Problem stabilnih porok

Nika Marolt, Ivo Prelog, Ambrož Rodošek
Mentorica: Klara Drofenik

Povzetek

V našem projektu smo se ukvarjali s problemom stabilnih porok in ga rešili z Gale-Shapleyjevim algoritmom, ki nam vedno vrne stabilna prirejanja. Dokazali smo, da se algoritem zaključi v končnem številu korakov, ter da so njegova prirejanja res stabilna. Nato smo si ogledali še Hallov izrek, s katerim smo rešili podoben problem.

1 Uvod

Problem stabilnih porok se ukvarja s stabilnim razporejanjem žensk in moških v pare. Imamo enako veliki skupini moških in žensk. Vsaka ženska naredi seznam, v katerem razporedi moške po tem, kako rada bi se z njim poročila. Enako storijo moški za ženske. Vse moške in ženske poskušamo razporediti v pare tako, da bodo poroke stabilne.

Leta 1962 sta Lloyd Shapley in David Gale predstavila algoritem za rešitev problema stabilnih porok. David Gale je umrl leta 2008, Lloyd Shapley in Alvin E. Roth (ki je pri svojih projektih veliko uporabljal Gale-Shapleyjev algoritem) pa sta leta 2012 dobila Nobelovo nagrado na področju ekonomije za življenjsko delo, med drugim tudi za ta algoritem. Lloyd Stowell Shapley, starejši izmed dvojice, je ameriški matematik in ekonom, ki je veliko prispeval k znanju na področju matematične ekonomije. Alvin Elliot Roth, ameriški akademik, je veliko delal na področjih eksperimentalne ekonomije, oblikovanja trga in teorije iger. Pri oblikovanju newyorškega javnega šolskega sistema, bostonskega javnega šolskega sistema, New England Program for Kidney Exchange in preoblikovanju NMRP (sistem, ki razvršča študente medicine po bolnišnicah v ZDA), si je pomagal z Gale-Shapleyjevim algoritmom.

Definicija 1. *(Prirejanje)*

Prirejanje $\mathcal{M}$ *je takšna izbira parov moški-ženska, da nobena dva para iz* $\mathcal{M}$ *ne vsebujeta iste osebe.*

Prirejanje ***ni stabilno****, če obstajata taka moški* M_1 *in ženska* W_1*, za katera velja da:*

- M_1 *in* W_1 *nista prirejena drug drugemu in*
- W_1 *ima na svojem seznamu višje* M_1 *kot moškega, ki ji je trenutno prirejen in*
- M_1 *ima na svojem seznamu višje* W_1 *kot žensko, ki ji je trenutno prirejen (to pomeni, da bi se raje poročil z* W_1 *kot s svojo trenutno partnerico).*

Poglejmo si primer nestabilnega prirejanje v spodnji tabeli.

Zgled 1. *(Primer nestabilnega prirejanja)*

Ime	*1. izbira*	*2. izbira*
Andrej	*Cvetka*	*Doris*
Boris	*Doris*	*Cvetka*
Cvetka	*Andrej*	*Boris*
Doris	*Boris*	*Andrej*

Primer nestabilnega prirejanja sta para ***Andrej in Doris*** *ter* ***Boris in Cvetka****. Andrej je po tem prirejanju z Doris, ki pa je na njegovem seznamu za Cvetko. Cvetka pa je po istem prirejanju z Borisom, ki je na njenem seznamu za Andrejem. Iz tega sledi, da bi Cvetka in Andrej raje bila v paru drug z drugim, kot s sedanjima partnerjema. Zato je to prirejanje nestabilno.*

V tem članku bomo predstavili Gale-Shapleyjev algoritem, ki reši naš problem in dokazali, da nam algoritem zagotovi stabilna prirejanja.

2 Gale-Shapleyjev algoritem

Na začetku si izberemo eno skupino (v našem primeru bodo to moški), ki bo zaprošala drugo skupino (v našem primeru ženske).

V **prvi fazi** vsak moški zaprosi prvo žensko na svojem seznamu, torej tisto s katero bi se najraje poročil.

V **drugi fazi** vse zaprošene ženske sprejmejo ponudbo tistega moškega, ki je na njihovem seznamu najvišje.

Nato vsi zavrnjeni moški zaprosijo naslednjo žensko na svojem seznamu, ženske pa ponudbo sprejmejo ali zavrnejo glede na seznam. Tudi že zaročene ženske zamenjajo zaročenca, če bi se z novim raje poročile.

Ta **postopek se ponavlja**, dokler niso vsi moški in ženske zaročeni. Poglejmo si primer delovanja algoritma s pomočjo spodnje tabele.

