Verižni ulomki

Žan Hozjan, Patrik Kušter, Urban Vesel
Mentor: Nejc Zajc

Povzetek

Obstaja več različnih načinov reševanja linearnih diofantskih enačb. Mi smo si ogledali način reševanja z verižnimi ulomki. V nalogi smo predstavili primer reševanja, spoznali pa smo tudi Wallis-Eulerjeve rekurzivne enačbe.

1 Uvod

V našem projektu smo se ukvarjali s teorijo števil, kot izziv pa smo si najprej zastavili naslednjo uganko:

> *Trije matematiki potujejo po vesolju in se ustavijo na planetu, na katerem je le drevo z okusnimi sadeži in prijazen vesoljec. Pred spanjem matematiki naberejo sadeže, jih zložijo na kup in se odpravijo spat. Ob polnoči se zbudi prvi matematik, razdeli sadeže na tri enake kupe, a ostane mu en sadež, ki ga podari vesoljcu. En kup skrije, druga dva vrne nazaj in se odpravi spat. Ob enih se zbudi drugi in stori enako. Ob dveh tretji in tudi on stori enako. Zjutraj vstanejo in razdelijo preostale sadeže na tri enake dele, a jim spet ostane en, ki ga podarijo vesoljcu. Kolikšno je najmanjše število sadežev, s katerimi so začeli?*

Označimo z x začetno število sadežev, z y_i število sadežev, ki jih ponoči vzame i-ti matematik in z y število sadežev, ki jih dobi vsak zjutraj. Ob polnoči jih prvi vzame $y_1 = \frac{1}{3}(x-1)$, ostane pa jih dvakrat toliko. Če sledimo temu postopku, pridemo po še dveh korakih do enakosti $\frac{2}{3}(\frac{4}{9}x - \frac{19}{9}) = 3y + 1$. Če jo poenostavimo, dobimo linearno diofantsko enačbo $8x - 81y = 65$.

2 Linearne diofantske enačbe

Definicija 1. ***Linearna diofantska enačba dveh spremenljivk*** *je enačba oblike $ax - by = c$ in ima rešitve (x, y) v množici celih števil.*

Izrek 1. *Naj bosta $a, b \in \mathbb{N}$ tuji števili. Za vsako $c \in \mathbb{Z}$ ima enačba $ax - by = c$ neskončno mnogo celoštevilskih rešitev (x, y).*
Če $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadoščata enačbi $ax_0 - by_0 = 1$, so vse rešitve enačbe $ax - by = c$ oblike

$$x = cx_0 + bk,$$
$$y = cy_0 + ak,$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Najprej pokažimo, da vse rešitve enačbe res ustrezajo zapisani obliki. Naj (x_0, y_0) zadošča enačbi $ax_0 - by_0 = 1$. To enačbo pomnožimo s c, da dobimo $cax_0 - cby_0 = c$ in jo enačimo z začetno enačbo $ax - by = c$ in dobimo $ax - by = cax_0 - cby_0$. Enačbo poenostavimo do $a(x - cx_0) = b(y - cy_0)$. Ker sta a in b tuja, sledi da $a | y - cy_0$. Torej obstaja $k \in \mathbb{Z}$, da velja $ka = y - cy_0$

oziroma $y = cy_0 + ka$. V enačbo $a(x - cx_0) = b(y - cy_0)$ vstavimo $y - cy_0 = ka$ in po deljenju z a dobimo enačbo $kb = x - cx_0$ oziroma $x = cx_0 + kb$.
Sedaj pokažimo še, da so vsa števila te oblike res rešitve enačbe.
Formuli $x = cx_0 + bk$ in $y = cy_0 + ak$ vstavimo v enačbo $ax - by = c$ in tako dobimo $a(cx_0 + bk) - b(cy_0 + ak) = c$. Levo stran poenostavimo do $c(ax_0 - by_0) = c$, ki velja zaradi predpostavke $ax_0 - by_0 = 1$. $\square$

Poznamo več načinov za reševanje diofanstkih enačb, od katerih bomo predstavili način reševanja z verižnimi ulomki.

3 Verižni ulomki

Definicija 2. ***Verižni ulomek*** *je ulomek oblike*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}},$$

kjer so a_i, $b_j \in \mathbb{R}$ in $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ter $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponavadi predpostavimo, da je $b_j \neq 0$ za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Oznaka:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} \, {}_{+} \, \frac{b_2}{a_2} \, {}_{+} \, \cdots \, {}_{+} \, \frac{b_n}{a_n}.$$

Če imamo zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$, da je $\alpha = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \, {}_{+} \, \frac{b_2}{a_2} \, {}_{+} \cdots$, potem definiramo n-ti približek kot

$$c_n := a_0 + \frac{b_1}{a_1} \, {}_{+} \, \frac{b_2}{a_2} \, {}_{+} \, \cdots \, {}_{+} \, \frac{b_n}{a_n}.$$

Če so vsi $b_j = 1$, potem ulomku pravimo **enostaven** in ga označimo z $< a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n >$. Velja, da lahko vsako racionalno število zapišemo kot enostaven verižni ulomek s sodim ali lihim številom členov, kar bomo tudi pokazali.

