Jožefov problem

Maja Ibic, Matevž Lovšin, Jan Kamnikar
Mentor: Nina Štempelj

Povzetek

Želite izvedeti, kako vedno zmagati pri izštevanki? Na poti do odgovora smo si najprej pogledali Jožefov problem, kako zmagati v krogu ljudi, če izločimo vsakega drugega. To pa še ni bilo dovolj za končno rešitev, zato smo si pogledali še kdo zmaga, če izločimo vsakega tretjega, kar nas je pripeljalo do zmagovalne formule.

1 Uvod

Zanima nas, kdo bi zmagal pri izštevanki, kjer izločamo igralce, dokler ne ostane samo eden. Da bi to ugotovili, si lahko pomagamo z Jožefovim problemom. Jožefov problem je dobil ime po judovskem zgodovinarju Flaviju Jožefu, ki je živel v prvem stoletju. Nekega dne je rimska vojska obkolila Jožefa in njegovih 40 sovojakov. Ker niso želeli umreti brez časti, so se namesto ujetništva odločili za skupni samomor. Dogovorili so se za tak sistem, da ne bi nihče od njih ubil sam sebe, temveč vsak svojega levega soseda, tisti ki ostane zadnji, pa naredi samomor. Jožef je bil nekoliko sebičen in si ni želel umreti, ampak bi se raje predal. Tega pa ni povedal svojim sovojakom, saj bi ga zaradi izdaje ubili. Ugotoviti je želel, na katero mesto se mora postaviti, da ostane še zadnji preživeli v svoji vojski.

2 Osnovni problem

Jožefov problem je predvidevati postavitev zmagovalnega mesta v krogu z 41 ljudmi. Za natančnejši opis naloge postavimo 41 ljudi v krog in jih po vrsti oštevilčimo s števili od 1 do 41. Prvi, ki je na vrsti za ubijanje, je vojak številka 1, ki ubije vojaka številka 2. Sledi mu tretji vojak, ki ubije četrtega in tako naprej do številke 40. Ko je na vrsti 41. vojak, začnemo z naslednjim krogom in je tako prvi umrli v drugem krogu vojak številka 1. V nadaljevanju tretji vojak ubije petega, sedmi ubije devetega, itd. Po petih krogih pridemo do zadnje preživele osebe oziroma zmagovalca, ki je vojak številka 19.

2.1 Poljubno število ljudi v krogu

Ugotovili smo, da je zgoraj opisano ugotavljanje zmagovalca za število 41 zelo dolgotrajen postopek, kaj šele pri večjih številih. Zato želimo najti formulo za poljubno število igralcev brez dolgotrajnega procesa izštevanja.

Naj bo n število igralcev. Poglejmo si, kako se vrstijo zmagovalci (ki jih označimo z z_n) pri n=2,3,4,...15 in 16 igralcih. V tabeli 1 opazimo, da je z_n=1, ko je $n = 2^a$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Tabela 1: Zmagovalec glede na število udeležencev

Trditev 1. *Če je (v krogu) $n = 2^a$, je zmagovalec z_n=1.*

Dokaz. Edini prafaktor števila n je 2, kar pomeni da bo v vsakem naslednjem krogu spet sodo število igralcev in umrejo le igralci s sodim številom, igralec s številko 1 vedno ubija. Ker igralec s številom 1 vedno ubija, nikoli ne umre. □

Poiščimo zmagovalno formulo še za poljubno število $n = 2^a + m$, pri čemer je potenca 2^a največja možna in m ostanek. Če številu n odštejemo ostanek m, dobimo točno 2^a vojakov v krogu. Zgoditi se mora m umorov, ker pa sta v en umoru udeležena dva vojaka, moramo m pomnožiti z 2, da dobimo številko zadnjega umorjenega. Naslednji na vrsti bo zmagovalec, saj je živih še 2^a ljudi(enačba 3). To je situacija, kjer smo že prej videli da zmaga tisti, ki začne.

$$n = 2^a + m \tag{1}$$

$$m = n - 2^a \tag{2}$$

$$z_n = 2m + 1 \tag{3}$$

$$z_n = 2(n - 2^a) + 1. \tag{4}$$

2.2 Binarni sistem

Obstaja pa tudi zanimiv trik v binarnem zapisu za izračun zmagovalca.

Trditev 2. *Če prvo števko v binarnem zapisu prestavimo na zadnje mesto, dobimo zmagovalca.*

Zgled 1.

$$n = 101_{(2)} \to 5_{(10)}$$

$$z_n = 011_{(2)} \to 3_{(10)}$$

V tabeli 1 vidimo, da ta trik deluje za 5.

Dokaz. Spmnimo se, da je a največji možnen eksponent števila 2, ki ni večja od n. Prva števka v binarnem zapisu zato predstavlja 2^a. Če torej številu v binarnem zapisu odstranimo začetno 1, ji pravzaprav odštejemo 2^a.

