Hipohamiltonovi grafi

Marko Čmrlec, Bor Grošelj Simić
Mentor(ica): Vesna Iršič

Matematično raziskovalno srečanje
21. avgust 2016

1 Uvod

V marsovskem klubu je želel predsednik prirediti večerjo za svoje člane. Marsovce je želel posesti za okroglo mizo tako, da bi vsak sedel poleg dveh svojih prijateljev. Ko je nekaj časa poskušal tako razporediti goste, je ugotovil, da tega ne zna. Zato je na pomoč poklical prijatelja matematika in mu razložil svojo težavo. Matematik je ugotovil, da takega sedežnega reda ni mogoče ustvariti. Če pa bi katerikoli izmed marsovcev manjkal, bi bilo to mogoče. Na najinem projektu sva se na matematičen način ukvarjala z vprašanjem, najmanj koliko marsovcev ima lahko ta klub in kateri izmed njih morajo biti prijatelji. Rešitev sva našla s pomočjo grafov, zato moramo najprej ponoviti nekaj osnov teorije grafov.

2 Osnove teorije grafov

Graf G je trojica, ki sestoji iz množice vozlišč $V(G)$, množice povezav $E(G)$ in relacije, ki vsaki povezavi priredi dve vozlišči, ki jih imenujemo krajišči te povezave. V nadaljevanju bomo obravnavali le enostavne grafe, to so grafi brez zank in vzporednih povezav. *Incidenčne povezave* vozlišča $v \in V(G)$ so vse povezave, ki imajo za eno od krajišč vozlišče v. Če med poljubnima vozliščema grafa najdemo pot, je graf *povezan*.

Množico paroma nepovezanih vozlišč imenujemo *neodvisna množica*. Če lahko graf zapišemo kot unijo dveh neodvisnih množic, pravimo, da je *dvodelen*. Število vozlišč v grafu imenujemo red grafa. Velikost grafa pa je število povezav v njem.

Stopnja vozlišča $v \in V(G)$ je število njegovih sosedov. Označimo jo z $d(v)$. Najmanjšo stopnjo vozlišča v grafu G označimo z $\delta(G)$, največjo pa z $\Delta(G)$. Graf je *n-regularen*, če je stopnja vseh vozlišč v grafu enaka n.

Podgraf grafa G je graf H, da je $V(H)$ podmnožica $V(G)$ in $E(H)$ podmnožica $E(G)$. *Točkovno izbrisan podgraf* grafa G je graf G brez nekega vozlišča $v \in V(G)$ in brez vseh njegovih incidenčnih povezav. Označimo ga z $G - v$. Pogosto se ukvarjamo s podgrafom izomorfnim ciklu reda 3, zato ga na kratko imenujemo trikotnik. Podrobnosti lahko bralec najde v [2].

Projekt je tesno povezan tudi z naslednjima družinama grafov.

Definicija 1. *Graf G je* hamiltonov *natanko tedaj, ko vsebuje hamiltonov cikel, to je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa G.*

Graf G je hipohamiltonov*, če ni hamiltonov in če za vsak $v \in V(G)$ velja, da je $G - v$ hamiltonov.*

Naš osnovni vir za obravnavo hipohamiltonovih grafov je [1, poglavje 7].

Spomninmo se še osnovne leme teorije grafov in njene posledice, saj bomo oboje potrebovali v nadaljevanju.

Lema 1 (lema o rokovanju)**.** *Vsota stopenj vseh vozlišč v grafu je enaka dvakratniku števila vseh povezav.*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Posledica 1. *Graf lihega reda, ki bi bil k-regularen za liho število k, ne obstaja.*

3 Matematična formulacija problema

Problem z marsovskim klubom lahko formuliramo z grafi. Člane kluba lahko predstavimo z vozlišči, prijateljstva pa s povezavami med njimi. Torej iščemo graf, ki ne bo hamiltonov, če pa mu odvzamemo katerokoli izmed vozlišč in incidenčne povezave, pa bo postal hamiltonov. To ustreza definiciji hipohamiltonovega grafa. Da se izognemo izrojenim primerom, se ukvarjamo le z grafi na treh ali več vozliščih, saj na dveh ali manj vozliščih ne moremo imeti cikla. Za rešitev gornje naloge moramo torej najti najmanjši hipohamiltonov graf.

4 Osnovne lastnosti hipohamiltonovih grafov

Iz definicije hipohamiltonovega grafa je jasno, da mora biti povezan. Poleg tega opazimo še naslednjo lastnost.