4 Rekurzivne zveze

Označimo nenegativen enostaven verižni ulomek kot

$$a_0 + \frac{1}{a_1} \; + \; \frac{1}{a_2} \; + \; \cdots \; + \; \frac{1}{a_n},$$

kjer je $a_i > 0, \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$.

Poglejmo si **Wallis-Eulerjeve rekurzivne enačbe** za enostavne verižne ulomke.

Definicija 3 (Wallis-Eulerjeve zveze)**.** *Naj bo $a_i > 0,\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. Definirajmo zaporedje $\{p_n\}$ kot $p_{-1} = 1,\ p_0 = a_0$ in*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo še $q_{-1} = 0,\ q_0 = 1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Lema 1. *Naj bo q_n definiran kot zgoraj, potem velja $q_n > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. To lahko dokažemo s krepko indukcijo.
Če je $n = 1$, imamo $q_1 = q_0 a_0 + q_{-1} = a_0$, kar je po definiciji a_i večje od 0. Zdaj predpostavimo, da to velja za vsa števila od 1 do n in dokažimo, da mora veljati tudi za $n + 1$.

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \tag{1}$$

Prvi člen na desni strani enačbe (1) zagotovo večji od 0, saj je a_{n+1} po definiciji večji od 0, q_n pa je večji od 0 po naši predpostavki. Prav tako je po naši predpostavki q_{n-1} večji od 0, zato je $q_{n+1} > 0$ in je zveza dokazana za vsak $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Izrek 2. *Za vsak $x > 0$ velja, da je enostaven verižni ulomek*

$$< a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x > = \frac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Dokaz. To dokažemo z navadno indukcijo. Za $n = 1$ dobimo

$$a_0 + \frac{1}{x} = \frac{xp_0 + p_{-1}}{xq_0 + q_{-1}} = \frac{xa_0 + 1}{x + 0}.$$

Predpostavimo, da enačba (2) velja za neko naravno število n in dokažimo, da velja tudi za $n + 1$.

$$< a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, x > = a_0 + \frac{1}{a_1} {}_{+} \ \cdots \ {}_{+} \frac{1}{a_n} {}_{+} \frac{1}{x} =$$

Označimo $y = a_n + \frac{1}{x}$. Nato uporabimo indukcijsko predpostavko

$$=< a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, y >= \frac{yp_{n-1} + p_{n-2}}{yq_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Zdaj za y vstavimo $a_n + \frac{1}{x}$ in dobimo

$$\frac{yp_{n-1} + p_{n-2}}{yq_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{(a_0 + \frac{1}{x})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_0 + \frac{1}{x})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + \frac{p_{n-1}}{x} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + \frac{q_{n-1}}{x} + q_{n-2}}. \tag{3}$$

Tukaj vidimo, da je $a_n p_{n-1} + p_{n-2} = p_n$ in $a_n q_{n-1} + q_{n-2} = q_n$, zato lahko enakost (3) zapišemo kot

$$\frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}.$$

Opazimo, da se je indeks premaknil za eno navzgor, zato je izrek dokazan.

□

Posledica 1. *Za vsak verižni ulomek in naravno število n velja $c_n = \frac{p_n}{q_n}$.*

Dokaz. V enačbo iz izreka 2 vstavimo a_n in dobimo

$$\begin{aligned} < a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n > &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ c_n &= \frac{p_n}{q_n}. \end{aligned}$$

□

Izrek 3. *Fundamentalne rekurzivne zveze za enostavne verižne ulomke so:*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \tag{4}$$

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \tag{5}$$

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \tag{6}$$

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} \tag{7}$$

Dokaz. Dokažimo najprej enačbo (4). To lahko naredimo z navadno indukcijo. Najprej dokažimo za $n = 1$.

$$(a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1$$

$$(-1)^0 = 1$$

Tako je bazni primer indukcije dokazan. Predpostavimo, da enačba (4) velja za n in dokažimo, da velja tudi za $n + 1$.

$$\begin{aligned}
p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) = \\
&= p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = \\
&= (-1)(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = \\
&= (-1)(-1)^{n-1} = \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

Opazimo, da se je naš eksponent n povečal za 1, kar je bilo točno to, kar smo hoteli dokazati. S tem smo dokazali enačbo (4) za vse $n \in \mathbb{N}$.
Dokažimo zdaj še enačbo (5) z uporabo enačbe (4). Upoštevamo definicijo p_n in q_n in enačba (5) se preoblikuje v

$$\begin{aligned}
&(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = \\
&= a_n (q_{n-2} p_{n-1} - q_{n-1} p_{n-2}) = \\
&= a_n (-1)^{n-1-1} = \\
&= a_n (-1)^n.
\end{aligned}$$

Predzadnji enačaj velja zaradi enačbe (4).
Enačbo (6) dobimo z deljenjem enačbe (4) z $q_n q_{n-1}$, kar lahko storimo, saj je $q_i > 0$, za $i \geq 0$.

