# MaRSovska geometrija

Erik Kladošek, Teja Štrekelj, Živa Flego
Mentor: Tjaša Vrhovnik

**Povzetek**

V projektu smo spoznali izreke elementarne geometrije. Dokazali smo Apolonijev in Cevov izrek. S pomočjo slednjega smo dokazali obstoj nekaterih znamenitih točk trikotnika. Navedli smo splošnejši Menelajev izrek in izpeljali Stewartov izrek. Ogledali smo si še Eulerjevo premico in krožnico devetih točk.

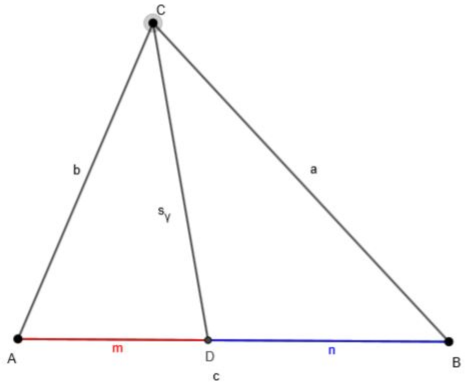
# 1 Uvod

"Tukaj Apollo 11, se slišimo? Mislim, da je poskus s časovnim strojem uspel."
– Tukaj strokovni štab. V katerem letu pa ste pristali?
"Računalnik kaže leto 232 pr. n. št. Okrog nas so vsi oblečeni v hitone, verjetno smo v antični Grčiji. Javimo se po prvem opazovanju terena."
– V redu, MaRSovci. Samo ne pozabite svoje naloge. Saj veste, kaj pravi naš slogan: *"Matematika je jezik, v katerem bogovi govorijo Marsovcem."* – Platon Marsovski I.

Pri projektu smo najprej spoznali štiri izreke, ki so v elementarni geometriji zelo pomembni, in sicer Apolonijev, Cevov, Menelajev in Stewartov izrek, ter tri izmed njih tudi dokazali. S pomočjo Cevovega izreka smo dokazali, da se višine trikotnika, simetrale notranjih kotov trikotnika in težiščnice sekajo v eni točki. Spoznali smo tudi Gergonnovo in Nagelovo točko. Na koncu smo se ukvarjali še z lego znamenitih točk trikotnika ter razmerjem med njimi. Tako smo spoznali Eulerjevo premico ter krožnico devetih točk.

# 2 Apolonijev izrek

Apolonijev izrek se imenuje po starogrškem matematiku Apoloniju, ki je živel v 3. st. pr. n. št. Izrek govori o simetrali notranjega kota trikotnika in razmerju, v katerem simetrala deli nasprotno stranico.

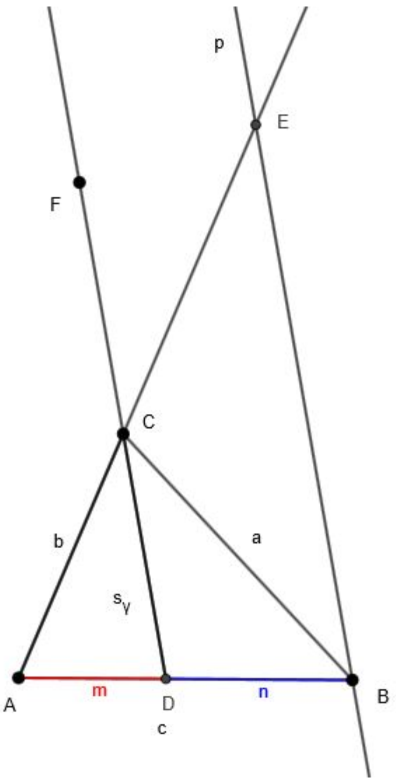



Slika 1: Apolonijev izrek

**Izrek 1.** *Dan imamo poljuben trikotnik $ABC$. Simetrala kota $\gamma$ seka stranico $AB$ v točki $D$. Dolžino daljice $AD$ označimo z $m$, dolžino daljice $DB$ pa z $n$. Za razmerje odsekov velja zveza:*

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}.$$

*Dokaz.* Naredimo vzporednico $p$ na daljico $DC$, ki gre skozi točko $B$. Točka $E$ je presečišče $p$ in nosilke stranice $AC$, točka $F$ pa naj leži na poltraku z izhodiščem v $C$, ki je nasproten poltraku $CD$.




