Projektivna ravnina

Julija Bučar, Ana Knap
Mentorica: Tatiana Elisabet Sušnik

Povzetek

Spoznale smo svet projektivne geometrije, ki velja za temelj prostorskega upodabljanja. Pogledale smo si, kako je ta geometrija definirana z aksiomi, nekaj njenih modelov in lastnost dualnosti.

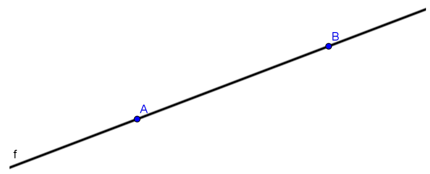
1 Uvod

Že v renesansi so se umetniki zavzemali za to, da bi karseda realistično upodobili prostor. Prvi so se začeli poglabljati v razumevanje zakonov perspektivnega risanja in slikanja. Ugotovili so, da se sicer vzporedne premice, če jih pogledamo s pravega zornega kota, sekajo v točki v neskončnosti. Tak način risanja je postal temelj prostorskega upodabljanja. Najbolj znani umetniki, ki so ustvarjali dela po tem principu, so bili Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci, Raffaello Santi in še mnogi drugi. To je bil povod, da so tudi matematiki začeli raziskovati področje tako imenovane projektivne geometrije. V članku se bomo omejili na projektivno ravnino.

2 Projektivna ravnina

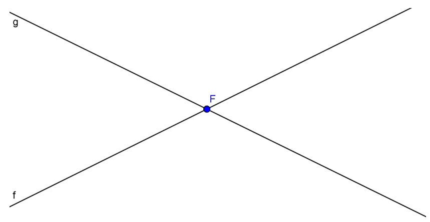
Projektivna ravnina je sestavljena iz točk, premic in relacij. Definirajo jo sledeči aksiomi:

Aksiom 1. *Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica.*



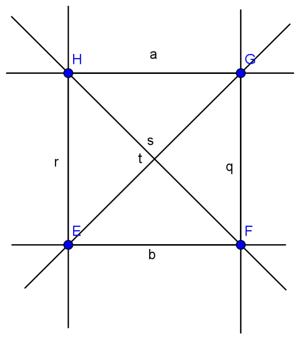
Slika 1: Grafični prikaz 1. aksioma.

Aksiom 2. *Dve poljubni različni premici se sekata v natanko eni točki.*



Slika 2: Grafični prikaz 2. aksioma.

Aksiom 3. *Obstajajo štiri točke, da je vsaka trojica teh točk nekolinearna.*



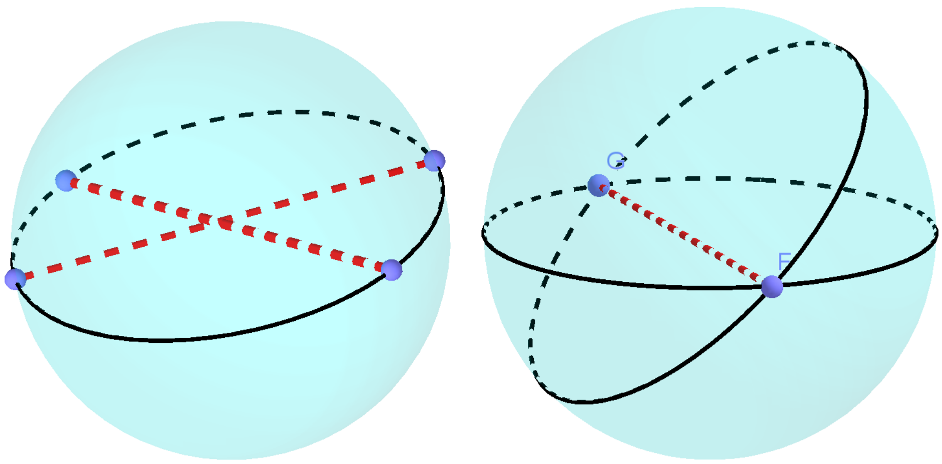
Slika 3: Grafični prikaz 3. aksioma.

3 Modeli projektivne ravnine

Poglejmo si dva načina, kako si lahko predstavljamo projektivno ravnino.