Trditev 1. *Hipohamiltonov graf ne vsebuje trikotnikov.*

Dokaz. Naj graf G vsebuje trikotnik $u, v, w \in V(G)$. Graf $G - v$ je hamiltonov in cikel v njem lahko preko povezav $\{u, v\}$ in $\{v, w\}$ podaljšamo do hamiltonovega cikla $V(G)$, kar pripelje v protislovje. $\square$

Nato poiščemo omejitve stopenj vozlišč v hipohamiltonovem grafu

Lema 2 (Prva lema o stopnjah)**.** *Naj bo G hipohamiltonov graf. Potem je $\delta(G) \geq 3$.*

Dokaz. Naj bo $v \in V(G)$ poljubno vozlišče. Ker je G povezan, obstaja tak $u \in V(G)$, da je v povezan z u. Ker je $G - u$ hamiltonov graf, ima v še vsaj dva soseda, ki ga povezujeta v cikel. Torej ima v skupaj vsaj 3 sosede. $\square$

Lema 3 (Druga lema o stopnjah)**.** *Naj bo G hipohamiltonov graf. Potem je $\Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)|-1}{2} \right\rfloor$[‡].*

Dokaz. Naj bo G hipohamiltonov graf in $v \in V(G)$. Potem ima $G - v$ hamiltonov cikel. Za vsaki dve sosednji vozlišči na ciklu vsaj eno od njiju ne sme biti sosedeno vozlišču v, zaradi trditve 1. Če bi potem v imel več kot $\left\lfloor \frac{|V(G)|-1}{2} \right\rfloor$ povezav bi po Dirichletovem principu morali obstajati dve sosednji vozlišči, ki bi bili hkrati sosednji tudi z v, kar privede do protislovja. $\square$

Opazimo, da je dvodelen graf lahko hamiltonov samo če sta obe neodvisni množici enako močni, saj mora hamiltonov cikel obiskati vsa vozlišča v grafu natanko enkrat in ob tem iz ene množice v drugo preiti sodokrat. S pomočjo tega izpeljemo naslednjo trditev.

Trditev 2. *Če je graf dvodelen, potem ne more biti hipohamiltonov.*

Dokaz. Naj bo G dvodelen graf, F in H pa njegovi neodvisni množici. Če si ogledamo $G - v$, kjer je $v \in F$, je graf hamiltonov, zato je $|F| + 1 = |H|$. Podobno iz hamiltonskosti grafa $G - u$, kjer je $u \in H$, sledi $|F| = |H| + 1$. To dvoje vodi do protislovja. $\square$

[‡] Spodnji celi del števila $x \in \mathbb{R}$ je največje celo število manjše ali enako x. Označimo ga z $\lfloor x \rfloor$.

5 Iskanje najmanjšega hipohamiltonovega grafa

Trditev 3. *Naj bo G hipohamiltonov graf. Potem je $|V(G)| \geq 7$.*

Dokaz. Velja $\delta(G) \leq \Delta(G)$. Po lemah o stopnjah mora torej veljati, da je

$$3 \leq \left\lfloor \frac{V(G)-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{V(G)-1}{2}.$$

S preoblikovanjem neenačbe nato dobimo $|V(G)| \geq 7$. $\square$

Trditev 4. *Hipohamiltonov graf reda sedem ne obstaja.*

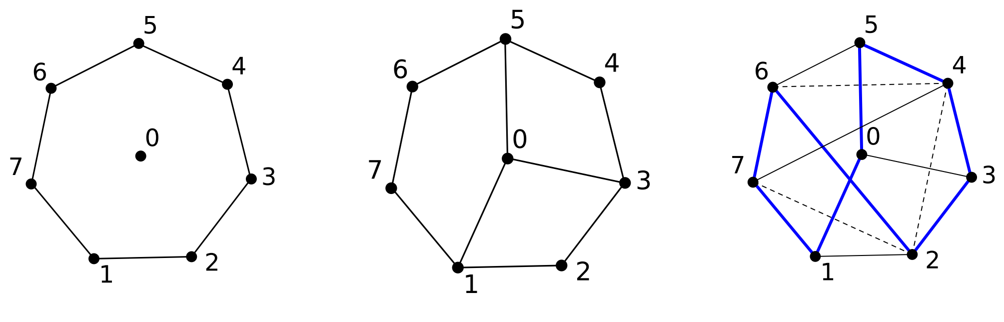
Dokaz. Po lemah o stopnjah je $\delta(G) = \Delta(G) = 3$, Torej je graf 3-regularen. Posledica leme o rokovanju je, da n-regularen graf z lihim n in lihim številom vozlišč ne more obstajati. $\square$

