Apolonijev problem

Petra Podlogar, Tamara Pogačar, Ana Štuhec
Mentorica: Tatiana Elisabet Sušnik

Matematično raziskovalno srečanje
21. avgust 2016

Povzetek

Za dane tri krožnice smo želeli konstruirati še eno, ki bi se dotikala vseh treh hkrati. Za rešitev tega problema smo se spoznali z invertiranjem čez krožnico, zelo priročen pa je bil program GeoGebra, v katerem smo za boljšo predstavitev problematike rešitev tudi konstruirali.

1 Uvod

Marsovski vesoljski ladji se je na vzhodni medgalaktični obvoznici pokvarila navigacijska naprava in strmoglavila je neznano kam v Bermudski trikotnik. Iznajdljivi Marsovci so na hipernetu uspeli poiskati zemljevid območja in izbrskati, da se na Bermudskih otokih, Portoriku in obali Floride nahajajo trije svetilniki, ki sinhrono oddajajo signal. Kako se bodo opremljeni z zemljevidom, podatkih o časovnih razlikah prispelega signala in matematičnim znanjem rešili iz zagate?

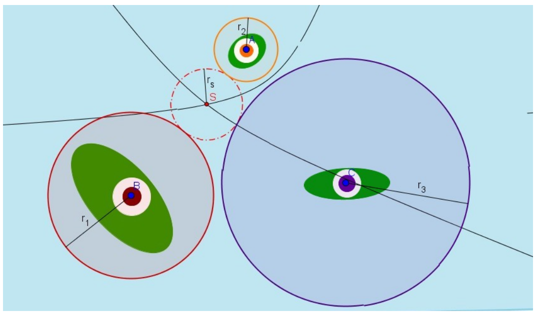
Strmoglavljenci so se iskanja položaja lotili z geometrijo. Na zemljevidu so želeli narisati hiperbole z gorišči na mestu svetilnikov in poiskati presečišča hiperbol, vendar kaj več od šestila in geotrikotnika med razbitinami niso našli. Newton jim je prišepnil, da se je z ekvivalentnim geometrijskim problemom ukvarjal Apolonij. Seveda smo jim tudi zemeljski MaRSovci priskočili na pomoč.

2 Apolonijeva krožnica

Apolonij iz Perge je v 3. stoletju pr. n. št. formuliral in rešil sledeči problem:

Problem 1. *Načrtaj vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane krožnice v ravnini.*

Kako sta Apolonijev problem in težave Marsovcev sploh povezana? Recimo, da je razlika signalov med svetilnikom A in svetilnikom B enaka x in razlika signalov med svetilnikom A in svetilnikom C enaka y. Ladja S je od točke A oddaljena za $r_s + r_2$, od točke B za $r_s + r_1$ in od točke C za $r_s + r_3$ (Slika 1). Torej je razlika signalov med svetilnikoma A in B enaka $r_1 - r_2 = x$ in razlika med svetilnikoma A in C enaka $r_3 - r_2 = y$. Izberemo poljubni r_2 in na zemljevidu narišemo krožnice s središči v svetlnikih v razmerju, ki ustreza razlikam signalov. Če želimo, da ostanejo razlike v oddaljenosti od posameznega svetilnika enake, moramo načrtati krožnico, ki bo tangentna na krožnice s središči v svetilnikih. Središče tako načrtane krožnice bo sovpadalo z našim nahajališčem in s presečiščem hiperbol.



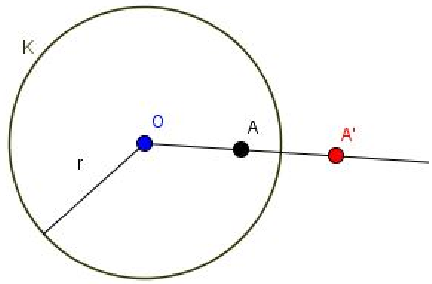
Slika 1: Slika prikazuje oba načina iskanja lege Marsovcev. Ti se nahajajo na presečišču dveh hiperbol, ki je hkrati središče krožnice, ki je rešitev Apolonijevega problema.

V zgodovini so se matematiki (in obupani brodolomci) naloge lotili različno; med drugim s hiperbolami, nekateri pa algebraično. Mi smo se konstrukcije krožnice lotili z inverzijo. Poglejmo si, kaj je inverzija.