Slika 2: V dokazu Apolonijevega izreka si pomagamo s tako sliko.

$BC$ je prečnica, zato sta $\angle EBC$ in $\angle BCD$ skladna. Prav tako je $CE$ prečnica, zato sta tudi $\angle BEC$ in $\angle ECF$ skladna. Kota $\angle ECF$ in $\angle DCA$ sta sovršna kota in zato skladna. Simetralo kota $\gamma$ označimo z $s_\gamma$. Zaradi $s_\gamma$ sta tudi $\angle DCA$ in $\angle DCB$ skladna. To pomeni, da je trikotnik $BEC$ enakokrak, iz česar sledi, da sta daljici $BC$ in $EC$ enako dolgi. Iz Talesovega izreka je razvidno, da je:

$$\frac{m}{b} = \frac{m+n}{b+a},$$
$$\frac{m}{m+n} = \frac{b}{b+a},$$
$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m+n}{n}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b+a}{a}},$$
$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+1}.$$

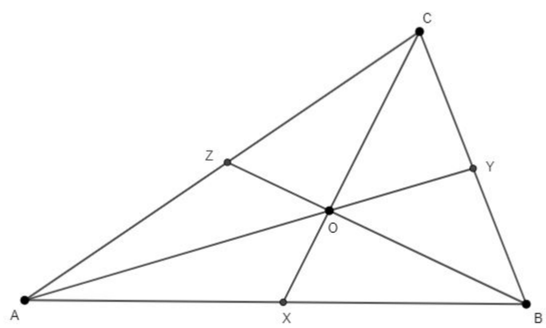
Od tod sledi zveza:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}.$$

S tem smo dokazali Apolonijev izrek. □

# 3 Cevov izrek

Že stari Grki so vedeli, da se tako težiščnice kot višine in simetrale kotov sekajo v eni točki. Giovanni Ceva, italijanski matematik iz Univerze v Pisi, je po raziskovanju trikotnikov objavil izrek. Ta izrek je danes znan kot Cevov izrek, ki pravi, da imajo daljice, ki povezujejo oglišča z nasprotnimi stranicami trikotnika skupno presečišče le pod določenim pogojem. Po nekaterih virih naj bi izrek odkril že kralj Zagaroze Yusuf al-Mu'taman ibn Hud v 11. stoletju.



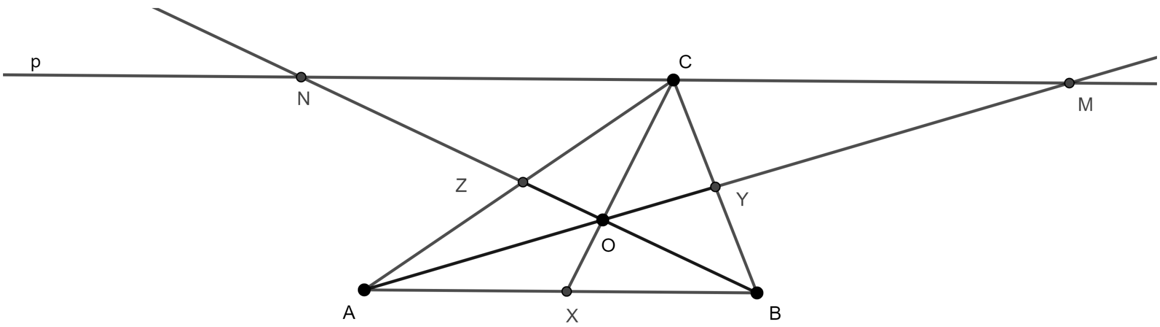

Slika 3: Cevov izrek

**Izrek 2.** *Dan imamo poljuben trikotnik $ABC$. Točka $X$ leži na stranici $AB$, točka $Y$ na $BC$, točka $Z$ pa na $AC$. Daljice $CX$, $AY$ in $BZ$ se sekajo v eni točki natanko tedaj, ko velja zveza:*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1.$$

*Dokaz.* Dokazali bomo implikaciji v desno in levo.

($\Rightarrow$) Vemo, da se daljice $CX$, $AY$ in $BZ$ sekajo v eni točki. Narišemo vzporednico $p$ na stranico $AB$, tako da seka točko $C$. Podaljšamo daljico $AY$. Presečišče $p$ in nosilke $AY$ imenujemo $M$. Podaljšamo tudi daljico $BZ$. Presečišče $p$ in nosilke $BZ$ imenujemo $N$.




