Problem stotih zapornikov

Bor Grošelj Simić, Gregor Kikelj
Mentor: Vid Kocijan

Povzetek

100 marsovcev je ujetih v gusarski utrdbi in njihova edina možnost za rešitev je uporaba matematike. V sosednji sobi se nahaja 100 skrinj in vsak od marsovcev bo moral v njih poiskati svojo številko, čeprav bo lahko odprl samo polovico skrinj. V članku je opisano, kako naj se s pomočjo kombinatorike rešijo iz prijema zlobnih gusarjev in kakšne so možnosti, da jim uspe.

1 Uvod

Vesoljski gusarji imajo v svoji vesoljski utrdbi zaprtih 100 marsovskih ujetnikov. Ker ne želijo biti nepošteni, jim bodo, preden jih pojedo za večerjo, dali možnost, da se osvobodijo. Vsak zapornik bo prejel svojo zaporniško številko med 1 in 100. Nato jih bodo drugega za drugim poslali v sobo, kjer je 100 skrinj, označenih s številkami od 1 do 100. V vsaki skrinji je ena zaporniška številka. Številke so naključno premešane. Vsak izmed marsovcev lahko odpre največ 50 skrinj in v njih poskuša najti svojo številko. Če vsi marsovci najdejo svoje številke, so vsi svobodni, v nasprotnem primeru pa so vsi večerja. Preden jih pošljejo na preizkušnjo, imajo še čas, da se dogovorijo za optimalno strategijo odpiranja skrinj. Ker so marsovci pametna bitja, so ugotovili, da imajo največ možnosti za preživetje, če se zanašajo na kombinatoriko.

2 Permutacije

2.1 Osnove

Permutacija množice S je bijektivna preslikava, ki slika iz množice S v množico S [1].

Najenostavnejši zapis permutacij je zapis z dvema vrstama:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pove nam, kako se premeša neka skupina elementov. Permutacija Π nam pove, da se 1 preslika v 2, 2 v 5, 3 v 4, 4 v 3, 5 pa v 1.

2.2 Množenje

Permutacije lahko med seboj množimo. Za primer definirajmo novo permutacijo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Množenje permutacij definiramo kot kompozitum funkcij. Velja $(\Sigma \cdot \Pi)(x) = (\Pi \circ \Sigma)(x) = \Pi(\Sigma(x))$. Dobimo

$$(\Sigma \cdot \Pi) = (\Pi \circ \Sigma) = \begin{pmatrix} .1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.3 Ciklična oblika zapisa permutacij

Da si olajšamo računanje, vpeljemo še ciklično obliko zapisa permutacij. Cikle v permutacijah dobimo tako, da permutacijo potenciramo in opazujemo, kam se posamezen element slika. Začnemo s prvim številom. Opazujemo, kam se preslika, in to ponavljamo, dokler ne pridemo do števila, s katerim smo začeli. S tem smo našli cikel, v katerem je začetno število in vsa števila, na katera smo naleteli med množenjem permutacije same s sabo. To potem ponovimo na vseh številih, ki še niso del nobenega cikla. Ciklični zapis permutacije Σ je zato $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$.

2.3.1 Potenciranje s ciklično obliko

Ciklična oblika zapisa nam zelo poenostavi potenciranje. Če element x s permutacijo Π preslikamo n krat, je to enako, kot če se po ciklu permutacije Π, v katerem se nahaja x, premaknemo za n mest naprej. Pri potenciranju na stopnjo, ki je skupni večkratnik vseh dolžin ciklov, dobimo identiteto.