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} / : (q_n q_{n-1})$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

Dokaz enačbe (7) je podoben, le da smo enačbo (5) delili s $q_n q_{n-2}$. $\square$

5 Racionalni ulomki

Vsako racionalno število lahko zapišemo v obliki končnega enostavnega verižnega ulomka, kjer je $a_i \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_0$, kar je razvidno iz naslednje izpeljave

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{m_1}{n_1} = \\
&= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{n_1}{m_1}} = \\
&= a_0 + \cfrac{1}{\left\lfloor \cfrac{n_1}{m_1} \right\rfloor + r_2} = \\
&= a_0 + \frac{1}{a_1 + r_2} = \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.
\end{aligned}$$

Trditev 1. *Racionalno število lahko zapišemo kot enostaven verižni ulomek s sodim ali lihim številom členov.*

Dokaz. Naj bo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ter $\frac{a}{b} =< a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n >$. Dovolj je pokazati, da lahko število členov a_i, za $i > 0$ vedno spremenimo za ena.

- Če je $a_n = 1$, potem velja

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{1}}}},$$

  torej lahko ulomek $\frac{a}{b}$ zapišemo kot $< a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} + 1 >$. Ta ulomek ima $n - 1$ členov.

- Sicer je $a_n > 1$ in

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n - 1 + \cfrac{1}{1}}}},$$

kar zapišemo kot $< a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n - 1, 1 >$, z $n+1$ členov.

$\square$

Posledica 2. *Za enostavne verižne ulomke sta p_n in q_n tuji števili.*

Dokaz.

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

Če $k \in \mathbb{Z}$ deli p_n in q_n, potem $k|(-1)^{n-1}$, kar pomeni da je $k = \pm 1$. $\square$

6 Reševanje enačbe

Poglejmo si, kako ugotovitve pomagajo pri reševanju enačbe $ax_0 - by_0 = 1$. Zapišemo $\frac{a}{b} =< a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n >$, kjer je n lih.
Zdaj velja $\frac{a}{b} = c_n = \frac{p_n}{q_n}$. Ker sta oba ulomka okrajšana, kar sledi iz definicije enačbe in zadnje posledice, je $a = p_n$ in $b = q_n$. Iz Wallis-Eulerjevih enačb smo izpeljali

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Vstavimo $p_n = a$ in $q_n = b$ in tako dobimo

$$a q_{n-1} - p_{n-1} b = 1.$$

Vidimo, da je par (q_{n-1}, p_{n-1}) rešitev enačbe $ax_0 - by_0 = 1$.

6.1 Rešitev problema sadežev

Pri naši uganki smo iskali najmanjši celoštevilski rešitvi enačbe $8x - 81y = 65$. Z verižnimi ulomki najprej poiščimo par rešitev enačbe $8x_0 - 81y_0 = 1$. Velja

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{81} = \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} =< 0; 10, 7, 1 >= c_3.$$

Pogledamo vrednost ulomka z enim členom manj

$$c_2 =< 0; 10, 7 >= \frac{7}{71} = \frac{p_2}{q_2}.$$

Torej je par rešitev $(x_0, y_0) = (71, 7)$. Splošna rešitev enačbe je

$$x = x_0 + b \cdot k = 71 \cdot 65 + 81 \cdot k,$$
$$y = y_0 + a \cdot k = 7 \cdot 65 + 8 \cdot k,$$

za poljuben $k \in \mathbb{Z}$.
Zanima nas najmanjši pozitivni x, ki predstavlja začetno število sadežev. Dobimo ga pri vrednosti $k = -56$, ko je par rešitev enačbe $(x, y) = (79, 7)$. Najmanjše možno začetno število sadežev, pri katerem se lahko zgodi opisano dogajanje, je torej 79.

7 Dodatek

Obstajajo tudi *neskončni verižni ulomki*. O njih lahko največ povemo, če jih primerjamo s številskimi vrstami. Primer takšnega ulomka je

$$e = 2 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \cdots .$$

Literatura

[1] Zapiski predavanj predmeta proseminar B, profesorja dr. Igorja Klepa (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2018/2019).

[2] I. Majcen, *Smelo na Olimp: 303 naloge iz teorije števil*, DMFA, Ljubljana, 2011.

[3] *Generalized continued fraction*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 7. 2019], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_continued_fraction`.

[4] *Continued fractions*, v: École de recherche CIMPA-Oujda Théorie des Nombres et ses Applications, [ogled 26. 7. 2019], dostopno na `https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/ContinuedFractionsOujda2015.pdf`.