Desetiški zapis

$$n - 2^a =$$

$$= 5 - 2^2 =$$

$$= 5 - 4 = 1$$

Binarni zapis

$$n - 2^a =$$

$$= 101 - 100 =$$

$$= 1$$

Če število pomnožimo z 2, se vse potence števila 2 povečajo za 1, kar v binarnem zapisu pomeni, da se vse števke prestavijo za 1 naprej.

Desetiški zapis

$$2(n - 2^a) =$$

$$= 2 \cdot 1 =$$

$$= 2$$

Binarni zapis

$$2(n - 2^a) =$$
$$= 10 \cdot 1 =$$
$$= 10$$

Ker bo zadnja števka 0 zaradi prejšnjega koraka, moramo zato da jo spremenimo v 1, številu prišteti 1.

Desetiški zapis

$$2(n - 2^a) + 1 =$$
$$= 2 + 1 =$$
$$= 3$$

Binarni zapis

$$2(n - 2^a) + 1 =$$
$$= 10 + 1 =$$
$$= 11$$

□

3 Zmagovalec pri preskakovanju enega igralca

Jožefov problem lahko razširimo in ugotovimo, kaj bi se zgodilo, če bi bil ubit vsak tretji v krogu in ne vsak drugi. Tako bi na primer v prvem krogu, s katerim začne oseba 1, bila najprej izločena oseba 3, nato bi izločanje prevzela oseba 4 in izločila 6 itd. Očitno je, da v prvem krogu izpadejo večkratniki števila 3.

Ponovno naredimo tabelo 2, saj želimo najti vzorec, tako kot pri osnovnem problemu, ko je bil ubit vsak drugi. Hitro ugotovimo, da vzorec ni razviden. Poglejmo si še potence števila 3, kot v primeru za sosede. Ugotovimo, da tukaj potence števila 3 nimajo vse istega zmagovalca. Do tega pride zato, ker v primeru, da umre vsak drugi, število krogov enako eksponentu največjega 2^a, ki ni večje od n. Če si pogledamo primer števila 5, vidimo da sta potrebna 2 kroga, da dobimo zmagovalca. Največji eksponent števila 2^a je enak 2. Pri načinu, ko umre vsak tretji, pa število krogov ni enako eksponentu največjega 3^a, ki je še manjši od n. Na primer za 5 potrebujemo 4 kroge, da dobimo zmagovalca, največji eksponent pri 3^a pa je 1. Do tega pride zato, ker se število igralcev z vsakim krogom ne manjša za pol, kot pri osnovnem problemu, ampak za eno tretjino oseb.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_n	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8

Tabela 2: Zmagovalec glede na število udeležencev, če umre vsak drugi

3.1 Na novo oštevilčen zmagovalec

Poskusimo z malo drugačnim pristopom.V vsakem krogu vsakega preživelega na novo oštevilčimo, tako da se številke nadaljujejo od zadnje v prejšnjem krogu, eliminirane številke pa ne dobijo nove številke. Npr. igralec s številko 1 v prvem krogu preživi, zato v drugem krogu dobi število $1 + n$, 4 pa dobi $n + 3$, saj je bila 3 eliminirana v 1. krogu. Poglejmo katero število ima zmagovalec na koncu.

Naredimo novo tabelo (glej tabelo 3) in ugotovimo, da na tak način dobimo lep vzorec na novo oštevilčenih zmagovalcev, ki se vedno razlikujejo za 3. S pomočjo tabele opazimo, da na koncu zmaga igralec s številko $3n - 2$, to pa moramo dokazati še za vsa števila večja od 16.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_{n+}	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46

Tabela 3: Povečano število zmagovalca glede na število udeležencev pri preskoku 1

Trditev 3. *$3n - 2$ je zadnja številka mesta, na katerem je zmagovalec.*

Dokaz.

$$3n - 2 = 3(n - 1) + 1$$

S tem zapisom postane utemeljitev bolj očitna. Število $(n - 1)$ pove, koliko ljudi je umrlo. To število moramo množiti s 3, ker moramo za vsak uboj dodati tri številke: 1 za morilca, eno za preskočenega in eno za ubitega. +1 moramo prišteti, ker je zmagovalec za ena večji od $3(n-1)$, ki predstavlja zadnjo žrtev. □

Tako dobimo formulo, ki nam sicer ne da zmagovalca v prvem krogu, vendar nam da njegovo povečano številko.

3.2 Izračun naslednjega števila

Kako bi iz zmagovalca po novem štetju dobili mesto zmagovalca iz prvega kroga?

Števila v krogu razporedimo v tri skupine. Prva skupina so večkratniki števila 3, ki jih označimo z $d_a = 3k$, druga skupina so števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1, označena z $d_b = 3k + 1$ in tretja skupina so števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2, označimo jih z $d_c = 3k + 2$.

