Teorija odločanja

Alen Cigler, Daniel Blažič, Jan Kamnikar
Mentor: Jakob Svetina

Povzetek

Ali ste se kdaj vprašali, kako se pravilno odločati? Mi smo se! Najprej smo se seznanili z osnovami verjetnosti in računanjem z dogodki, nato pa smo se podali na pomembno avanturo na Mars, kjer smo spoznali nekaj različnih pristopov do odločanja.

1 Uvod

Življenje je v vsakem trenutku polno odločitev. Na srečo obstaja veja matematike, ki nam pomaga pri pravilnem odločanju. Teorija odločanja nam ponuja metode za pravilno matematično odločanje, ki jih lahko uporabimo v vsakdanjem življenju. Najprej smo spoznali definicije verjetnosti, nato pa smo pomagali astronavtu priti na Mars in mu s pomočjo hevrističnih načel omogočili največji možni dobiček.

2 Neformalni uvod v verjetnost

Pri verjetnosti izvajamo poskuse, pri katerih opazujemo določene pojave, ki jih imenujemo dogodki.

2.1 Klasična definicija verjetnosti

Definicija 1. *Verjetnost nekega dogodka A, označeno s $P(A)$, je*

$$P(A) = \frac{\textit{število izidov dogodka } A}{\textit{število vseh izidov}},$$

pri pogoju, da imajo vsi izidi enake možnosti.

2.2 Statistična definicija verjetnosti

Definicija 2. *Naj bo $P(A)$ verjetnost da se zgodi dogodek A in $k_n(A)$ frekvenca dogodka A, to je število tistih ponovitev, pri katerih se dogodek A zgodi.* ***Relativna frekvenca*** *dogodka A je $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n} \in [0, 1]$. Dokazati je mogoče, da zaporedje*

$$\{f_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvengira. Tako je

$$P(A) := p = \lim_{n\to\infty} f_n(A).$$

3 Aksiomatična definicija verjetnosti

Prostoru vseh možnih izidov pravimo Ω.

3.1 Računanje z dogodki

Vsota dogodkov oz. **unija dogodkov** $A + B = A \cup B$ je dogodek, da se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

Produkt dogodkov oz. **presek dogodkov** $AB = A \cap B$ je dogodek, da se zgodita oba dogodka hkrati.

Nasprotni dogodek oz. **komplement dogodka** A je dogodek A^c, da se dogodek A ne zgodi.

Pravila za računanje z dogodki

1. **Idempotentnost** $A \cup A = A = A \cap A$
2. **Komutativnost** $A \cup B = B \cup A$ in $A \cap B = B \cap A$
3. **Asociativnost** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ in $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. **Distributivnost** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ in $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. **De Morganova zakona** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ in $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3.2 σ-algebra

Za aksiomatično definicijo verjetnosti potrebujemo definirati σ-algebro. V splošnem ni vsaka podmnožica množice Ω dogodek. Neprazna družina $\mathcal{F}$ podmnožic množice Ω je **σ - algebra**, če sta izpolnjena naslednja pogoja:

1. **zaprtost za komplemente** $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,
2. **zaprtost za števne unije** $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Izrek 1. *$\sigma -$ algebra je **zaprta za števne preseke**. To pomeni, da*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Dokaz.

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$$

je de Morganov zakon. Iz njega je razvidno, da A_i^c zadostuje prvemu pogoju, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c$ zadostuje drugemu pogoju in celoten $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$ spet zadostuje prvemu pogoju. □

Definicija 3. *V vsaki $\sigma -$ algebra sta $\emptyset$ in Ω.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{F}$ neprazna, obstaja $A \in \mathcal{F}$. Zaradi prvega pogoja je tudi $A^c \in \mathcal{F}$. Ker je $\Omega = A \cup A^c$ je tudi $\Omega \in \mathcal{F}$. Iz tega sledi $\emptyset \in \mathcal{F}$.

□

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ je najmanjša σ-algebra na Ω in $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$ je največja σ-algebra na Ω.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva (disjunktna)**, če je $A \cap B = \emptyset$. Prazni množici $\emptyset$ pravimo nemogoč dogodek, Ω pa gotov dogodek. Zaporedje $\{A_i\}_i$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če velja $\cup A_i = \Omega$ in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ (paroma nezdružljivi dogodki).

