti.

Definicija 3. *Naj bo* Ω *množica vseh izidov in* D *množica vseh dogodkov. Za nas bo* D *vedno potenčna množica množice* Ω. Verjetnost *je preslikava* $P : D \to [0, 1]$, *za katero velja*

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0,$
- *če so* $A_1, A_2, ...A_n$ *disjunktni dogodki, potem je* $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$.

S to definicijo verjetnosti pa imajo lahko različni izidi tudi različne verjetnosti.

Primer 2. Oglejmo si, kako lahko preko definicije podamo nepošteno kocko. Radi bi simulirali kocko, ki bo v polovici primerov pristala na šestici. Naša množica izidov je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Množica vseh dogodkov je

$$D = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Preslikavo P definiramo takole $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Verjetnost, da kocka pristane na šestici, je $\frac{1}{2}$,

$$P(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Verjetnost ostalih elementarnih dogodkov je $\frac{1}{10}$,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{10}.$$

Oglejmo si še verjetnosti nekaterih ostalih dogodkov. Verjetnost, da kocka pade na liho število pik, je vsota verjetnosti, da pade na 1, 3 ali 5.

Vemo, da je verjetnost dogodkov, da kocka pade na 1, 3 ali 5, enaka $\frac{1}{10}$. Ker so dogodki med sabo disjunktni, njihove verjetnosti med sabo seštejemo, torej

$$P(\{1,3,5\}) = P(\text{liho}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

Verjetnost, da kocka pristane na sodem številu, pa je

$$P(\text{sodo}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10} = 70\%.$$

Če od verjetnosti gotovega dogodka, ki ga označimo z Ω, odštejemo verjetnost dogodka A, dobimo verjetnost njegovega komplementa, torej A^c, kar zapišemo tako:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Res, verjetnost, da se zgodi dogodek A ali da se zgodi njegov komplement, je enaka 1, kar pomeni, da je gotovo, da se zgodi bodisi A bodisi A^c. Torej $P(A \cup A^c) = 1$, saj je $A \cup A^c = \Omega$. Da je A^c komplement A, pomeni, da nimata nič skupnega. Njun presek je enak prazni množici, ekvivalentno $A \cap A^c = \emptyset$. Dogodka sta disjunktna, zato se njuni vrednosti seštejeta, $1 = P(A) + P(A^c)$. Ko odštejemo$P(A^c)$, dobimo formulo za verjetnost dogodka A.

Primer 3 (Rojstni dnevi)**.** Zanima nas verjetnost, da v skupini z n ljudmi najdemo dve osebi, ki imata na isti dan v letu rojstni dan. Rešitev problema smo povzeli po [2]. Nalogo rešimo tako, da uporabimo komplement dogodka in pogledamo verjetnost, da takšni dve osebi ne obstajata. Množica vseh izidov so vse n-terice, kjer so komponente dnevi v letu. Dogodek, ki ga iščemo, so tiste n-terice, kjer sta vsaj dve komponenti enaki. V imenovalcu zapišemo število vseh možnih izidov, ki je 365^n, saj ima vsaka izmed n oseb lahko rojstni dan na katerikoli dan v letu. V števcu pa zapišemo možne izide v primeru, ko osebi, ki imata na isti dan rojstni dan, ne obstajata. Prva oseba ima tako lahko rojstni dan na katerikoli dan v letu, medtem ko ima druga oseba na voljo le še ostalih 364 dni, za tretjo jih ostane še 363 in za n-to osebo še $365 - n$ dni, oziroma

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365 - n)}{365^n}.$$

Ugotovimo, da verjetnost dogodka A prvič preseže $\frac{1}{2}$ že pri 23 osebah, pri 41 osebah znaša verjetnost že 0˙903, medtem ko je v skupini 70 ljudi verjetnost, da imata dve osebi isti dan rojstni dan, enaka 0˙999.

Za izračun verjetnosti unije dveh dogodkov seštejemo verjetnost obeh posameznih dogodkov ter odštejemo njun presek, saj se v preseku nahajajo izidi, ki smo jih pri seštevanju šteli dvakrat.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Za rešitev problema gladiatorjev bomo potrebovali še pogojno verjetnost. Neformalno se verjetnost nekega dogodka ponavadi spremeni, če vemo, da se je nek (drug) dogodek zgodil. Slednjega imenujemo pogoj, od tod tudi ime pogojna verjetnost. Oglejmo si matematično definicijo pogojne verjetnosti.