Definicija 1. *Inverzna točka točke A glede na krožnico K s središčem O in polmerom r je točka A', ki leži na poltraku AO tako, da velja*

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2$$

Na sliki 2 vidimo inverz točke A glede na krožnico K. Posebnost je središče O, čigar sliko nam definicija ne poda. Po dogovoru se slika v neskončnost (in točka v neskončnosti v središče O).



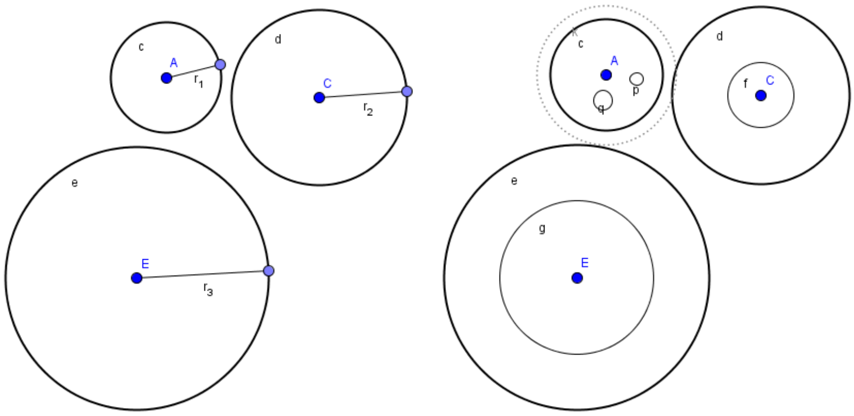
Slika 2: Inverzna točka točke A.

Navedimo nekaj lastnosti inverzije. Inverzija ohranja kote in slika iz notranjosti krožnice K v njeno zunanjost (in iz zunanjosti v njeno notranjost). Preslikava slika

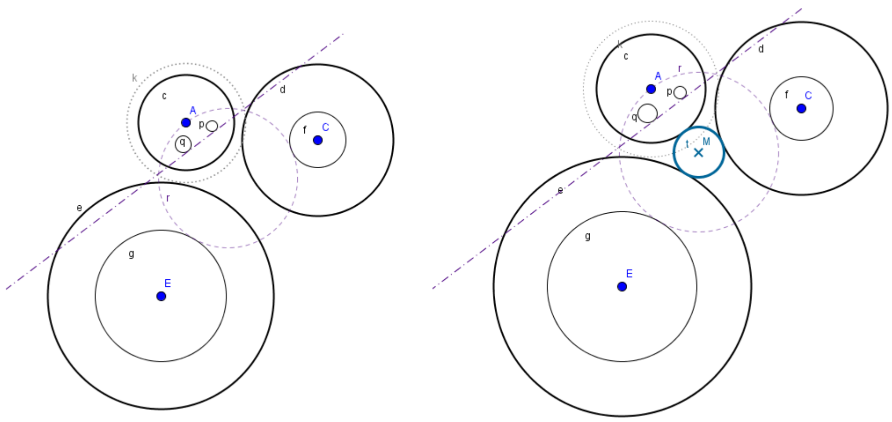
- točko, ki se nahaja na krožnici K, samo vase;
- premico, ki ne poteka čez središče O, v krožnico, ki poteka čez središče O;
- premico, ki poteka čez središče O, samo vase;
- krožnico, ki se dotika središča O, v premico;
- krožnico, ki se ne dotika središča O, pa v krožnico.

Opremljeni z novim znanjem se lahko lotimo reševanja našega problema (in brodolomcev).

Rešitev problema 1. Posamezno krožnico zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Preko poljubne krožnice K s središčem A, ki sovpada s središčem najmanjše krožnice, invertiramo drugi dve krožnici g in f. Na invertirani krožnici q in p narišemo skupno tangento, ki se krožnic q in p dotika na zunanji strani glede na središče krožnice K (Slika 3). Tangento invertiramo preko krožnice K tako, da narišemo krožnico, ki poteka skozi A in presečišči tangente s krožnico K. Dobljeno krožnico nato zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Načrtana krožnica t je rešitev problema (Slika 4). $\square$