3.3 Definicija verjetnosti

Definicija 4. *Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:*

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. *za poljubno zaporedje $A_1, A_2, \ldots$ paroma nezdružljivih dogodkov velja* ***števna aditivnost****; $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

3.4 Lasnosti preslikave P

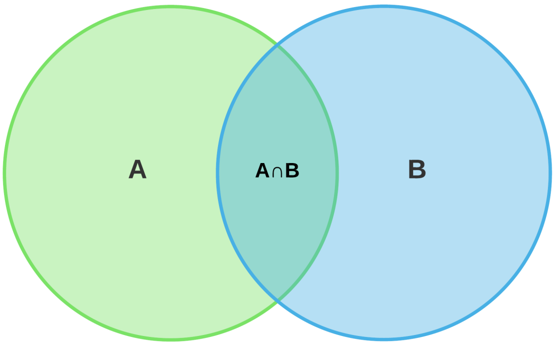
1. $P(\emptyset) = 0$
2. P je **končno aditivna**, tj. za končno mnogo paroma nezdružljivih dogodkov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ velja $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
3. P je **monotona**, tj. iz $A \subseteq B$ sledi $P(A) \leq P(B)$. Še več : iz $A \subseteq B$ sledi $P(B - A) = P(B) - P(A)$
4. $P(A^C) = 1 - P(A)$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
5. P je zvezna, tj.: iz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$ sledi $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$ in iz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \ldots$ sledi $P(\cap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$

Dokazi:

1. Iz lastnosti 3 vzamemo $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$: $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \implies P(\emptyset) = 0$
2. Iz lastnosti 3 vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$: $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$ zaradi zgornje lastnosti
3. Ker $B = A \cup (B - A)$ in $A \cap (B - A) = \emptyset$, je $P(B) = P(A) + P(B - A)$ po zgornji lastnosti. Od tod sledi $P(B) - P(A)$.

4 Pogojna verjetnost

Vzemimo verjetnostni prostor (Ω, F, P) in fiksiramo dogodek B, za katerega velja $P(B) > 0$.



Slika 1: Prikaz dogodkov A, B in A ∩ B.

Definicija 5. *Pogojna verjetnost dogodka A pri pogoju B je:*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Iz definicije pogojne verjetnosti sledi

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

iz tega pa sledi za 3 dogodke A, B in C:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cap C)) &= P(A \mid (B \cap C)) \cdot P(B \cap C) \\ &= P(A \mid (B \cap C)) \cdot P(B \mid C) \cdot P(C) \end{aligned}$$

dobljeno formulo pa lahko posplošimo na n dogodkov:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Dokaz.

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Kot lahko vidimo, se vse verjetnosti, razen tiste v n-tem števcu pokrajšajo.

□

4.1 Formula o popolni verjetnosti

Imamo poskus, ki ga bomo opravili v dveh fazah. V prvi se zgodi dogodek iz popolnega sistema dogodkov $\{H_1, H_2, \ldots\}$ (ki jih je končno ali števno

mnogo). V drugi fazi pa nas zanima dogodek A. $P(A)$ izrazimo z verjetnostmi $P(H_1), P(H_2) \dots$ in $P(A \mid H_1), P(A \mid H_2), \dots$.
Ker je

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_i H_i) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) \neq \emptyset \; za \; i \neq j,$$

je

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_i P(A \cap H_i) \\ &= \sum_i P(H_i) \cdot P(A \mid H_i). \end{aligned}$$

4.2 Bayesov izrek

Pri Bayesovem izreku nas zanima kakšna je verjetnost, da se zgodi H_i, če se zgodi A.

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_k P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}$$

4.3 Neodvisni dogodki

Dogodka A in B sta neodvisna, če je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

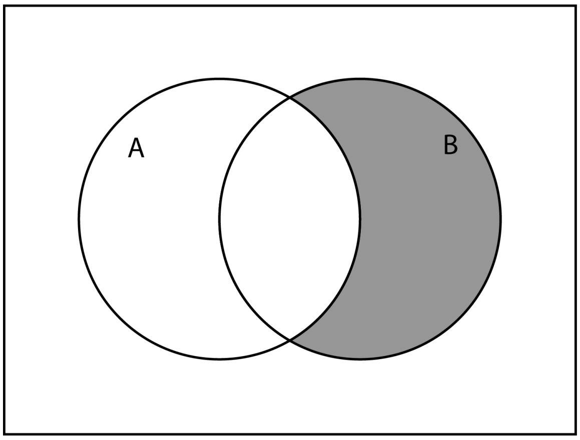
Če je $P(B) > 0$, potem je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Družina $(A_i)_{i \in I}$ je neodvisna, če za poljuben končen nabor različnih dogodkov $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ velja

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Če to zahtevamo le za $k = 2$, potem je $\{A_i\}_{i \in I}$ paroma neodvisna družina dogodkov.