3.1 Projektivna sfera

Projektivno ravnino lahko predstavimo kot sfero. Na njej premice predstavimo z glavnimi krogelnimi krogi (krožnice s središčem v središču sfere), točke pa s pari nasproti si ležečih točk. V tem modelu projektivne ravnine lahko hitro opazimo, da dve točki povezuje natanko ena premica in da se vsaki dve premici sekata v natanko eni točki.



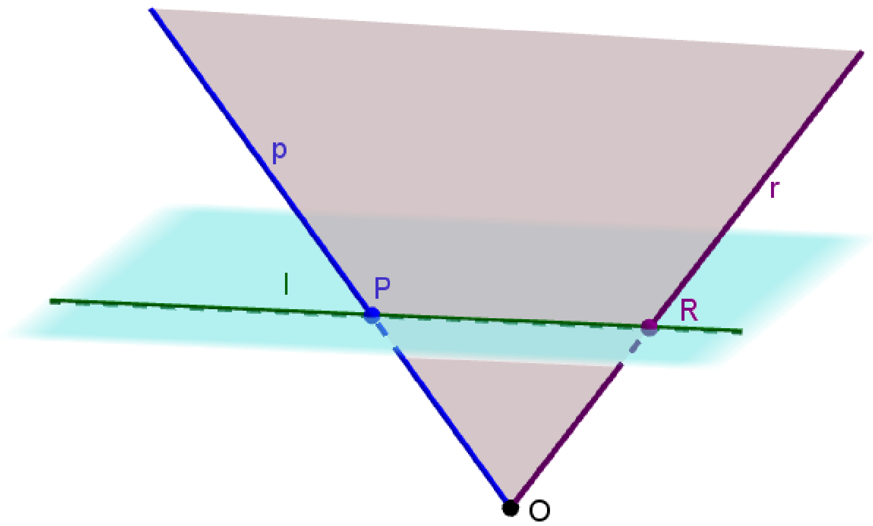
Slika 4: Prikaz prvega in drugega aksioma projektivne ravnine na projektivni sferi.

3.2 Razširjena Evklidska ravnina

Poglejmo si model projektivne ravnine v $\mathbb{R}^3$. Točke našega modela so predstavljene z evklidskimi premicami, premice pa z evklidskimi ravninami.
Predstavljajmo si, da realno ravnino $\mathbb{R}^2$ postavimo na nivo $z = 1$. Vsaka točka P na ravnini $z = 1$ je predstavljena z evklidsko premico, ki gre skozi koordinatno izhodišče in točko P. Premica l na ravnini $z = 1$ je predstavljena z evklidsko ravnino, ki vsebuje l in koordinatno izhodišče. Vsaki dve evklidski ravnini v $\mathbb{R}^3$, ki vsebujeta koordinatno izhodišče, se sekata v eni evklidski premici, torej se vsaki dve premici (predstavljeni z ravninama) v tem modelu res sekata v eni točki. Evklidske premice skozi koordinatno izhodišče, ki ne sekajo ravnine $z = 1$, predstavljajo točke, ki jih imenujemo

točke v neskončnosti. To so natanko evklidske premice v ravnini xy. Sama ravnina xy predstavlja t.i. premico v neskončnosti.

Projektivno ravnino torej predstavimo z evklidsko ravnino, ki ji dodamo točke v neskončnosti. Od tod ime razširjena Evklidska ravnina.



Slika 5: Evklidska premica p predstavlja točko P, točka R v projektivni ravnini pa je predstavljena z evklidsko premico r na razširjeni Evklidski ravnini. Premica l, ki vsebuje točki P in R, je predstavljena z ravnino, ki vsebuje evklidski premici p in r.

4 Dualnost

Spoznali bomo pomembno lastnost projektivne geometrije, ki se bistveno razlikuje od ostalih geometrij.

Definicija 1. *Naj bo I neka izjava projektivne ravnine. Izjava, ki nastane iz izjave I na način, da se besede točka, premica, pripada in vsebuje zaporedoma zamenjajo z besedami premica, točka, vsebuje in pripada, imenujemo dualna izjava za izjavo I, ki jo označimo z I'.*

Izrek 1. *(princip dualnosti) Če je izjava I projektivne ravnine izrek, je dualna izjava I' tudi izrek.*

*D*okaz: V tabeli 1 so zapisane dualne izjave aksiomov, ki določajo projektivno geometrijo.