Slika 4: Skica za dokaz implikacije v desno.

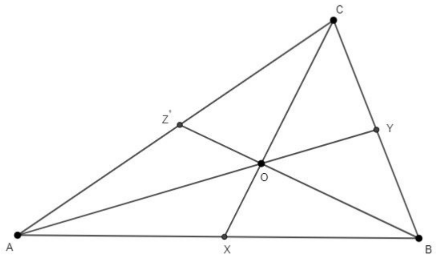
Opazimo, da sta si trikotnika $ABY$ in $MCY$ ter trikotnika $ABZ$ in $CNZ$ podobna. Iz tega sledi:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{CM}{CN},$$
$$\frac{BY}{YC} = \frac{AB}{MC},$$
$$\frac{CZ}{ZA} = \frac{CN}{AB}.$$

Iz zgornjih zvez dobimo:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{CM}{CN} \cdot \frac{AB}{CM} \cdot \frac{CN}{AB} = 1.$$

S tem smo dokazali implikacijo v desno.




Slika 5: Skica za dokaz implikacije v levo.

($\Leftarrow$) Vemo, da velja $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$. Recimo, da obstaja taka točka $Z'$, ki leži na stranici $AC$, da se daljice $CX$, $AY$ in $BZ'$ sekajo v eni točki. Po dokazu implikacije v desno vemo, da velja

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = 1.$$

Iz obeh zgornjih enakosti tako dobimo:

$$\frac{CZ}{ZA} = \frac{CZ'}{Z'A}.$$

Iz tega sledi, da je $Z = Z'$. S tem dokažemo, da se $CX$, $AY$ in $BZ$ sekajo v eni točki. Cevov izrek res velja. $\square$

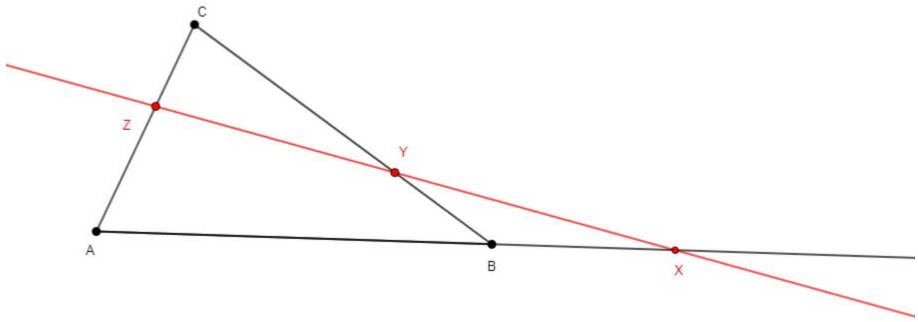
# 4 Menelajev izrek

Kar tisočletje in pol pred Cevovim izrekom je starogrški matematik Menelaj iz Aleksandrije dokazal, da so točke, ki povezujejo stranico z nasprotnim ogliščem, kolinearne, če je produkt razmerij odsekov stranic enak $-1$. Menelajev izrek velja za predhodnika Cevovega izreka.

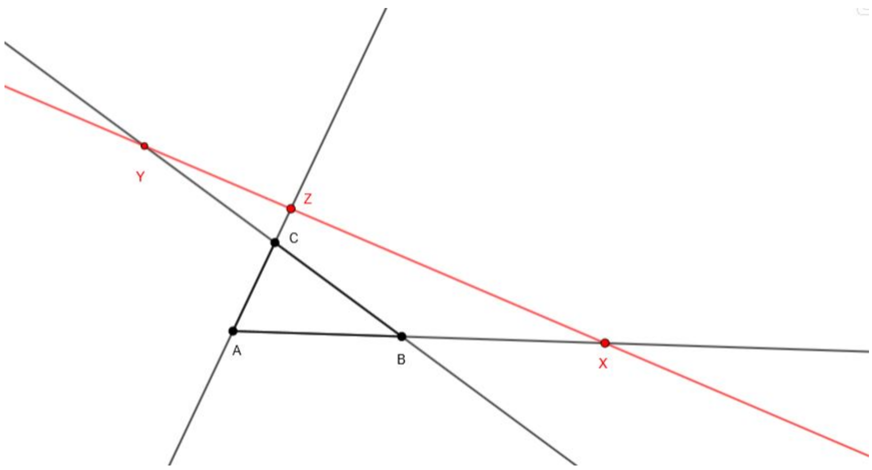
**Izrek 3.** *Dan naj bo poljuben trikotnik $ABC$. Naj točke $X$, $Y$, $Z$ ležijo zaporedoma na nosilkah stranic $AB$, $BC$ in $CA$. Točke $X$, $Y$ in $Z$ ležijo na isti premici natanko tedaj, ko velja zveza:*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