Slika 2: Prikaz $A^C \cap B$.

Trditev 1. *Če sta A in B neodvisna dogodka, potem sta neodvisna tudi A^C in B. Prav tako A in B^C ter B^C in A^C.*

Dokaz. Ker je $A^C \cap B = B - (A \cap B)$, je

$$P(A^C \cap B) = P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(A^C) \cdot P(B) \Rightarrow \{A^C, B\} \textit{ sta neodvisna dogodka.}$$

Podobno lahko dokažemo tudi ostale. □

5 Odločitvena drevesa

Odločitveno drevo je grafičen pripomoček za odločanje, ki po obliki spominja na biološko drevo. V odločitvenem drevesu so narisane vse možne izbire in pripadajoče posledice, lahko pa so prikazani tudi stroški odločitev in njihove verjetnosti. V drevesu s kvadratkom označimo odločitveno točko, s krožcem pa dogodkovno (naključnostno) točko.

5.1 Zgled - Polet na Mars

Astronavt želi poleteti na Mars, kamor ga lahko pelje ena od treh vesoljskih ladij:

1. Prva bo odletela čez 1 uro in potrebuje 2 uri, da pride do Lune. Tam bo z verjetnostjo 0,8 postanek za gorivo, ki traja 5 ur. Od Lune do Marsa gre vesoljska ladja lahko po dveh poteh. Prva je daljša in traja 15 ur,

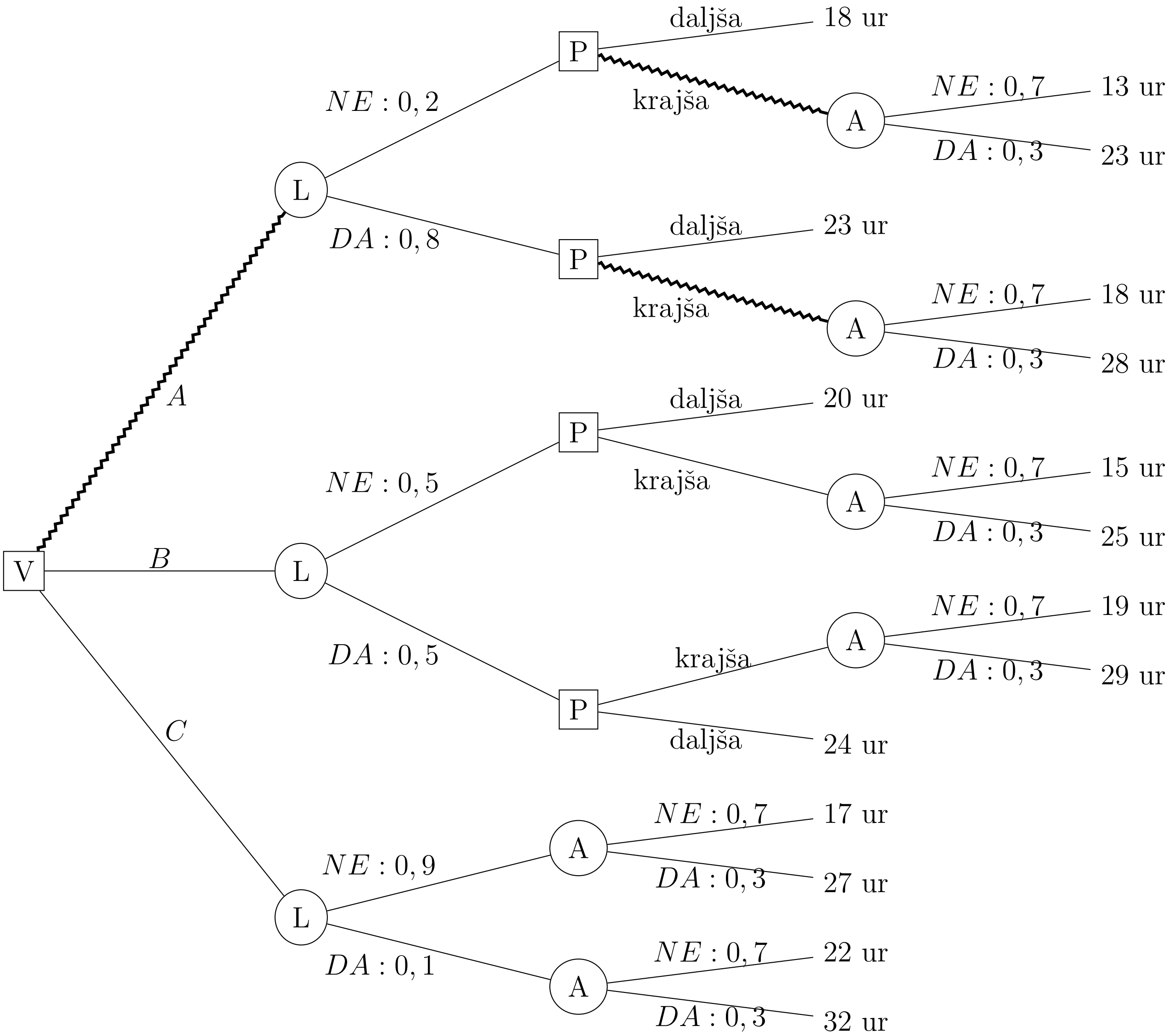
druga pa krajša in traja 10 ur. Na krajši poti obstaja 0,3 verjetnost, da bodo asteroidi, kar ladjo upočasni za 10 ur.