Zgled 2.

Ime	*1. izbira*	*2. izbira*	*3. izbira*	*4. izbira*
Ana	*Luka*	*Janez*	*Klemen*	*Matija*
Barbara	*Janez*	*Matija*	*Luka*	*Klemen*
Cilka	*Klemen*	*Matija*	*Luka*	*Janez*
Doroteja	*Matija*	*Klemen*	*Janez*	*Luka*
Janez	*Ana*	*Doroteja*	*Cilka*	*Barbara*
Klemen	*Ana*	*Barbara*	*Cilka*	*Doroteja*
Luka	*Barbara*	*Doroteja*	*Cilka*	*Ana*
Matija	*Cilka*	*Ana*	*Barbara*	*Doroteja*

V prvem koraku algoritma vsi moški zaprosijo ženske, s katerimi bi se najraje poročili. Janez zaprosi Ano, Klemen tudi zaprosi Ano, Luka zaprosi Barbaro, Matija pa Cilko.

Cilka in Barbara sta prejeli vsaka po eno ponudbo, zato jo sprejmeta. Ano pa sta zaprosila tako Janez kot Klemen. Ker je Janez na njenem seznamu višje kot Klemen, Klemna zavrne, Janezovo ponudbo pa sprejme.

Brez zaročenke je ostal le Klemen, zato samo on zaprosi naslednjo na svoje seznamu - Barbaro. Ker pa je Klemen na seznamu za njenim trenutnim zaročencem Janezom, ga zavrne.

Klemen zato zaprosi naslednjo - Cilko. Ta pa ga ima raje kot trenutnega zaročenca Matijo, zato ponudbo sprejme in s tem zavrne Matijo.

Matija je sedaj brez partnerice, zato zaprosi Ano, ki pa ga zavrne, saj ima Janeza raje.

Zato Matija zaprosi Barbaro, ki zavrne Luka, saj je Matija na njenem seznamu višje.

Luka zato zaprosi naslednjo - Dorotejo. Ker ta do sedaj še ni prejela nobene ponudbe, mora Lukovo sprejeti.

Tako so vsi moški in vse ženske poročeni.

2.1 Kdaj in zakaj se algoritem ustavi?

Algoritem se ustavi, ko imajo vse ženske svojega zaročenca.
Če želimo dokazati da naš algoritem res vrne stabilno prirejanje, se mora ustaviti po končnem številu korakov.

Vprašajmo se, zakaj se naš algoritem ustavi.
V vsakem krogu (razen v zadnjem) je zavrnjen vsaj en moški, se pravi, da je le-ta lahko zavrnjen največ $(n-1)$-krat (ker vedno vsaj ena ženska ni zaročena in bo ponudbo sprejela), pri čemer je n število oseb v vsaki izmed skupin.

Ker je n moških, je največje število krogov $n(n-1)$.
Ob koncu algoritma ni možno, da bi katera ženska ostala brez moškega, saj jo je moral vsaj eden zaprositi. Iz tega je razvidno, da se algoritem ustavi v končnem številu krogov.

2.2 Zakaj algoritem vedno najde stabilne poroke?

Prikazali bomo, da algoritem vedno najde stabilne poroke.

Recimo, da imamo ženski A in B ter moška C in D, pri čemer sta poročena A in D ter B in C.

Vemo, da ima C raje A kot svojo zaročenko B. Pokazati moramo, da ima A raje D kot C, saj bo le tako prirejanje parov stabilno. Moški C ima raje A kot B, torej to pomeni, da je C že zaprosil A pred svojo zaročenko B, saj je A na njegovem seznamu višje. Ker pa C ni poročen z A, ga je ta morala prej zavrniti, kar pomeni, da ima A raje svojega zaročenca kot C.

Torej algoritem res vedno vrne stabilno prirejanje.

2.3 Dokaz, da tisti, ki zaprošajo dobijo najboljše možne partnerje.

Dokazali bomo, da tisti, ki zaprošajo (v našem primeru so to moški) dobijo najboljše možne partnerje.

Definicija 2. *(Možni partner)*
A je možni partner za B, če obstaja stabilno prirejanje v katerem sta A in B poročena.

Recimo, da moški L ni dobil svoje najboljše možne partnerice A. Glede na to, da jo je moral zaprositi, ga je ta morala zavrniti.

Denimo, da je bil moški L prvi zavrnjen od svoje možne partnerice A. To pomeni, da jo je zaprosil nekdo, ki je višje na njenem seznamu kot L, ki ga je zavrnila. To naj bo moški K.