Definicija 4. *Naj bosta A in B dogodka in $P(B) > 0$. Pogojna verjetnost dogodka A glede na B je*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Primer 4 (Jetniški paradoks)**.** Vladar neke dežele se odloči, da bo za državni praznik naključno pomilostil dva od treh jetnikov, tretjega pa bo usmrtil. Jetnik A ponoči ne more spati in, da bi se bolje počutil, prosi ječarja, naj mu pove ime enega od ostalih dveh jetnikov, ki ga bo kralj pomislostil. Ta jetnik ve, da bosta dva od njih pomiloščena, zato bo pomiloščen vsaj eden od ostalih dveh. Jetnik A mu reče: "Ječar, lahko mi poveš, kdo izmed jetnikov B in C bo pomiloščen, saj mi s tem ne izdaš nobene dodatne informacije." Ječar se ne strinja: "Verjetnost, da boš pomiloščen, se ti bo tako zmanjšala z dveh tretjin na polovico. Tega ne bom storil." Jetnik A protestira, da se verjetnost vendar ne spremeni. Kdo izmed njiju ima prav?

Rešitev naloge smo povzeli po [1]. Poglejmo teorijo:

1. Če je naš jetnik A pomiloščen, lahko ječar pove le ime drugega pomiloščenega.

2. Če je naš jetnik A obsojen na smrt, lahko ječar izbere kateregakoli izmed jetnikov B in C.

Oglejmo si pogojne verjetnosti, če ječar reče B in če ječar reče C. Predpostavimo, da ječar, če lahko izbira, reče B z verjetnostjo x. Pri tem upoštevamo, da je $x \in [0, 1]$.

V prvem primeru ječar reče, da bo pomiloščen B in računamo pogojno verjetnost, da bo A usmrčen.

$$P(A|\text{reče B}) = \frac{P(A \text{ in reče B})}{P(\text{reče B})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot x}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot x}$$

V števcu enačbe imamo $\frac{1}{3}$, saj bo s to verjetnostjo A usmrčen. To smo pomnožili z x, ker bo ječar z verjetnostjo x rekel B neodvisno od dogodka, da bo A usmrčen. V imenovalcu seštejemo tretjino od tega, da ječar reče B, ko bo C usmrčen, in še tretjino od x, ko bo usmrčen A.

Pri drugem primeru računamo pogojno verjetnost, da bo A usmrčen, če ječar reče, da bo pomiloščen C.

$$P(A|\text{reče C}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot (1-x)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot (1-x)}$$

V tem primeru smo prav tako v števcu upoštevali, da bo A usmrčen z verjetnostjo $\frac{1}{3}$, kar smo pomnožili z $(1-x)$, saj ječar izbira med jetnikoma B in C. Imenovalec pa vsebuje vsoto verjetnosti, da ječar reče C, ko bo usmrčen B ter verjetnost $\frac{1-x}{3}$, ko bo usmčen A.

Verjetnosti sta za splošen x različni, torej niti ječar niti jetnik A nimata prav. Verjetnosti sta enaki le v primeru, ko je $x = \frac{1}{2}$.

Porebovali bomo še definicijo neodvisnih dogodkov. Mislimo si, da sta dogodka neodvisna, če ne vplivata drug na drugega. Formalna definicija pa je naslednja.

Definicija 5. *Dogodka A in B sta* neodvisna dogodka*, če velja*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Za naslednji izrek bomo potrebovali definicijo popolnega sistema dogodkov.

Definicija 6. *Dogodki $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvorijo* popoln sistem dogodkov*, če je $H_1 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$ in za $i \neq j$ velja $H_i \cap H_j = \emptyset$. Dogodke $H_1, H_2, \ldots, H_n$ imenujemo tudi* hipoteze*.*

Oglejmo si izrek, ki nam bo pomagal računati verjetnosti pri reševanju problema gladiatorjev.