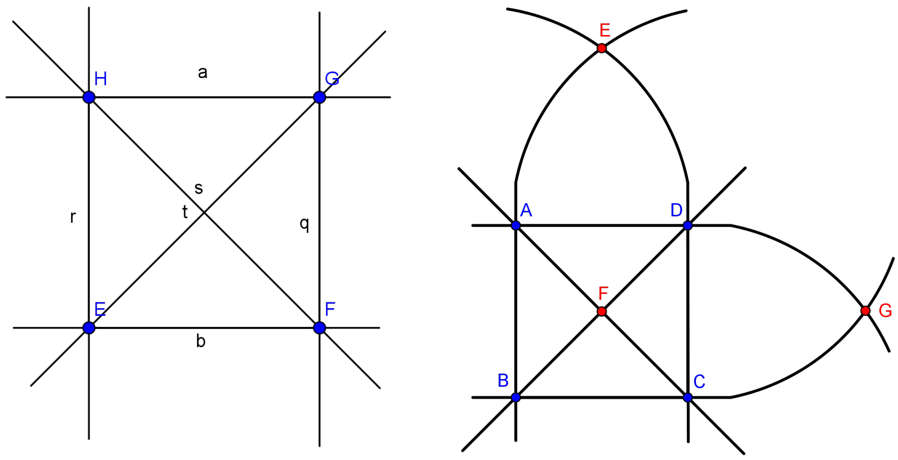
aksiom	dual aksioma
1. Za dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.	Za dve različni premici obstaja natanko ena točka, ki jima pripada.
2. Za dve različni premici obstaja natanko ena točka, ki jima pripada.	Za dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.
3. Obstajajo štiri točke, tako da je vsaka trojica teh točk nekolinearna.	Obstajajo štiri premice, tako da se nobena trojica teh premic ne seka v eni točki.

Tabela 1: Aksiomi projektivne ravnine in njihovi duali.

Utemeljimo, da sta sistem aksiomov in sistem dualnih aksiomov ekvivalentna. V tabeli lahko opazimo, da je prvi aksiom enak drugemu aksiomu v dualnem sistemu in drugi aksiom enak prvemu aksiomu v dualnem sistemu. Pokazati moramo le še, da dual tretjega aksioma velja v projektivni ravnini.

Tretji aksiom nam pove, da obstajajo štiri točke A, B, C, D tako, da je vsaka trojica točk nekolinearna (glej sliko 6). Prvi aksiom nam dovoli, da za vsak par točk narišemo premico, ki ju vsebuje. Ker se po drugem aksiomu vsak par premic seka, vemo, da obstajajo tudi točke $E = AB \cap CD, F = AC \cap BD$ in $G = AD \cap BC$. Ker drugi aksiom pravi, da se vsaki dve premici sekata v natanko eni točki, so na sliki 6 desno narisana vsa možna presečišča med narisanimi premicami. Vidimo, da za premice AB, CD, AD, in BC velja, da se nobena trojica ne seka v eni točki, torej dual tretjega aksioma v projektivni ravnini velja.

S tem smo pokazali, da oba sistema aksiomov določata enako ravnino. Namreč, projektivno ravnino smo definirali s sistemom aksiomov, v katerem nastopajo objekt 1 (točka), objekt 2 (premica) in relacija med njima (pripadati). Objekta točka in premica ter relacija pripadati so nedefinirani, zato lahko objekta preimenujemo (točko v premico, premico v točko) in izberemo drugo relacijo (pripada se preimenuje v vsebuje) in tako z drugimi besedami opišemo iste aksiome, velja pa tudi, da vsi izreki in njihovi dokazi enako delujejo. Ker smo dual projektivne ravnine dobili tako, da smo za objekt 1 izbrali premico, objekt 2 točko in relacijo vsebuje, smo dobili ravnino, v kateri so duali izjav iz projektivne ravnine resnični. Ker pa je dual projektivne ravnine kar projektivna ravnina sama, princip dualnosti drži. $\square$



Slika 6: Na levi sliki na podlagi 1. aksioma narišemo čez vsak par točk premico, na desni sliki pa na podlagi 2. aksioma dobimo še tri nove točke tako, da se po dve premici sekata v eni točki. iz tega sledi, da velja tudi 3. aksiom v dualu, saj smo dobili 4 premice tako, da se nobena trojica ne seka v isti točki.