2. Druga bo odletela čez 3 ure in potrebuje do Lune enako kot prva. Na Luni pa bo imela postanek za gorivo z verjetnostjo 0,5, ki bo trajal 4 ure. Od Lune naprej ima enake pogoje kot prva.

3. Tretja bo odletela čez 5 ur. Postanek na Luni bo imela z verjetnostjo 0,1 in bo trajal 5 ur. Od Lune pa bo šla do Marsa le po krajši poti.

Na katero vesoljsko ladjo naj se vkrca, da bo na Marsu v čim krajšem času?

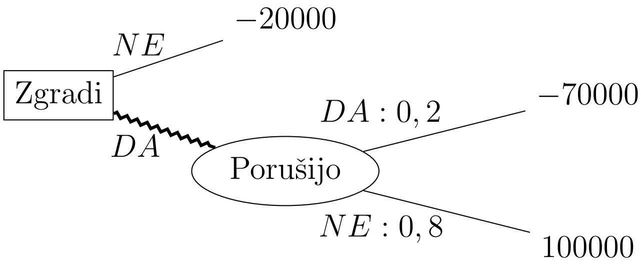
Če se odločimo za ladjo A in imamo tam postanek, dobimo izbiro med krajšo in daljšo potjo. Krajša pot bi trajala $10h$, vendar imamo še $0,3$ možnost asteroidov, ki bi nas zadržali še za $10h$, tako da bi v povprečju trajala $0.3 \cdot 28 + 0.7 \cdot 18 = 21h$. Ker je to bolje kot $23h$, se odločimo za krajšo pot. V primeru, da imamo postanek, pa po enakih izračunih spet vidimo, da je krajša pot boljša, in sicer je njeno pričakovano trajanje $16h$. Tako lahko izračunamo povprečno trajanje poti, če izberemo ladjo A, ki je $0,2 \cdot 16h + 0,8 \cdot 21h = 20h$ Po enakem postopku izračunamo še vse ostale rezultate in dobimo, da bi ladja B tudi potrebovala $20h$, ladja C pa $20,5h$ in pridemo do spoznanja, da sta ladji A in B najboljši izbiri. Zato lahko astronavt izbere katerokoli od njiju.



Slika 3: Odločitveno drevo poleta na Mars.

5.2 Zgled - Baza na Marsu

Astronavt ima nalogo postaviti bazo na Marsu. Če baze ne zgradi, mora plačati kazen 20000€. Če jo zgradi, pa obstaja možnost, da mu jo Marsovci porušijo. Ta verjetnost je 0,2. V tem primeru mora naročiti nov material iz Zemlje, kar ga stane 50000€. Če pa baze ne porušijo, dobi 100000€ nagrade. Ali naj postavi bazo?



Slika 4: Baza na Marsu 1.

Ker je verjetnost, da nam Marsovci porušijo bazo $0,2$, dobimo račun:

$$0,2 \cdot (-70000) + 0,8 \cdot 100000 = 66000€$$

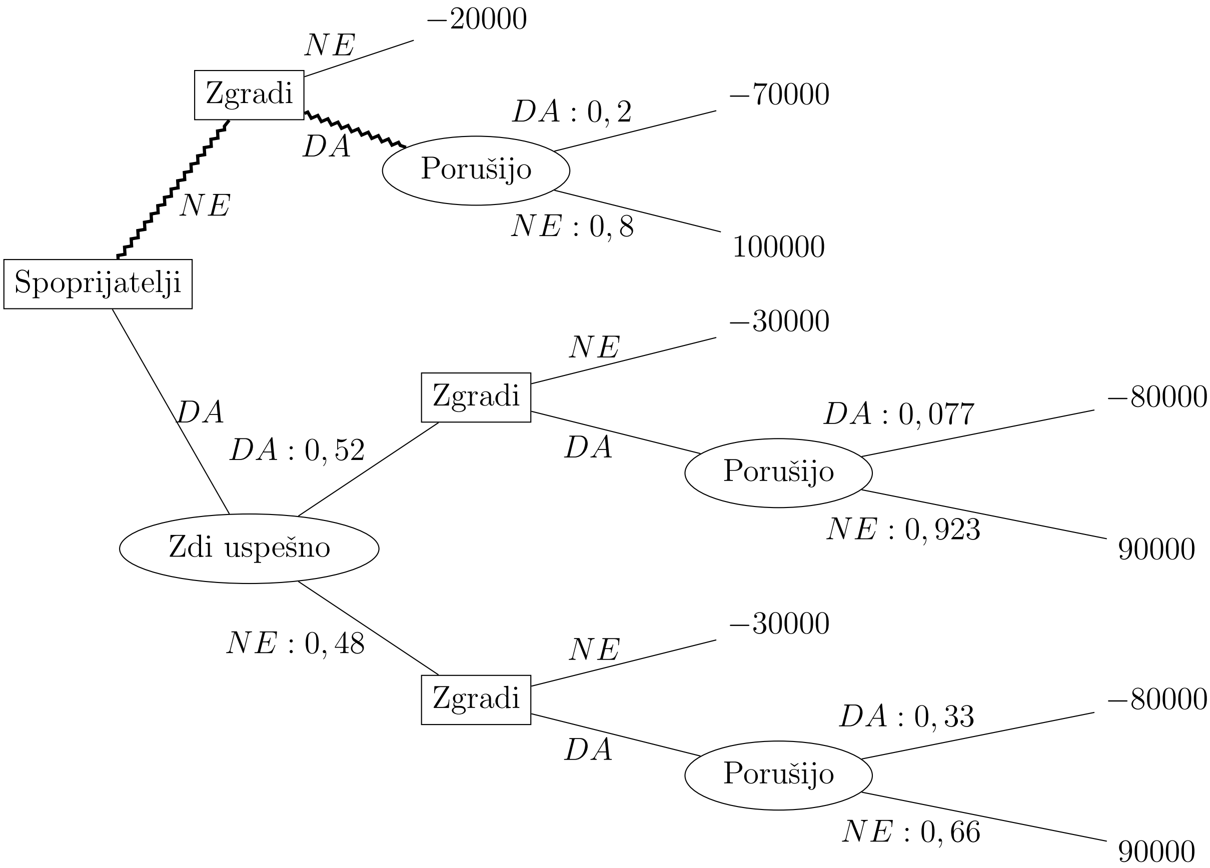
V točki odločitve se zato odločimo, da zgradimo bazo, saj je $66000 > -20000$.

Astronavt se lahko poskuša spoprijateljiti z Marsovci, kar ga stane 10000€. Astronavtu se njegovo spoprijateljevanje lahko zdi uspešno ali neuspešno. Verjetnost, da se mu zdi uspešno in mu Marsovci res ne porušijo baze, je 0,6. Verjetnost, da se mu zdi uspešno in mu jo porušijo, pa je 0,2. Ali naj se poskuša spoprijateljiti?

V tem primeru bomo definirali nekaj oznak:
U ... usešno spoprijatelji
N ... neuspešno spoprijatelji
NU ... ne uničijo baze
JU ... jo uničijo

Poznamo verjetnosti:

$$P(NU) = 0,8$$
$$P(JU) = 0,2$$
$$P(N|NU) = 0,4$$
$$P(U|NU) = 0,6$$
$$P(N|JU) = 0,8$$
$$P(U|JU) = 0,2$$



Slika 5: Baza na Marsu 2.

Zanima pa nas:

$$P(NU|N)$$
$$P(NU|U)$$
$$P(JU|N)$$
$$P(JU|U)$$

Izračunamo jih tako:

$$P(U) = P(U|JU) \cdot P(JU) + P(U|NU) \cdot P(NU) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,52$$
$$P(N) = 1 - P(U) = 0,48$$

$$P(NU|U) = \frac{P(U|NU) \cdot P(NU)}{P(U)} = 0,92 = \frac{12}{13}$$

$$P(JU|U) = 1 - P(NU|U) = \frac{1}{13}$$

$$P(NU|N) = \frac{P(N|NU) \cdot P(NU)}{P(N)} = \frac{2}{3}$$

$$P(JU|N) = 1 - P(NU|N) = \frac{1}{3}$$

Če izračunamo pričakovano vrednost po enakem postopku, kot v prvem zgledu, dobimo povprečno vrednost v primeru, da se spoprijateljimo, 56000€. Torej je to slabša odločitev, saj je 56000 < 66000.