Izrek 1 (Izrek o popolni verjetnosti)**.** *Naj bodo $H_1, H_2, \ldots, H_n$ popoln sistem dogodkov. Tedaj je verjetnost dogodka A enaka*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Dokaz. V formulo iz izreka vstavimo definicijo pogojne verjetnosti.

$$P(A) = \frac{P(A \cap H_1)}{P(H_1)} \cdot P(H_1) + \frac{P(A \cap H_2)}{P(H_2)} \cdot P(H_2) + \cdots + \frac{P(A \cap H_n)}{P(H_n)} \cdot P(H_n)$$

Pokrajšamo verjetnosti hipotez in dobimo naslednji izraz:

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n).$$

Ker so naše hipoteze disjunktni dogodki, se verjetnosti seštejejo in leva ter desna stran enačbe sta posledično enaki. □

2 Popolna indukcija

Popolna indukcija (tudi *matematična indukcija*) je način dokazovanja, ki je sestavljen iz treh delov. Prvi del je baza indukcije, kjer želeno trditev preverimo na začetnem primeru. Sledi ji indukcijska predpostavka, zadnji del pa je indukcijski korak, ko skušamo predpostavko uporabiti za sklep o naslednjem primeru. Indukcijo bomo uporabili pri dokazovanju verjetnosti zmag ali porazov v boju gladiatorjev.

Za razumevanje poteka dokaza s popolno indukcijo si oglejmo primer.

Primer 5. Skušali bomo dokazati, da je za $n \in \mathbb{N}$, izraz $8^n - 3^n$ deljiv s 5. Če 5 deli ta izraz , potem ga lahko zapišemo kot $8^n - 3^n = 5k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. V prvem delu dokaza preverimo, da trditev velja za začetni pogoj. Za našem primer je začetni pogoj, ko za n izberemo število 1, ki ga vstavimo v enačbo. Baza indukcije:

$$8^1 - 3^1 = 5 \cdot 1,$$

torej za $n = 1$ trditev velja. V drugem koraku indukcije prepišemo prvotno trditev, našo predpostavko, ki bi jo radi dokazali. Naša indukcijska predpostavka je $8^n - 3^n = 5k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker predpostavka velja za n, bomo v zadnjem delu (indukcijski korak) skušali dokazati, da enako velja za $n + 1$. Dokazati želimo, da je $8^{n+1} - 3^{n+1} = 5l$, kjer je $l \in \mathbb{Z}$. Ker želimo uporabiti indukcijsko predpostavko, izraz preoblikujemo. Najprej poskrbimo, da so v eksponentih manjša števila, torej

$$8 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^n = 5l.$$

Nato izpostavimo število osem, da dobimo podoben izraz, kot je v indukcijski predpostavki.

$$8(8^n - 3^n) + 5 \cdot 3^n = 5l$$

Na tem mestu uporabimo indukcijsko predpostavko in namesto $(8^n - 3^n)$ vstavimo $5k$, kjer k predstavlja celo število, torej

$$8 \cdot 5k + 5 \cdot 3^n = 5l.$$

S tem smo dokazali, da 5 deli izraz $8^n - 3^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

3 Rešitev problema gladiatorjev s prenosom moči

Posvetimo se ponovno prvotnemu problemu v začetni zgodbi. Oglejmo si problem v bolj preprosti formulaciji.

Problem 1 (Problem gladiatorjev s prenosom moči)**.** *Imamo 2 moštvi gladiatorjev, prvo moštvo ima gladiatorje z močmi* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *in drugo moštvo ima gladiatorje z močmi* $t_1, t_2, \ldots, t_n$*. V vsakem kolu bojevanja se spopadeta 2 gladiatorja, po eden iz vsakega moštva. Če se borita gladiatorja z močmi* s_i *in* t_j*, prvi zmaga z verjetnostjo* $\frac{s_i}{s_i+t_j}$*, drugi pa z verjetnostjo* $\frac{t_j}{s_i+t_j}$*. Poraženi gladiator je izgnan iz svoje ekipe in se od tedaj naprej mora bojevati v nasprotni ekipi skupaj z gladiatorjem, ki ga je premagal (zamislimo si, da svojo moč preda zmagovalcu in se izloči iz boja). Zmagovalni gladiator se bojuje za svojo ekipo v naslednjem krogu, dokler boja ne izgubi. Zmaga moštvo, ki ima na koncu vsaj enega neporaženega gladiatorja. V kakšnem vrstnem redu naj prvo moštvo pošilja gladiatorje v boj, da bo verjetnost zmage največja? Kolikšna je ta verjetnost?*

Reševanja problema se lotilmo z uporabo matematične indukcije. Dokaz smo povzeli po [3]. Množica vseh izidov pri danem vrstnem redu gladiatorjev so vsa mogoča zaporedja porazov in zmag, ki sledijo pravilom bojevanja v areni. Opazujemo dogodek, da zmaga prvo moštvo, označimo ga z A. To so tista zaporedja zmag in porazov, pri katerih so poraženi vsi gladiatorji drugega moštva. Radi bi pokazali naslednjo trditev.