Trditev 5. *Hipohamiltonov graf z osmimi vozlišči ne obstaja.*

Dokaz. Po lemah o stopnjah velja

$$3 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{V(G)-1}{2} \right\rfloor = 3,$$

torej je graf 3-regularen. Če naj obstaja hipohamiltonov graf z osmimi vozlišči, mora sedem njegovih vozlišč tvoriti hamiltonov cikel, tako kot na sliki 1. Označena so s številkami 1 do 7, preostalo vozlišče pa z 0. To preostalo



Slika 1: Skice za $|V(G)| = 8$.

vozlišče mora biti povezano s tremi izmed teh vozlišč, ki ne smejo biti sosedna. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so to vozlišča 1, 3 in

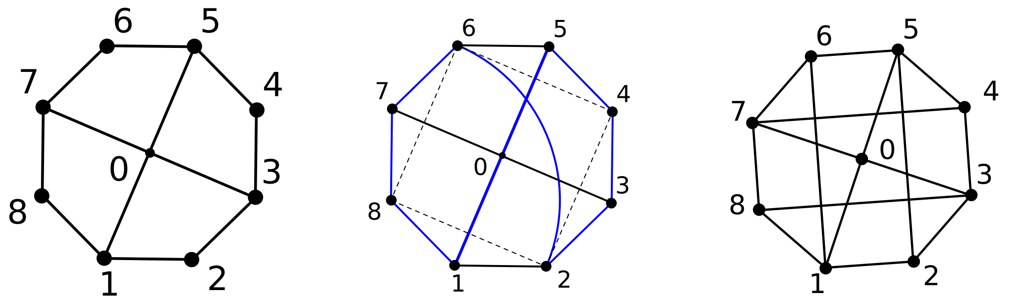
5. Vsa ostala vozlišča pa morajo biti povezana med sabo tako, da je graf 3-regularen. Zaradi trditve o trikotnikih in omejitve stopenj, je lahko vozlišče 2 povezano le z vozliščem 6, vozlišče 4 pa z vozliščem 7. Tak graf je že sem po sebi hamiltonov, kot vidimo na skrajno desni sliki 1. Ker to privede v protislovje, hipohamiltonov z osmimi vozlišči ne more obstajati. □

Trditev 6. *Hipohamiltonov graf na devetih vozliščih ne obstaja.*

Dokaz. Po lemah o stopnjah velja

$$3 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{V(G)-1}{2} \right\rfloor = 4.$$

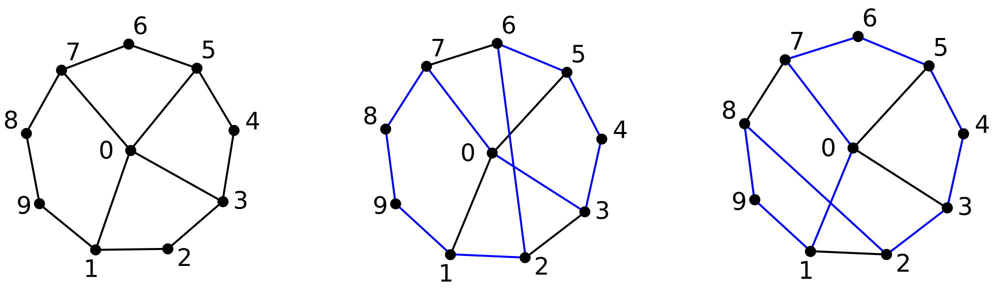
Graf reda devet po lemi o rokovanju ne more biti 3-regularen, to pomeni, da obstaja vsaj eno vozlišče stopnje štiri. Ker mora biti graf hipohamiltonov, mora ostalih osem vozlišč tvoriti hamiltonov cikel. Vozlišča v ciklu označimo



Slika 2: Skice za $|V(G)| = 9$.

z številkami od 1 do 8, preostalo vozlišče pa z 0. Vozlišče 0 je povezano s štirimi nesosednjimi vozlišči tega cikla. Zaradi trditve 1 je lahko vozlišče 2 povezano samo s 5, 6 ali 7, pri čemer lahko brez škode za splošnost obravnavamo samo povezavi s 5 in 6, ker sta povezavi s 5 in 7 simetrični. Če je vozlišče 2 povezano z vozliščem 6, potem je graf hamiltonov (kot je razvidno s srednje slike 2) in ne more biti hipohamiltonov. Iz istega razloga ne moreta biti povezani vozlišči 4 in 8. Če je vozlišče 2 povezano z vozliščem 5, potem lahko ostala vozlišča povežemo le na en način. Nastali graf je dvodelen, kar se ne sklada s trditvijo 2. □