6 Teorija odločanja

Za vsak problem poznamo množico dopustnih rešitev $\mathcal{D}$. V njej se nahajajo vse vrednosti, ki so dovoljene kot rešitev danega problema. Vsaka rešitev $X \in \mathcal{D}$ ima pripadajočo množico rezultatov $\mathcal{R}$, z znanimi pogojnimi verjetnostmi $P(R|X), R \in \mathcal{R}$, ki nam pove, kolikšna je ob izbrani rešitvi verjetnost rezultata R. Poleg tega nam je znana tudi koristnost posameznega izida $q(X, R)$, ki nam pove, kako ugoden je za odločevalca izid. Na podlagi tega se lahko odločimo za najboljšo možno izbiro. Pri tem si pomagamo s kriterijsko funkcijo - funkcijo, po kateri iz verjetnosti in koristnosti posameznih rezultatov pri določeni odločitvi izračunamo *pričakovano vrednost* odločitve X.

$$f(X) = \sum_{R \in \mathcal{R}} q(X, R) \cdot P(R|X)$$

Pri problemih, ki jih bomo reševali, si seveda želimo izbrati odločitev, ki nam bo prinesla najboljši možni izid. Ta je glede na naravo problema lahko največja ali najmanjša pričakovana vrednost, ki jo izračunamo. Formalno rečemo, da si želimo rešiti optimizacijski problem $(\mathcal{D}, f, min)$ ali $(\mathcal{D}, f, max)$, kjer $\mathcal{D}$ predstavlja množico vseh dovoljenih rešitev, f je kriterijska funkcija, min in max pa nam povesta ali iščemo največjo ali najmanjšo pričakovano vrednost.

6.1 Zgled - Marsovska trgovina

Po uspešni postavitvi baze na rdečem planetu našega astronavta začne skrbeti, kako bo zaslužil za vsakdanji kruh. Odloči se odpreti trgovino, kjer bo prodajal Mars čokolade. Od tovarne na Zemlji jih odkupi po ceni 0,2€/kos, Marsovcem pa jih prodaja po ceni 0,4€/kos. Če od tovarne naroči premalo čokolad, jih mora naknadno dokupiti do potrebne količine in sicer po ceni 0,3€/kos. Na koncu dneva mora čokolade, ki jih ni uspel prodati, vrniti tovarni, ki mu za vsako vrne 0,15€. Želi torej naročiti tako število čokolad, da jih bo rabil čim manj dokupiti ali vrniti, obenem pa bodo posledice, v kolikor se to vseeno zgodi, kolikor je mogoče malo škodljive. V interesu astronavta je maksimizirati dobiček, torej rešujemo optimizacijski problem $(\mathcal{D}, f, max)$. Z nekaj poglabljanja v marsovsko psihologijo mu uspe zbrati naslednje podatke o povpraševanju:

Količina	**Verjetnost**
50	0,1
60	0,15
70	0,3
80	0,2
90	0,15
100	0,1

Na podlagi teh podatkov izračunamo najbolj verjeten zaslužek za vsako količino tako, da zmnožimo zaslužek z eno čokolado s številom prodanih čokolad, upoštevamo pa tudi, da obstaja verjetnost, da moramo nekaj čokolad dokupiti in verjetnost, da jih moramo kaj vrniti tovarni.

$$P(50) = 50{\cdot}0,2{+}0,1{\cdot}(0,15{\cdot}10{+}0,3{\cdot}20{+}0,2{\cdot}30{+}0,15{\cdot}40{+}0,1{\cdot}50) = 12,45€$$

$$P(60) = 60{\cdot}0,2{+}0,1{\cdot}(0,3{\cdot}10{+}0,2{\cdot}20{+}0,15{\cdot}30{+}0,1{\cdot}40){-}0,1{\cdot}10{\cdot}(0,05{+}0,2) = 13,30€$$

$$P(70) = 70{\cdot}0,2{+}0,1{\cdot}(0,2{\cdot}10{+}0,15{\cdot}20{+}0,1{\cdot}30){-}0.25{\cdot}(0,15{\cdot}10{+}0,1{\cdot}20) = 13,93€$$