Trditev 1. *Verjetnost dogodka, da zmaga prvo moštvo, je enaka*

$$P(A) = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_m}{s_1 + s_2 + \cdots + s_m + t_1 + t_2 + \cdots + t_n}.$$

Dokaz. Dokazovanja se lotimo z indukcijo po številu gladiatorjev $m + n$. Osnovni primer je, da ima vsako mošto enega gladiatorja. Baza indukcije je po definiciji $m = 1$, $n = 1$ oziroma $m + n = 2$. Verjetnost dogodka za ta primer je

$$P(A) = \frac{s_1}{s_1 + s_2},$$

kar ustreza naši trditvi.

Sedaj si postavimo indukcijsko predpostavko, ki je enaka naši trditvi 1. Sledi indukcijski korak, kjer želimo dokazati, da trditev velja za primer, ko imamo enega gladiatorja več kot prej, oziroma ko imamo $m + n + 1$ gladiatorjev. Brez škode lahko privzamemo, da je dodatni gladiator z močjo t_{n+1} v drugem moštvu, saj obraten primer lahko dokažemo po enakem postopku. Želimo dokazati, da je

$$P(A) = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_m}{s_1 + s_2 + \cdots + s_m + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1}}.$$

Za lažje razumevanje bomo gladiatorje označevali kar s pripadajočimi močmi. Radi bi uporabili izrek o popolni verjetnosti, zato potek igre razdelimo na dve hipotezi. Prva hipoteza je, da v prvem boju, kjer se bojujeta s_i iz prvega moštva in t_j iz drugega moštva, zmaga prvo moštvo, v drugi hipotezi pa zmaga drugo moštvo. Prvo hipotezo označimo s H_1, drugo pa s H_2. Oglejmo si verjetnosti za vsako hipotezo posebej:

1. Verjetnost hipoteze H_1, da zmaga s_i, je

$$P(H_1) = \frac{s_i}{s_i + t_j}.$$

Vemo, da se moč poraženega gladiatorja "prenese"na zmagovalca, tako je nova moč gladiatorja iz prvega moštva $s_i + t_j$. Moči gladiatorjev iz prvega moštva so po prvem boju tako enake

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{i-1}, s_i + t_j, s_{i+1}, \ldots, s_m,$$

moči gladiatorjev iz drugega moštva pa so

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{n+1}.$$

Število gladiatorjev v prvem moštvu ostane m, v drugem moštvu pa je $(n+1) - 1 = n$. Skupaj je torej $m + n$, gladiatorjev, torej lahko uporabimo indukcijsko predpostavko.

2. Verjetnost hipoteze H_2, da zmaga t_j, je

$$P(H_2) = \frac{t_j}{s_i + t_j}.$$

Tokrat se moč poraženca iz prve ekipe prenese na zmagovalca iz druge ekipe. Moči gladiatorjev iz prvega moštva v tem primeru so tako po boju enake

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m,$$

moči gladiatorjev iz drugega moštva pa so

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{j-1}, t_j + s_i, t_{j+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}.$$

Število gladiatorjev v prvem moštvu se zmanjša za ena, torej je sedaj $m-1$, število v drugem moštvu pa ostane $n+1$. Tudi v tem primeru jih je skupaj $(m-1)+(n+1) = m+n$, torej lahko uporabimo indkucijsko predpostavko.

Za nadaljnje dokazovanje uporabimo izrek o popolni verjetnosti. Hipotezi H_1 in H_2 tvorita popoln sistem dogodkov, saj vemo, da bo v prvi bitki zmagal natanko eden od obeh gladiatorjev. Za večjo preglednost uporabimo oznake, ki označujejo skupno moč ekipe gladiatorjev:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_m.$$

$$T = t_1 + 1_2 + t_3 + \cdots + t_{n+1}.$$

Najprej uporabimo izrek o popolni verjetnosti:

$P(A) = P(\text{zmaga prvo moštvo}|H_1) \cdot P(H_1) + P(\text{zmaga prvo moštvo}|H_2) \cdot P(H_2)$

Verjetnosti hipotez že poznamo, izračunati moramo še pogojne verjetnosti.