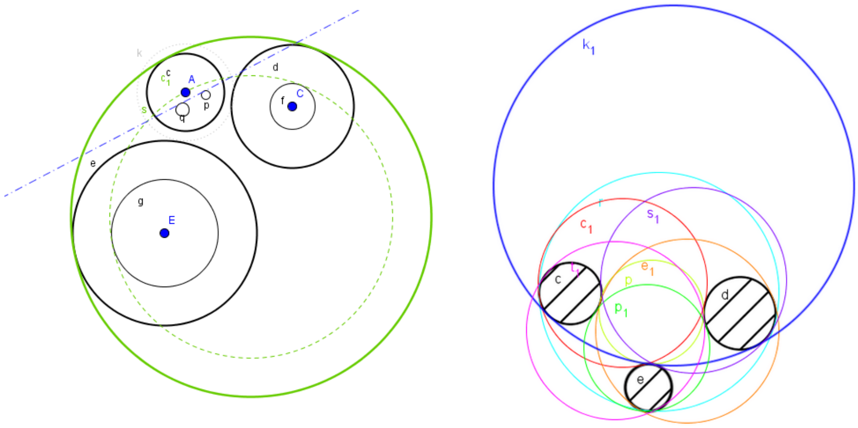
Slika 3: Prvotne krožnice in njihovi inverzi glede na krožnico K (črtkana krožnica).



Slika 4: Inverzija tangente na invertiranih krožnicah in končna rešitev.

Marsovci so tako sporočili, kam jih lahko MaRSovci pridemo iskat. Po uspešni reševalni akciji smo se skupaj usedli za mizo in vneto premlevali, če je za dani problem na voljo več rešitev. Ugotovili smo naslednje, da ima problem osem rešitev.

Preostale rešitve problema 1. Na invertirani krožnici g in f lahko narišemo skupno tangento, ki se krožnic q in p dotika na *notranji* strani glede na središče krožnice K. Tangento invertiramo preko krožnice K in dobljeno krožnico povečamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Tako dobljena krožnica je druga rešitev Apolonijevega problema, ki prvotne krožnice zaobjame v svoji notranjosti. Možnih je nadaljnih šest rešitev, ki se prvotnih krožnic dotikajo izmenično na zunanji ali notranji strani. Konstrukcije teh rešitev se razlikujejo v tem, katero prvotno krožnico pomanjšamo ali povečamo in kateri dve od štirih tangent invertiranih krožnic izberemo (Slika 5). □



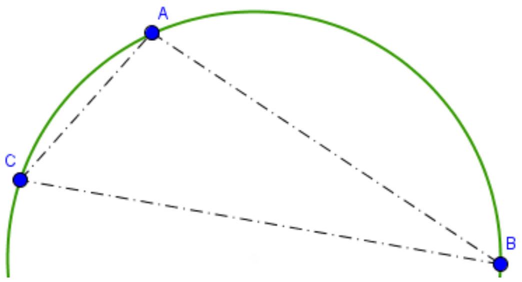
Slika 5: Možne rešitve Apolonijevega problema za tri krožnice.

3 Posplošitev Apolonijevega problema

V splošnem je Apolonijev problem zastavljen tako, da je potrebno poiskati vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane objekte v ravnini. Ti objekti so lahko točka, premica ali krožnica. Takih kombinacij je 10; pogledali smo si že primer treh krožnic, ostale pa bomo opisali v nadaljevanju.

3.1 Tri točke

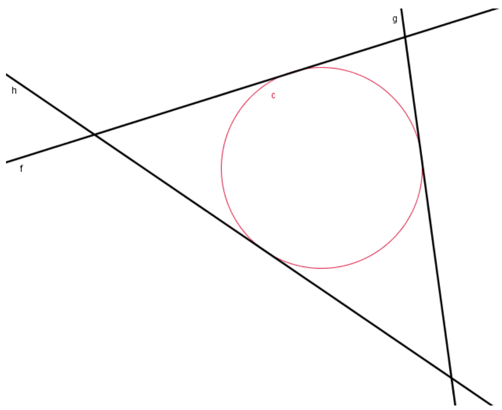
Tri nekolinearne točke predstavljajo oglišča trikotnika. Krožnico, ki se bo dotikala vseh točk, lahko narišemo tako, da novonastalemu trikotniku očrtamo krožnico. Možna je le 1 rešitev (Slika 6).



Slika 6: Možne rešitve Apolonijevega problema za tri točke.