Definicija 2. *Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi, če velja $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ in se premice AA', BB' in CC' sekajo v isti točki.*

Izrek 2. *(Desarguesov izrek) Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi natanko tedaj, ko presečišča $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici.*

*D*okaz: Trikotnik je sestavljen iz treh premic in treh oglišč. Vemo, da v dualu točke postanejo premice in premice točke. Ker ta oglišča niso kolinearna, dobimo tri premice, ki se ne sekajo v eno točki, torej trikotnik.

Poglejmo si še, kaj je dual dveh trikotnikov v perspektivni legi.
Iz premice, ki povezuje oglišči A in A', v dualu dobimo točko X, ki je presečišče nosilke stranice AB in nosilke stranice $A'B'$. Iz premice, ki povezuje oglišči B in B', v dualu dobimo točko Y, ki je presečišče nosilke stranice AC in nosilke stranice $A'C'$ ter iz premice, ki povezuje oglišči C in C', v dualu dobimo točko Z, ki je pa presečišče nosilke stranice BC in $B'C'$. Ker so se te tri premice sekale v skupni točki, so točke X, Y in Z v dualu kolinearne.

Torej sta dual dveh trikotnikov v perspektivni legi dva trikotnika, za katera velja, da presečišča $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici.

Dual Desarguesovega izreka se torej glasi, da v trikotnikih ABC in $A'B'C'$ presečišča $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici natanko takrat, ko sta trikotnika v perspektivni legi, kar je pa enako začetnemu izreku.

($\Longrightarrow$) V modelu razširjene evklidske ravnine dokažimo eno stran Desarguesovega izreka.

Naj trikotnika ABC in $A'B'C'$ ležita v perspektivni legi. Označimo s P točko, v kateri se sekajo premice AA', BB' in CC'. Izberimo vektor a na evklidski premici, ki določa točko A, vektor a' na evklidski premici, ki določa točko A', vektor b na evklidski premici, ki določa točko B, vektor b' na evklidski premici, ki določa točko B', vektor c na evklidski premici, ki določa točko C' in vektor p na evklidski premici, ki določa točko P. Vektor p lahko zapišemo na tri načine kot kombinacijo vektorjev a in a', b in b' ter c in c'. Obstajajo skalarji α, α', β, β', γ in γ', da velja

$$p = \alpha \cdot a + \alpha' \cdot a' = \beta \cdot b + \beta' \cdot b' = \gamma \cdot c + \gamma' \cdot c'.$$

Od tod sledi $\alpha \cdot a + \alpha' \cdot a' = \beta \cdot b + \beta' \cdot b'$, kar pomeni $x = \alpha \cdot a - \beta \cdot b = \beta' \cdot b' - \alpha' \cdot a'$. Na enak način izračunamo $y = \alpha \cdot a - \gamma \cdot c = \gamma' \cdot c' - \alpha' \cdot a'$ in $z = \beta \cdot b - \gamma \cdot c = \beta' \cdot b' - \gamma' \cdot c'$. Točka X je presečišče premic AB in $A'B'$, določa jo vektor x, točko Y, ki je presečišče premic AC in $A'C'$ določa vektor y ter točko Z, ki je presečišče premic BC in $B'C'$ določa vektor z.

Velja
$$y - x = (\alpha a - \gamma c) - (\alpha a - \beta b) = \beta b - \gamma c = z.$$

Ker smo vektor z zapisali kot linearno kombinacijo vektorjev x in y, to pomeni, da vektor z leži v isti ravnini kot vektorja x in y, torej evklidske premice, ki predstavljajo točke X, Y in Z ležijo na isti evklidski ravnini, kar pomeni, da so točke X, Y in Z kolinearne.

($\Longleftarrow$) Pred formulacijo izreka smo pokazali, da je izjava "če za trikotnika ABC in $A'B'C'$ velja, da so preseki $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ kolinearni, sta trikotnika v perspektivni legi"dualna izjava že dokazanega dela izreka. Po principu dualnosti sledi, da je tudi ta izjava resnična. S tem se dokaz izreka konča. $\square$

5 Zaključek

Naše raziskovanje projektivne ravnine bomo tukaj zaključili. Potrebno je bilo razširiti pragove naše domišljije in se spoprijeti s sprva težje predstavljivo geometrijo. S programom Geogebra smo prikazali nekaj pomembnejših modelov in prikazov projektivne ravnine, tako da si sedaj lahko vsi predstavljamo to čudo (v pozitivnem smislu, seveda).