$P(\text{zmaga prvo moštvo}|H_1) =$

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1} + (s_i + t_j) + s_{i+1} + \cdots + s_m}{s_1 + \cdots + s_{i-1} + (s_i + t_j) + s_{i+1} + \cdots + s_m + t_1 + \cdots + t_{j-1} + t_{j+1} + \cdots + t_n + t_{n+1}}$$

V števcu smo sešteli vse moči prvega moštva po prvem boju, če zmaga s_i, v imenovalcu pa smo sešteli moči prvega in drugega moštva po prvem boju. Z novimi oznakami to zapišemo

$$P(\text{zmaga prvo moštvo}|H_1) = \frac{S + t_j}{(S + t_j) + (T - t_j)}.$$

Na enak način izračunamo pogojno verjetnost ob pogoju H_2. Verjetnost je potem enaka

$$P(\text{zmaga prvo moštvo}|H_2) = \frac{S - s_i}{S + T}.$$

Formule vstavimo v izrek o popolni verjetnosti ter dobimo

$$P(A) = \frac{S + t_j}{(S + t_j) + (T - t_j)} \cdot \frac{s_i}{s_i + t_j} + \frac{S - s_i}{S + T} \cdot \frac{t_j}{s_i + t_j},$$

kar s seštevanjem oziroma z odštevanjem in množenjem poenostavimo

$$P(A) = \frac{S + t_j}{(S + T)} \cdot \frac{s_i}{s_i + t_j} + \frac{S - s_i}{S + T} \cdot \frac{t_j}{s_i + t_j}.$$

Člena sta že na skupnem imenovalcu, zato ju skupaj zapišemo v števec in hkrati zmnožimo, kar porodi izraz

$$P(A) = \frac{s_i S + s_i t_j + t_j S - s_i t_j}{(s_i + t_j)(S + T)}.$$

V števcu izpostavimo S in dobimo

$$P(A) = \frac{S(s_i + t_j)}{(s_i + t_j)(S + T)}.$$

Vidimo, da se tako v števcu kot imenovalcu nahaja izraz $s_i + t_j$, zato ga pokrajšamo. Ko poenostavimo, dobimo izraz

$$P(A) = \frac{S}{S + T}.$$

Namesto oznak S in T vstavimo izraza, ki smo ju s črkama označili, kar nas privede do enačbe

$$P(A) = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_m}{s_1 + s_2 + \cdots + s_m + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1}}.$$

Dobili smo enačbo, ki smo jo želeli. Z uporabo indukcije in izreka o popolni verjetnosti smo tako dokazali, da verjetnost zmage moštva ni odvisna od vrstnega reda gladiatorjev, ki jih pošiljamo v areno, temveč od števila oziroma moči gladiatorjev. Vsota moči vsakega moštva se namreč zaradi zakona o združevanju (asociativnost) in zakona o zamenjavi (komutativnost) ne spremeni, če seštevamo v drugačnem vrstnem redu. Tako smo izračunali verjetnost, da zmaga prvo moštvo ter dokazali, da je naša rešitev problema ustrezna.

□

Ugotovili smo torej, da strategija ni pomembna. Ta ugotovitev je razočarala tako skupino Fobos kot skupino Deimos, ki sta sedaj prepuščeni na milost in nemilost moči lastnih gladiatorjev. Iz predavalnic so se premaknili v fitnes, v katerem sedaj trenirajo svoje gladiatorje. Zaradi tega si lastniki fitnesa pohlepno manejo roke, saj so vsakemu izmed Marsovcev zaračunali letno članarino.

Literatura

[1] Zapiski predavanj Mihaela Permana, Verjetnost, 2015, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani.

[2] M. Raič: *Vaje iz verjetnosti in statistike*, verzija 2016

[3] *Gladiator Game*: v Cut the Knot, dostopno na `http://www.cut-the-knot.org/Probability/GladiatorGame.shtml#solution` [ogled 1. 8. 2016]

[4] *Matematični priročnik za srednje šole*. Dostopno na http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/verjetno.html [ogled 18. 8. 2016]