3.2 Tri premice

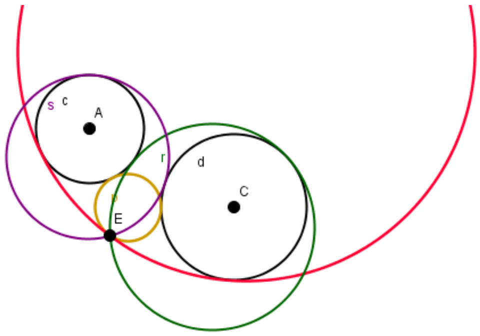
Presečišča premic označimo s točkami. Prvo rešitev dobimo tako, da nastalemu trikotniku včrtamo krožnico. Preostale tri rešitve so tri trikotniku pričrtane krožnice. Te ležijo na zunanjem delu tega trikotnika in sicer na treh različnih območjih, ki se medsebojno ne stikajo. Ta območja omejujejo po ena stranica trikotnika ter dva poltraka, ki sta odseka preostalih dveh premic z izhodiščema v krajiščih daljice. Središče krožnice, ki bo ena izmed naših rešitev dobimo tako, da narišemo simetralo notranjega kota trikotnika, katerega nasproti ležeča daljica se bo stikala s krožnico. Nato narišemo še simetrali zunanjih kotov pri krajiščih daljice. Presečišče simetral kotov je središče krožnice, ki se dotika premic. Trikotniku včrtana in tri pričrtane krožnice predstavljajo torej 4 možne rešitve (Slika 7).



Slika 7: Možne rešitve Apolonijevega problema za tri premice.

3.3 Dve krožnici in točka

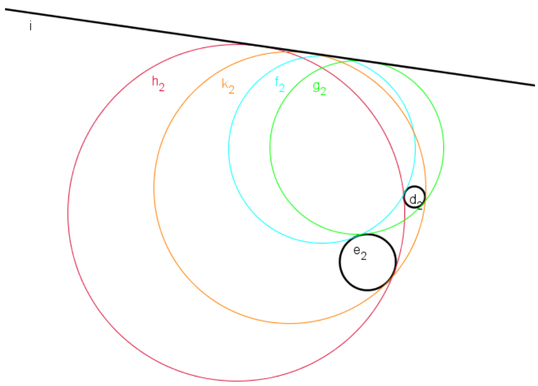
Za središče krožnice K izberemo dano točko. Preko krožnice K invertiramo dani krožnici. Nadaljevanje postopka smo že opisali v primeru treh krožnic. Tukaj uporabimo vse 4 tangente. Posledično so možne 4 rešitve (Slika 8).



Slika 8: Možne rešitve Apolonijevega problema za dve krožnici in točko.

3.4 Dve krožnici in premica

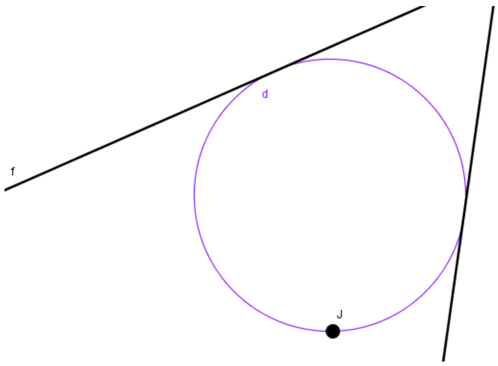
Načrtamo poljubno krožnico, katere središče ne leži na katerem od danih objektov. Čez to krožnico invertiramo začetne objekte. Tako dobimo tri krožnice, od katerih ena poteka skozi središče dodatne krožnice. S tem dobimo sistem treh krožnic. Poiščemo njihove rešitve ter jih nato invertiramo nazaj čez dodatno krožnico, s čimer dobimo 8 rešitev (Slika 9).



Slika 9: Možne rešitve Apolonijevega problema za dve krožnici in premico.

3.5 Dve premici in točka

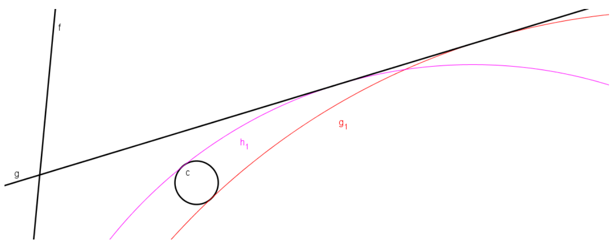
Narišemo simetralo kota med premicama. Narišemo poljubno krožnico, katere središče leži na simetrali in se dotika premic. S središčnim raztegom bomo to krožnico preslikali v krožnico skozi dano začetno točko. Nato narišemo poltrak skozi dano točko in presečišče premic. Točko, kjer poltrak seka narisano krožnico, povežemo s središčem. Nosilki dobljene daljice narišemo vzporednico. Presečišče vzporednice in simetrale kota je središče iskane množice. Ker poltrak seka krožnico v dveh točkah, sta možni 2 rešitvi (Slika 10).