3 Kombinacije

V tem poglavju bomo opisali, na koliko načinov lahko izmed n različnih elementov izberemo k elementov. Označimo to število kot $\binom{n}{k}$. Definiramo $\binom{n}{0} = 1$, očitno velja $\binom{n}{n} = 1$. Za ostale primere si lahko pomagamo tako, da predmete razdelimo v 2 skupini: izbrane elemente in ostale. Vseh možnosti za razporeditev n elementov v seznam je $n!$. Recimo, da je prvih k elementov naša izbrana skupina. Ker je vseeno, kako so predmeti razporejeni na prvih k in zadnjih $n-k$ mestih, $n!$ delimo s $k!(n-k)!$. Dobimo, da je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4 Optimalna strategija

Strategija, ki jo bomo opisali, je optimalna, vendar pa tega ne bomo dokazali. Marsovci so ugotovili, da so številke v skrinjah permutacija števil med 1 in 100. Najlažje se bodo rešili tako, da vsak marsovec odpre skrinjo, katere zaporedna številka je enaka njegovi številki. Tako bo zagotovo odprl skrinjo, ki je v istem ciklu permutacije, kot skrinja, v kateri se nahaja njegova številka. Potem mora nadaljevati tako, da odpre skrinjo, katere zaporedna številka je enaka številki, najdeni v prvi skrinji in to ponavlja. To je namreč ravno premikanje po ciklu permutacije. Tako bo zagotovo nekoč prišel do skrinje, v kateri je njegova številka. Ker pa je število skrinj, ki jih lahko marsovci odprejo, omejeno, se vsi marsovci lahko rešijo samo pri tistih permutacijah, kjer dolžina najdaljšega cikla ne presega 50. Če temu ni tako, so marsovci pogubljeni, saj nihče izmed tistih, ki imajo svojo številko v najdaljšem ciklu, ne bo uspel v svojem iskanju.

5 Učinkovitost strategije

Izračunajmo število permutacij, ki imajo najdaljši cikel krajši od 51. Ta problem je enakovreden štetju permutacij, v katerih je najdaljši cikel daljši od 50. Vemo namreč, da je vseh možnih permutacij 100!.

5.1 Število permutacij s cikli dolžine k

Zanima nas, koliko različnih ciklov dolžine k lahko sestavimo iz k vnaprej določenih elementov. Dokažimo, da je mogočih ciklov $(k-1)!$. Vseh možnih razporeditev elementov je $k!$, vendar nekateri zapisi predstavljajo iste cikle. Na primer: (3 5 2 1) in (5 2 1 3) predstavljata isti cikel. Opazimo, da je enakih zapisov cikla dolžine k natanko toliko, kot je možnih zamikov, torej k. Torej je število vseh različnih ciklov enako $\frac{k!}{k} = (k-1)!$.

5.2 Štetje slabih permutacij

Definirajmo n_k kot število različnih permutacij, pri katerih je najdaljši cikel dolžine k. Permutacije, kjer je ta cikel daljši od 50, imenujmo "slabe", ker pri njih naša taktika ne uspe. Potem je vseh slabih permutacij očitno $\sum_{k=51}^{100} n_k$. Izberimo, katerih k izmed 100 elementov bomo imeli v najdaljšem ciklu. To lahko naredimo na $\binom{100}{k}$ načinov. Sedaj moramo preštet število načinov, na katere lahko elemente uredimo v cikel in število ureditev elementov izven cikla. Vemo, da je število različnih ciklov $(k-1)!$. Izven cikla lahko elemente razporedimo poljubno, zato je možnosti $(100-k)!$. Ker so te razporeditve neodvisne, jih lahko pomnožimo med seboj, da dobimo $n_k = \binom{100}{k}(k-1)!(100-k)!$. Število vseh slabih permutacij je torej

$$\sum_{k=51}^{100} n_k = \sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k}(k-1)!(100-k)!.$$

Verjetnost, da je permutacija slaba, je enaka razmerju slabih permutacij proti vsem permutacijam.

$$
\begin{aligned}
p_{slabo} &= \frac{\sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} (k-1)!\,(100-k)!}{100!} = \\
&= \sum_{k=51}^{100} \frac{\binom{100}{k} (k-1)!\,(100-k)!}{100!} = \\
&= \sum_{k=51}^{100} \frac{100!\,(k-1)!\,(100-k)!}{100!\,k!\,(100-k)!} = \\
&= \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

5.3 Računanje vsote

Ker vemo [2], da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma,$$

kjer je γ Euler-Mascheronijeva konstanta $\gamma \approx 0.57721566$, lahko vsoto ocenimo kot $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n) + \gamma$. Iz tega sledi

$$\sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} = H_{100} - H_{50} \approx \ln(2).$$

Ta ocena je boljša, ko število ujetnikov narašča proti neskončno. Za bolj natančen odgovor na našo nalogo pa lahko to število računamo z računalnikom ali pa poiščemo vrednosti delnih vsot harmoničnega zaporedja v literaruri. Dobimo vrednost

$$1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0.311827,$$

ki nam pove verjetnost da skupini uspe.