Poglejmo, ali obstaja hipohamiltonov graf na desetih vozliščih. Leme o stopnjah določajo najnižjo stopnjo tri in najvišjo možno stopnjo štiri. Predpostavimo, da obstaja vozlišče s stopnjo štiri. Podobno, kot pri grafih z osem in devet vozlišči, mora tudi tu v točkovno-izbrisanem grafu obstajati hamiltonov cikel. Vozlišča v ciklu označimo s številkami od 1 do 9, preostalo vozlišče pa z 0. Brez škode za splošnost je vozlišče 0 povezano z vozlišči 1, 3, 5, 7. Zaradi trditve o trikotnikih vozlišča 2 ne moremo povezati z vozliščema 4 in 9. Prav tako ga ne moremo povezati z vozliščema 6 ali 8, ker bi v tem primeru graf postal hamiltonov, kot vidimo na srednji in desni sliki 3. Podobno velja tudi za vozlišče 4, če bi ga povezali z vozliščema 8 ali 9. Vozlišče 2 torej lahko povežemo le s 5 ali 7, vozlišče 6 lahko povežemo z vozliščema 1 ali 3, vozlišče 4 z 1 ali 7, vozlišči 8 in 9 pa bi lahko povezali z vozliščema 3 ali 5. S podobnim sklepanjem kot pri grafu reda devet pridemo do zaključka, da hipohamiltonov graf reda deset z $\Delta(G) = 4$ ne obstaja.



Slika 3: Skica za $|V(G)| = 10$ in $\Delta(G) = 4$.

To pomeni, da je edina možnost za hipohamiltonov graf na desetih vozliščih 3-regularen graf. Opazimo, da tem pogojem ustreza Petersenov graf (na sliki 4). Na roke lahko preverimo, da Petersenov graf je hipohamiltonov.

Resničnost te trditve pa preverimo tudi s programskim paketom Sage. Najprej smo napisali funkcijo, ki preveri, ali je dan graf hipohamiltonov. Funkcija najprej preveri, ali je dan graf hamiltonov. To stori z vgrajeno funkcijo `is_hamiltonian()`. Če ni hamiltonov, potem ustvari vse točkovno-izbrisane podgrafe in za vsakega preveri, ali je hamiltonov. Če najde kakšnega, ki ni hamiltonov, vrne logično vrednost `False`, torej pove da graf ni hipohamiltonov. Če ne najde nobenega, potem je graf hipohamiltonov in funkcija vrne logično vrednost `True`. Nato napišemo še program, ki s pomočjo funkcije dokaže, da je Petersenov graf edini hipohamiltonov graf reda 10 in hkrati tudi hipohamiltonov graf najnižjega reda. Koda pregleda vse povezane 3-regularne grafe reda 10, najde le enega in še za tega ugotovi, da je izomorfen Petersenovemu grafu.

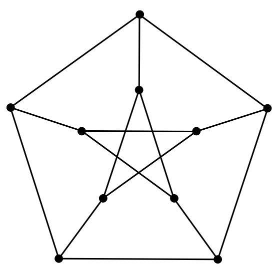
Oglejmo si omenjeno kodo.

```
def is_hypohamiltonian(G):
    if G.is_hamiltonian():
        return False
    for v in G:
        H = copy(G)
        H.delete_vertex(v)
        if not H.is_hamiltonian():
            return False
    return True

for G in graphs.nauty_geng("-cd3D3 10"):
    if is_hypohamiltonian(G):
        G.is_isomorphyc(graphs.PetersenGraph())
        show(G)
```

Iz zgornje izpeljave in uporabe algoritma, smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 1. *Hipohamiltonov graf najnižjega reda ima 10 vozlišč, je enoličen in izomorfen Petersenovemu grafu.*



Slika 4: Petersenov graf.

6 Zaključek

S tem smo rešili problem iz uvoda. Marsovski klub mora imeti najmanj deset članov, prijateljstva pa so podana tako kot v Petersenovem grafu.

Nato smo se vprašali, ali obstajajo tudi hipohamiltonovi grafi višjih redov. Ugotovili smo, da obstaja hipohamiltonov graf z 10, 13, 15, 16 vozlišči in tudi z n vozlišči za vse n večje ali enake 18. Torej obstaja neskončno hipohamiltonovih grafov. Vprašanja o obstoju hipohamiltonovega grafa na 11, 12, 14 in 17 vozliščih so bila dolgo odprta in so večinoma rešena le s pomočjo računalnika. Še dandanes je na tem področju mnogo nerešenih vprašanj.

Literatura

[1] D. A. Holton, J. Sheehan, *The Petersen Graph*, Cambridge University Press, 1993.

[2] M. Milanič, *Grafi, igre in še kaj*, osrednja delavnica na MaRS-u 2016, [ogled 18. 8. 2016], dostopno na `http://mars.dmfa.si/delavnice/`.