Slika 10: Možne rešitve Apolonijevega problema za točko in dve premici.

3.6 Dve premici in krožnica

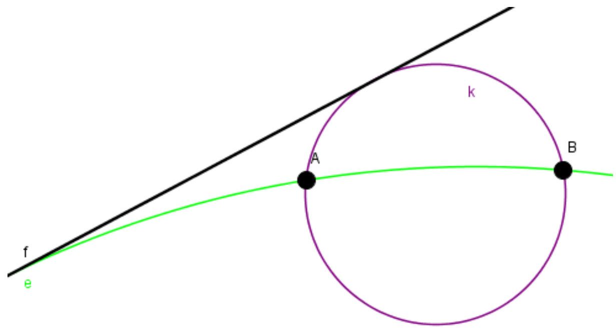
Podano krožnico pomanjšamo v točko in dani premici vzporedno premakno za polmer manjše krožnice. Rešitev nato poiščemo enako kot v primeru z dvema premicama in točko. Alternativni način reševanja je z invertiranjem premic preko podane krožnice K. V tem primeru se reševanje nadaljuje kot v problemu s tremi krožnicami. Možnih je 8 rešitev (Slika 11).



Slika 11: Možne rešitve Apolonijevega problema za krožnico in dve premici.

3.7 Dve točki in premica

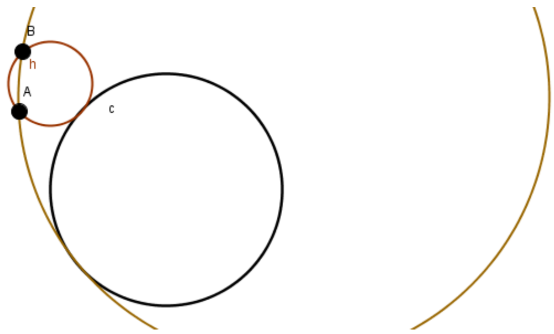
Narišemo poljubno veliko krožnico s središčem v eni izmed točk. Sedaj invertiramo prvotni točki in premico čez to krožnico. Nato narišemo tangenti na nastalo krožnico, ki gresta skozi točko, ki je nastala z inverzijo točke. Ti dve tangenti invertiramo nazaj čez dodano krožnico, s čimer dobimo dve krožnici, ki se dotikata prvotne premice ter gresta skozi prvotni točki. Skupaj sta torej možni 2 rešitvi (Slika 12).



Slika 12: Možne rešitve Apolonijevega problema za dve točki in premico.

3.8 Dve točki in krožnica

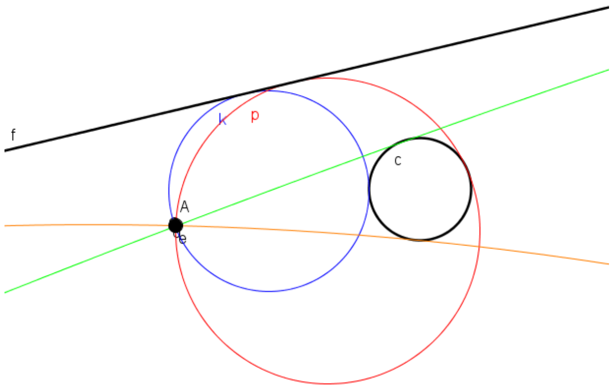
Eno izmed danih točk izberemo za središče krožnice in čez njo invertiramo drugo točko in krožnico. Pri tem nastaneta točka in krožnica. Narišemo tangenti na krožnico skozi točko. Tako dobimo 2 rešitvi (Slika 13).



Slika 13: Možne rešitve Apolonijevega problema za dve točki in krožnico.

3.9 Točka, premica in krožnica

Dano točko vzamemo za središče krožnice in čez njo invertiramo originalno krožnico in premico. Tako dobimo dve krožnici, na kateri narišemo skupne tangente. Tangente potem invertiramo nazaj čez krožnico. Dobimo 4 rešitve (Slika 14).



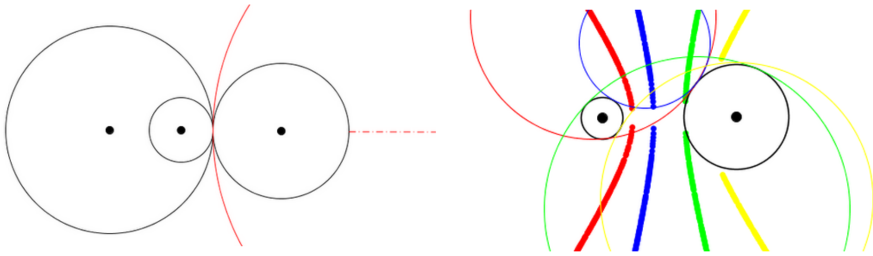
Slika 14: Možne rešitve Apolonijevega problema za točko, premico in krožnico.