6 Verjetnost uspeha posameznika

Glede na to, da sedaj vemo, da je naša taktika zelo izboljšala verjetnost uspeha skupine, nas zanima še, ali kaj izboljša možnosti vsakega posameznika.

Vemo, da je verjetnost, da bo taktika delovala za vse, enaka $1-\sum_{k=51}^{100} 1/k$. Obravnavajmo še primere, ko taktika ne deluje za vse, a lahko nek posameznik vseeno najde svojo številko. Recimo, da je dolžina najdaljšega cikla k, kjer je $k > 50$. Za vsak tak cikel bomo izračunali verjetnost, da trenutni jetnik ni označen s številko iz cikla. Verjetnost, da ima najdaljši cikel dolžino k; $k > 50$, je $1/k$. Če želi zapornik najti svojo številko, njegova zaporniška številka ne sme biti del tega cikla. Elementov, ki niso v ciklu je $100 - k$, zato je verjetnost, da ga zgreši, enaka $\frac{100-k}{100}$. Verjetnost, da ima permutacija najdaljši cikel dolžine k, a zapornikove številke ni v njem, je zato $\frac{(100-k)}{100k}$. Sedaj seštejemo verjetnosti, da ni cikla dolžine nad 50 in verjetnosti, da je, a zapornikove številke ni v njem.

$$1 - \sum_{k=51}^{100} 1/k + \sum_{k=51}^{100} \frac{100-k}{100k} = 1 - \sum_{k=51}^{100} 1/k - 1/100 - 1/k = \frac{1}{2}$$

Kljub temu, da je taktika za celo skupino boljša, posamezniku ne poveča možnosti, da bi našel svojo zaporniško številko.

7 Različice problema

7.1 Prvi zapornik lahko pregleda vse skrinje in zamenja vsebino dveh

Recimo, da prvi zapornik pogleda vse škatle in po pregledu dobi možnost, da vsebino 2 škatel zamenja. Kakšna je potem optimalna strategija za zmago?

Izkaže se, da obstaja strategija, ki uspe vedno. Prvi zapornik mora najti cikel dolžine več kot 50, če ta obstaja, in ga z zamenjavo 2 škatel, ki sta v ciklu čim bolj oddaljeni druga od druge, razdeliti na 2 cikla dolžine 50 ali manj. To bo najdaljši cikel skrajšalo pod dolžino 50, kar bo ostalim zapornikom omogočilo enostavno zmago z že znano strategijo.

7.2 Permutacija ni naključna

Recimo, da so pirati zlobni in bodo nalašč razporedili vsebino skrinj tako, da bo obstajal cikel, daljši od 50. Rešitev v tem primeru je, da permutacijo pomnožimo z naključno permutacijo, za katero se marsovci dogovorijo vnaprej. S tem dobimo novo naključno permutacijo. Pomembno je, da permutacije pomnožimo v pravem vrstem redu – najprej uporabimo našo permutacijo in šele potem permutacijo škatel. Predstavimo, da so si zaporniki zapomnili novo permutacijo. Potem mora zapornik s številko a odpreti škatlo $\Pi(a)$, kjer je Π naključna permutacija, ki so si jo izmislili zaporniki. V škatli, ki jo odpre je novo število, b. V naslednjem koraku odpre škatlo $\Pi(b)$ in opisani postopek ponavlja.

References

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation` (15. 8. 2017)

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\%E2\%80\%93Mascheroni\_constant` (16. 8. 2017)