Kako bodo števila iz prejšnjega kroga označena v naslednjem krogu?

(Te naloge se lotimo z izločanjem ubitih vojakov.) Če je n število vojakov, bo v naslednjem krogu največ $\frac{1}{3}n$ manj vojakov, saj je ubit vsak tretji. V primeru, da je število vojakov deljivo s 3, ostane v krogu točno $\frac{2}{3}$ vojakov, če pa število vojakov ni deljivo s 3, v krogu ostane $\frac{2}{3}n + o$ vojakov, kjer $o \in \{1, 2\}$. Ker imamo tri skupine si moremo to "obnašanje" pogledati za vsako posebej. Za skupino $d_a = 3k$ že vemo, da kroga ne bo preživela, saj je večkratnik števila 3. Skupina $d_b = 3k + 1$ bo v naslednjem krogu dobila števila $d_{b2} = 2k+1+n$, saj je $\frac{2}{3} \cdot 3k+1 = 2k+1$. V izrazu moramo prišteti še n, ker ne smemo začeti šteti od začetka, ampak moramo upoštevati trenutno število. Enako naredimo za skupino d_c in dobimo $d_{c2} = 2k + 2 + n$. Tako smo dobili enačbe za izračun številke iz trenutnega v naslednji krog.

3.3 Izračun začetnega števila

Še vedno nimamo številke zmagovalca v začetnem krogu, lahko pa jo izračunamo iz povečane številke zmagovalca.

Za lažje razumevanje postopka bomo najprej uvedli nekaj oznak. Število krogov bomo označili s p, številko zmagovalnega mesta v r-tem krogu označimo z d_r. Zmagovalno številko d_p v zadnjem krogu izračunamo s formulo, d_1 pa dobimo rekurzivno z izračunanjem d_{r-1} iz d_r Ker smo prej ugotovili, da če je $d_{r-1} = 3k+2$ ali $d_{r-1} = 3k+1$, je potem $d_r = 2k+2+n$ ali $d_r = 2k+1+n$, lahko iz sistema dveh enačb z dvema neznankama izrazimo d_{r-1}:

$$d_{r-1} = 3k + o \tag{5}$$

$$d_r = 2k + o + n \tag{6}$$

Enačbo 5 pomnožimo s tri, enačbo 6 pa z dve.

$$2d_{r-1} = 6k + 2o$$

$$3d_r = 6k + 3o + 3n$$

Pomnoženi enačbi odštejemo med seboj.

$$2d_{r-1} - 3d_r = -o - 3n$$

$$d_{r-1} = \frac{3d_r - o - 3n}{2},$$

kjer je $o \in \{1, 2\}$. Tako dobimo enačbo in posledično tudi algoritem za reševanje problema.

4 Posplošitev postopka

Sedaj vemo, kako najti zmagovalca, če preskočimo eno osebo. Kaj pa če namesto ene preskočimo več oseb? Prej smo ugotovili, da d_p dobimo s formulo $3(n-1)+1$. Če želimo to formulo posplošiti, moramo vpeljati spremenljivko c, ki predstavlja število vpletenih igralcev v en umor (zmagovalec, žrtev in število preskočenih ljudi). Iz tega dobimo formulo:

$$c(n-1)+1.$$

Zdaj, ko znamo najti povečano številko zmagovalca za poljuben preskok ljudi v krogu, potrebujemo še formulo za iskanje originalne številke zmagovalca (d_1). Števila razdelimo v c skupin glede na ostanek pri deljenju s c: $ck+o$, kjer $o \in \{0, 1, 2, ..., c-1\}$. V naslednjem krogu bodo ta števila imela številko $(c-1)k+o+n$, saj v vsakem naslednjem krogu preživi le $c-1$ ljudi izmed c-tih, ostanek pa ostane nespremenjen, podobno kot za $c = 3$. Nato pa lahko uporabljamo isti način za iskanje originalne številke zmagovalca kot pri preskoku enega.

5 Zaključek

Če se vrnemo nazaj na vprašanje iz uvoda: "Kako vedno zmagati pri izštevanki?". Za zmago pri izštevanki moramo le ugotoviti kaj sta c in n. Število besed v izštevanki je c, n pa število udeležencev v igri, potem pa lahko uporabimo formule in postopek, ki ste jih spoznali v tem članku.

Literatura

[1] *Francis Y., A Genereal Solution to Josephus Problem*, [ogled 9. 8. 2018], dostopno na `https://www.slideshare.net/YoavFrancis/general-solution-for-josephus-problem`.

[2] *Erman D., The Josephus Problem*, [ogled 9. 8. 2018], dostopno na `https://www.youtube.com/watch?v=uCsD3ZGzMgE`.