Z $\mathcal{M}$ označimo stabilno prirejanje, kjer sta A in L poročena. Drugi par v tem prirejanju $\mathcal{M}$ pa naj tvorita B in K.

Oseba A ima raje K kot L in tudi K ima raje A kot B. Torej bi A in K v prirejanju $\mathcal{M}$ zapustila svoje partnerje, kar pomeni, da prirejanje $\mathcal{M}$ ni stabilno.

Prišli smo do protislovja in iz tega sledi, da moški po našem prirejanju dobijo najboljšo možno partnerico.

2.4 Dokaz, da tisti, ki ne zaprošajo dobijo najslabše možne partnerje.

V našem primeru ženske ne zaprošajo.

Denimo, da sta po našem G-S algoritmu poročena A in D, vendar D ni najslabši možni partner za A.

To pomeni, da obstaja drugo stabilno prirejanje $\mathcal{M}$, pri katerem sta A in C v paru, vendar ima A raje D kot C, D pa je v paru z B, ki jo ima manj rad kot A.

Osebi A in D se imata raje drug drugega kot svoja trenutna partnerja, kar pomeni da $\mathcal{M}$ ni stabilno prirejanje, s čimer pridemo do protislovja.

Ženske torej dobijo najslabše možne partnerje.

3 Hallov izrek

Obstaja več različic problema stabilnih porok. Ena različica tega problema, ki smo ga že obravnavali je, da vsak vsak moški in vsaka ženska razvrstita vse osebe nasprotnega spola glede na to s kom bi bila raje poročena. Pri različici, ki jo bomo spoznali v tem poglavju, pa vsaka ženska in vsak moški napišeta seznam sprejemlivih partnerjev. Pri tem ni nujno, da seznam zajema vse osebe nasprotnega spola.

Definicija 3. ***Potencialna partnerja*** *sta tista, ki imata drug drugega na seznamu sprejemljivih partnerjev.*

Ta posplošen primer se da prikazati tudi z grafi. Ta različica je posplošena zaradi tega, ker ni več rangiranja med osebami.

Definicija 4. *(Graf)*
V teoriji grafov je ***graf*** $G = (V, E)$ *par množice vozlišč* V *in množice povezav* E*. Povezave so podmnožica množice dvoelementarnih množic od* V*.*

Definicija 5. *(Prirejanje v grafih)*
Naj bo $G = (V, E)$ *graf. Množica* $\mathcal{M}$ *povezav grafa* G *je* ***prirejanje****, če nobeni dve povezavi iz* $\mathcal{M}$ *nimata skupnega krajišča.*

Definicija 6. *Vozlišči sta* ***sosednji****, če med njima obstaja povezava.* ***Soseščina*** *vozlišča* v*, ki jo označimo z* $N(v)$*, je množica vseh sosednjih vozlišč vozlišča* v*.*

Pri grafih se srečamo s pojmoma kot sta sosednje vozlišče in soseščina. V našem primeru vozlišče predstavlja eno osebo, povezave med njimi pa nastanejo, ko imata obe osebi (vozlišči) drug drugega na seznamu sprejemljivih partnerjev.

Soseščina osebe A so vse osebe nasprotnega spola, ki so za A sprejemljive, A pa je sprejemljiv za njih.

Moški in ženske predstavljajo dve disjunktni množici, s povezavami med njimi pa nastane dvodelni graf.

Definicija 7. *Graf* $G = (V, E)$ *je* ***dvodelen****, če lahko množico vozlišč* V *razdelimo na dve disjunktni podmnožici* A *in* B*, z* $A \cup B = V$*, za kateri velja, da je eno krajišče vsake povezave iz množice* E *v* A*, drugo krajišče pa v* B*.*

Ker ne dovoljujemo povezav znotraj posamezne podmnožice (torej ne dovoljujemo porok med osebki istega spola), je graf res dvodelen.

Izrek 1. ***Hallov izrek***
Če je G *dvodelen graf z biparticijo* A *in* B*, potem v grafu* G*, ki pokrije (vsebuje vse elemente množice)* A*, obstaja prirejanje natanko takrat, ko velja, da je* $|N(S)| \geq |S|$*za vsak* $S \subseteq A$*.*

Biparticija A in B pri nas predstavlja razdelitev na moške in ženske (recimo, da so moški podmnožica A in ženske podmnožica B).
Izraz $|N(S)| \geq |S|$ pomeni, da mora vsaka skupina osebkov iz ene podmnožice imeti vsaj toliko sosedov (potencialnih partnerjev), kolikor je njih samih, da bo sploh obstajalo prirejanje.

Literatura