$$P(80) = 80{\cdot}0,2{+}0,1{\cdot}(0,15{\cdot}10{+}0,1{\cdot}20){-}0.25{\cdot}(0,3{\cdot}10{+}0,15{\cdot}20{+}0,1{\cdot}30) = \underline{14,10€}$$

$$P(90) = 90{\cdot}0,2{+}0,1{\cdot}(0,1{\cdot}10){-}0.25{\cdot}(0,2{\cdot}10{+}0,3{\cdot}20{+}0,15{\cdot}30{+}0,1{\cdot}40) = 13,98€$$

$$P(100) = 100{\cdot}0,2{-}0.25{\cdot}(0,15{\cdot}10{+}0,2{\cdot}20{+}0,3{\cdot}30{+}0,15{\cdot}40{+}0,1{\cdot}50) = 13,88€$$

Iz izračunanega ugotovimo, da dobimo navečjo pričakovano vrednost dobička pri nakupu 80 čokolad, torej je to najboljša odločitev, ki jo lahko sprejmemo in tako rešitev našega problema.

6.2 Kriterijska funkcija v primeru nedoločnosti

Na sistem lahko vpliva tudi okolje. Naj se vsa možna stanja okolja nahajajo v množici $\mathcal{S}$. Glede na stanje $S \in \mathcal{S}$ zdaj pri rešitvi X dosežemo rezultat R z verjetnostjo $P(R|X,S)$. Verjetnost, da je okolje v stanju S označimo s $P(S)$. Običajno teh verjetnosti ne poznamo. V kolikor bi jih, bi imeli opravka z istim vprašanjem kot prej - tveganjem. V tem primeru bi bila kriterijska funkcija

$$f(X) = \sum_{R \in \mathcal{R}} q(X,R) \sum_{S \in \mathcal{S}} P(R|X,S) \cdot P(S)$$

Če verjetnosti ne poznamo, jih lahko nadomestimo s približki. To lahko storimo s pomočjo (subjektivnih) ocen ali pa izhajamo iz hevrističnih načel - **pravil**.

6.2.1 Waldovo pravilo - pravilo previdneža

Waldovo pravilo predpostavlja, da se okolje nahaja v najneugodnejšem stanju. Označimo ga z S^*.

$$Q(X,S^*) = \sum_{R \in \mathcal{R}} q(X,R) \cdot P(R|X,S^*)$$

Potem za nalogo $(\mathcal{D}, f_W, min)$ iščemo rešitev

$$f_W(X) = \max_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S).$$

Za nalogo $(\mathcal{D}, f_W, max)$ iščemo rešitev

$$f_W(X) = \min_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S).$$

6.2.2 Hurwiczovo pravilo

Hurwiczovo pravilo predpostavlja, da se okolje z verjetnostjo α nahaja v najugodnejšem stanju in z verjetnostjo $1-\alpha$ v najmanj ugodnem. Z drugimi besedami, vrednost α predstavlja našo nagnjenost k tveganju - do kakšne mere pričakujemo, da bo okolje v najboljšem stanju. Podobno kot prej torej za problem $(\mathcal{D}, f_H, min)$ iščemo rešitev

$$f_H(X) = \alpha \cdot \min_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S) + (1-\alpha) \cdot \max_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S)$$

in za nalogo $(\mathcal{D}, f_W, max)$

$$f_H(X) = \alpha \cdot \max_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S) + (1-\alpha) \min_{S \in \mathcal{S}} Q(X,S).$$

V primeru, ko je $\alpha = 0$ se Hurwiczovo pravilo obnaša enako kot Waldovo pravilo, pri $\alpha = 1$ pa dobimo **pravilo optimista**, ki je podobno Waldovemu pravilu, le da predpostavljamo, da je okolje v najboljšem možnem stanju.

6.2.3 Laplaceovo pravilo

Laplaceovo pravilo trdi, da če so verjetnosti, da je okolje v posameznem stanju, nepoznane, jih moramo obravavati enakovredno. Vsa stanja imajo torej isto verjetnost:

$$P(S) = \frac{1}{|S|}.$$

Tako dobimo kriterijsko funkcijo:

$$f_L(X) = \frac{1}{|S|} \sum_{S \in \mathcal{S}} Q(X, S).$$

6.2.4 Savageovo pravilo - pravilo najmanjšega obžalovanja

Savageovo pravilo pravi, da ker nimamo vpliva nad stanji v okolju, moramo dano rešitev primerjati z drugimi rešitvami pri istem stanju okolja. Zanima nas **mera obžalovanja** za vsako posamezno rešitev pri določenem stanju. To je vrednost, ki nam pove koliko slabša je dana odločitev pri stanju S od najboljše možne odločitve pri istem stanju. Pri minimizacijskem problemu jo definiramo kot