Upoštevamo, da je predznak razmerja $AX : XB$ negativen, če točka $X$ leži zunaj stranice $AB$, sicer pa pozitiven. Podobno velja za ostali dve razmerji. Ločimo dva primera položajev točk $X$, $Y$, $Z$, ki sta prikazana na naslednjih slikah.




Slika 6: Primer trikotnika, kjer dve točki ležita na stranicah trikotnika, ena pa izven.



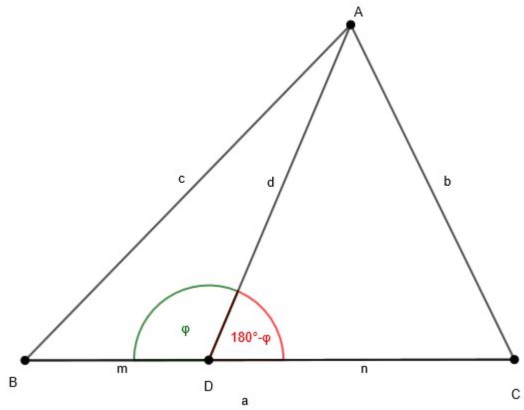

Slika 7: Primer trikotnika, kjer vse tri točke ležijo zunaj stranic.

# 5 Stewartov izrek

Škotski matematik Matthew Stewart je v delu *Some General Theorems of Considerable use in the Higher Parts of Mathematics* zapisal izrek, ki govori o povezavi dolžin stranic trikotnika, daljice, ki povezuje oglišče z nasprotno stranico ter dolžini odsekov.

**Izrek 4.** *Dan imamo poljuben trikotnik $ABC$. Naj bo točka $D$ poljubna točka na stranici $BC$. Dolžino daljice $BD$ označimo z $m$, dolžino daljice $DC$ z $n$, dolžino daljice $AD$ pa z $d$. Potem velja zveza*

$$a(mn + d^2) = b^2m + c^2n.$$




Slika 8: Stewartov izrek

*Dokaz.* Opazujemo trikotnika $ABD$ in $ACD$. Iz kosinusnega izreka za oba trikotnika je razvidno, da:

$$\begin{aligned} c^2 &= m^2 + d^2 - 2md\cos\varphi, \\ b^2 &= n^2 + d^2 - 2nd\cos(\pi - \varphi). \end{aligned}$$

Iz adicijskega izreka vemo, da je $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, kar nam drugo enačbo poenostavi v

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nd\cos\varphi.$$

Prvo enačbo množimo z $n$, poenostavljeno drugo enačbo pa z $m$ in ju seštejemo. Dobimo

$$\begin{aligned} c^2n + b^2m &= m^2n + d^2n - 2mnd\cos\varphi + mn^2 + d^2m + 2mnd\cos\varphi, \\ c^2n + b^2m &= m^2n + d^2n + mn^2 + d^2m. \end{aligned}$$

Medtem ko je leva stran enačbe že urejena, je desno potrebno še nekoliko preurediti. Sledi

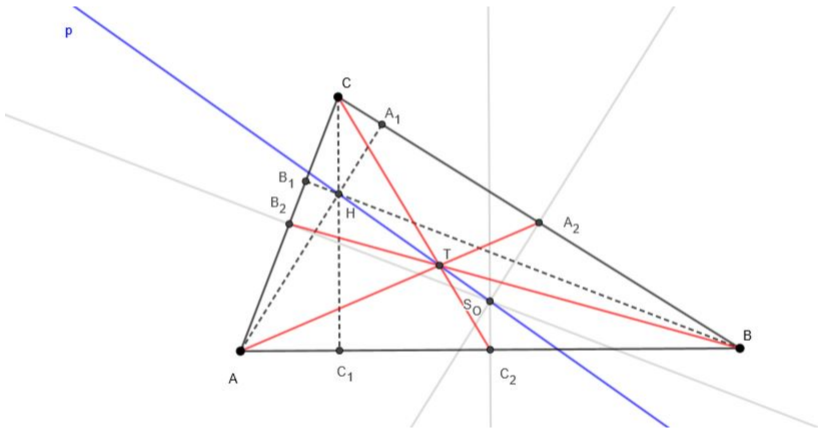
$$\begin{aligned} m^2n + d^2n + mn^2 + d^2m &= mn(m+n) + d^2(n+m) \\ &= (m+n)(mn+d^2) \\ &= a(mn+d^2). \end{aligned}$$