3.10 Posebni primeri brez in z neskončno rešitvami

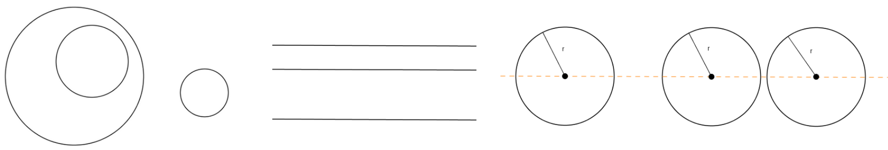
Število možnih rešitev smo že omenili, vendar je to odvisno od razporeditve objektov v ravnini. V nekaterih primerih je tako mogoče dobiti neskončno rešitev. Predstavimo jih nekaj:

1. Tri krožnice, ki sovpadajo. Izberemo lahko poljubno točko, skozi katero načrtamo krožnico, katere polmer naj bo razdalja od krožnice do točke. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev.
2. Tri poljubne krožnice, ki se stikajo v eni točki, pri čemer mora vsaj ena ležati znotraj druge. Za središče rešitve si izberemo poljubno točko. Rešitvena krožnica poteka skozi dotikališče krožnic. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev (Slika 15a).
3. Dve poljubni krožnici, ki sovpadata, ter ena, ki leži zunaj njiju in se ju ne dotika. Središči krožnic sta gorišči hiperbol, ki imata stalno razliko razdalj do gorišč enako vsoti oz. razliki polmerov danih krožnic. Tako dobimo 2 hiperboli, na katerih ležijo središča krožnic, ki so rešitve tega primera (Slika 15b).

Po drugi strani pa problem nima rešitve, kadar so središča enako velikih krožnic, ki se ne stikajo, kolinearna. Druga možnost, kjer rešitev ni, je, kadar imamo krožnico, v kateri leži vsaj še ena krožnica, ter se te krožnice ne stikajo. Brez rešitev je tudi primer s tremi vzporednicami. (Slika 16).



Slika 15: Neskončno rešitev, kjer je (a) poltrak množica vseh središč rešitev Apolonijevega problema; in (b) množica središč, ki ležijo na hiperbolah.



Slika 16: Primeri, kjer rešitev ni.

4 Zaključek

Kako konstruirati krožnico, ki se bo dotikala treh že podanih krožnic? To je postal tudi naš problem. Pot do uspeha je bila težka, polna učenja in novih spoznanj, a naposled nam je vendarle uspelo. Namignjeno nam je bilo, da bi bilo invertiranje v tovrstnem primeru precej priročno. Tako smo se lotili spoznavanja osnov inverzije čez krožnico in kaj kmalu je bil osnovni primer Apolonijevega problema (t.j. problem s tremi krožnicami) rešen. Zadovoljstvo ob razrešitvi problema je bilo tako veliko, da smo želeli raziskovati še naprej. Pojavilo se je vprašanje, kako bi s krožnico povezali objekte, če imamo na voljo krožnice, točke in premice, kombiniramo pa jih lahko po tri skupaj. Tedaj se je razmišljanje le še poglobilo. Ker nam je invertiranje priraslo k srcu, smo se odločili z njim malce poigrati. Vse primere smo poskušali prevesti na osnovnega (3 krožnice) in uspeh je bil zagotovljen. Pri nekaj primerih je bilo potrebnega malce več potrpljenja, a posplošen Apolonijev problem naposled le ni ostal nerešen. Preostalo nam je le še štetje dobljenih rešitev pri posameznem primeru in naše delo je bilo končano. Pri raziskovanju smo se zelo zabavali in verjamemo, da bi se tudi vi.

Literatura

[1] Wikipedia (2016). *Problem of Apollonius*. Dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius`, dne 17. 8. 2016.

[2] J. Cox, M. B. Partensky (2009). *Spatial Localization Problem and the Circle of Apollonius*. Dostopno na `https://arxiv.org/abs/physics/0701146`, dne 17. 8. 2016.

[3] M. Hladnik (2012). *Grška matematika po Evklidu*. Dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Arhimed(b).pdf`, dne 17. 8. 2016.