$$Q^*(X, S) = Q(X, S) - \min_{Y \in \mathcal{D}} Q(Y, S),$$

pri maksimizacijskem pa

$$Q^*(X, S) = \max_{Y \in \mathcal{D}} Q(Y, S) - Q(X, S).$$

Obžalovanja za vse kombincije odločitev in možnih stanj razvrstimo v tabelo. Pravimo ji **tabela obžalovanja**. Za vsako stanje izpišemo največjo mero obžalovanja. Izmed izpisanih vrednosti izberemo najmanjšo in pripadajoča odločitev je tista, ki jo želimo izbrati. Podobno kot pri Waldovem pravilu torej izberemo tisto odločitev, ki ima v najslabšem stanju najmanjše obžalovanje. Če sedaj na primer zatsavimo minimizacijski problem $(\mathcal{D}, f_S, min)$ je naša kriterijska funkcija

$$f_S(X) = \max_{S \in \mathcal{S}} Q^*(X, S).$$

6.3 Zgled - Marsovski hotel

Po uspehu in visoki profitabilnosti trgovine je naš junak dobil pravi podjetniški zagon. Tokrat se je odločil odpreti hotel, a je naletel na težavo. Zanima ga, koliko postelj naj kupi, da jih bo čim manj ostalo praznih, prav tako pa jih ne sme prepogosto primanjkovati. Tokrat nima nobenih pričakovanih podatkov o svojih bodočih strankah. Odločil se je, da bo nakupil 20, 30, 40 ali 50 postelj in ve, da bo vedno hotel naenkrat obiskalo 0, 10, 20, 30, 40 ali 50 gostov. Glede na stroške izgradnje in zaslužek sestavi tabelo dobička:

	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

Poglejmo, kako bi se odločil s posameznim pravilom, ki smo ga predstavili, da bi maksimiziral svoj dobiček. Za vsak odločevalni model bomo tu izračunali po en primer. Ostale vrednosti izračunamo na podoben način.

Waldovo pravilo:

$$f_W(20) = min\{-121, 62, 245, 245, 245, 245\} = -121$$

Optimist:

$$f_{OPT.}(20) = max\{-121, 62, 245, 245, 245, 245\} = 245$$

Hurwiczovo pravilo:

$$\alpha = 0,1;\ f_W(20) = 0,1 \cdot (-121) + (1 - 0,1) \cdot 245 = 208,4$$

$$\alpha = 0,5;\ f_W(20) = 0,5 \cdot (-121) + (1 - 0,1) \cdot 245 = 62$$

Laplaceovo pravilo:

$$f_L(20) = \frac{-121 + 62 + 245 + 245 + 245 + 245}{6} = 153$$

Savageovo pravilo:

Izpolnimo tabelo obžalovanja:

	0	10	20	30	40	50	Največje obžalovanje
20	0	0	0	135	270	405	405
30	47	48	47	0	135	270	270
40	95	95	95	48	0	135	135
50	143	143	144	96	47	0	143

Sedaj lahko primerjamo kakšna bi bila pravilna odločitev po različnih odločevalnih modelih:

Odločitev	**Wald**	**Optimist**	**Hurwicz**			**Laplace**	**Savage**
			$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,9$		
20	-121	245	-84	62	208	153	405
30	-168	380	-114	106	325	198	270
40	-216	515	-143	150	442	210	135
50	-264	650	-84	193	560	193	135
$f(X^3)max$	-121	650	-84	193	560	210	135
X^3	20	50	20	50	50	40	40

Opazimo, da po različnih pravilih dobimo precej različne odločitve. Po bolj pesimističnih pravilih bi kupili 20 postelj, po bolj optimističnih 50 postelj, pri Laplaceovem in Savageovem pravilu pa 40 postelj.

Literatura

[1] Arjana Žitnik, *Operacijske raziskave: Teorija odločanja*, 2019

[2] Odločitvena drevesa (dostop 1. 8. 2019),
https://sl.m.wikipedia.org/wiki/Odlo%C4%8Ditveno_drevo

[3] Pogojna verjetnost (dostop 1. 8. 2019),
https://sl.m.wikipedia.org/wiki/Pogojna_verjetnost

[4] Slika dogodka A ∩ B (dostop 31. 7. 2019)
https://www.lucidchart.com/blog/venn-diagram-symbols-explained

[5] Slika dogodka A^C ∩ B (dostop 31. 7. 2019)
http://cablo.commongroundsapex.co/venn-diagram-2-sets/