Če združimo levo stran in preurejeno desno stran, dobimo želeno enačbo. $\square$

# 6 Eulerjeva premica

Leonhard Euler je bil eden najuspešnejših matematikov. Ukvarjal se je z raznovrstnimi področji – med drugim tudi z geometrijo. Mi smo spoznali Eulerjevo premico.

Dan je poljuben trikotnik $ABC$. Vsakemu oglišču trikotnika $ABC$ vrišemo višino (daljice $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$), da dobimo višinsko točko $H$. Nato vrišemo simetrale stranic (presečišče simetral predstavlja središče trikotniku očrtane krožnice $S_O$). Simetrale stranic nam dajo razpolovišča stranic (točke $A_2$, $B_2$ in $C_2$). Daljice s krajišči v oglišču in razpolovišču nasprotne stranice ($AA_2$, $BB_2$, $CC_2$) so težiščnice, ki se sekajo v težišču $T$. Kot je razvidno iz slike, se izkaže, da točke $T$, $H$ in $S_O$ ležijo na isti premici $p$. Ta premica se imenuje ***Eulerjeva premica***. Razmerje med $S_OT$ in $TH$ je enako $S_OT : TH = 1 : 2$.




Slika 9: Eulerjeva premica je označena z modro barvo.

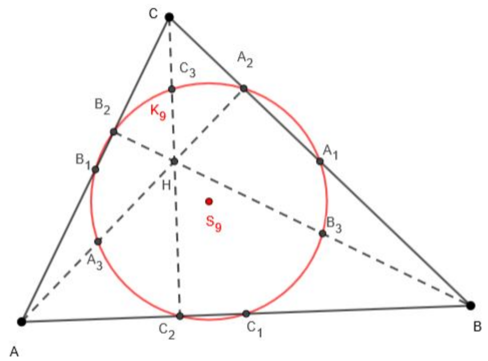
# 7 Krožnica devetih točk

Karl Wilhelm Feuerbach je odkril šest izmed devetih točk, ki določajo krožnico devetih točk. Preostale tri točke so odkrili nekoliko kasneje. Ime krožnice, kot ga poznamo danes, je prvi uporabil Olry Terquem.

Dan imamo poljuben trikotnik $ABC$. Stranicam danega trikotnika določimo razpolovišča in jih označimo s točkami $A_1$, $B_1$ in $C_1$. Nato še vsakemu oglišču trikotnika $ABC$ vrišemo višino (daljice $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$), da dobimo višinsko točko $H$. Nadaljujemo z določitvijo razpolovišč daljic $AH$, $BH$, $CH$, ki jih označimo z $A_3$, $B_3$ in $C_3$. Točke $A_i$, $B_i$, $C_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ ležijo na isti krožnici. To je ***krožnica devetih točk***. Označimo jo s $K_9$.

Razmerje med $S_O S_9$ in $S_9 H$ je enako $S_O S_9 : S_9 H = 1 : 1$. Polmer krožnice devetih točk $r_{K_9}$ je enak polovici polmera trikotniku očrtane krožnice $r_{K_O}$,

$$r_{K_9} = \frac{1}{2} r_{K_O}.$$




Slika 10: Krožnica devetih točk

# Literatura

[1] M. Vencelj, Cevov izrek, *Presek* **20** (1992/1993), 6–11.

[2] Zapiski s predavanj prof. B. Lavriča pri predmetu Elementarna geometrija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).

[3] L. Mastin, "The Story of Mathematics" https://www.storyofmathematics.com/story.html (ogled 29. julij 2019).

[4] Sodelavci Wikipedie, "Giovanni Ceva" *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva (ogled 29. julij 2019).

[5] Sodelavci Wikipedie, "Menelaus of Alexandria" *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria (ogled 29. julij 2019).