Schubertov račun

Lan Sevčnikar, Tina Šafarič, Neža Vipavc
Mentor: Rok Gregorič

Povzetek

Pri projektu smo se ukvarjali s Schubertovim računom. To je metoda za reševanje posebnih geometrijskih nalog, ki imajo številske rešitve. Z uporabo Schubertovega računa smo rešili nekaj nalog, kot na primer, koliko premic seka 4 dane premice v prostoru.

1 Uvod

Schubertov račun je način reševanja problemov enumerativne geometrije. Razvil ga je Hermann Schubert okoli leta 1840. Enumerativna geometrija je podveja algebraične geometrije.

Osnovna ideja Schubertovega računa je algebraična manipulacija specifičnih pogojev na lego premice, uporaba pa je sestavljena iz treh korakov, ki so opisani v poglavju Uporaba Schubertovega računa.

Schubertov račun je tudi osrednja tema Hilbertovega 15. problema. Problem zahteva postavitev strogih osnov Schubertovega računa, kar je matematikom tudi uspelo.

Pri tem projektu nas je zanimala predvsem uporaba Schubertovega računa, zato smo se lotili naslednjih nalog:

1. Koliko premic seka 4 dane premice v prostoru?
2. Koliko premic seka 4 zvite kubike v prostoru?
3. Koliko skupnih sekant imata dve zviti kubiki?[1]

Pri vseh nalogah in primerih smo predpostavili, da so objekti v generični (splošni) legi. Generična lega je postavitev objektov, ki ohrani svoje lastnosti tudi pri manjših spremembah položaja objektov.

2 Osnovni pogoji

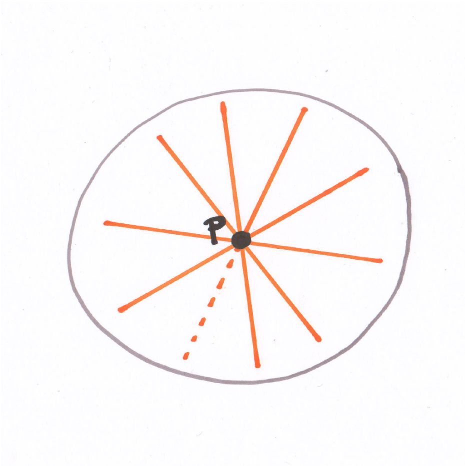
Za reševanje nalog, ki smo si jih zastavili, so uporabni naslednji osnovni pogoji:
σ_p ...... premica vsebuje dano točko,
σ_e ...... premica leži na dani ravnini,
σ_g ...... premica seka dano premico,
σ_s ...... premica gre skozi dano točko in seka dano premico,
1 ...... premica je enaka dani premici,
0 ...... takšne premice ni.
T ...... poljubna premica v prostoru.

Opomba 1. Oznake osnovnih pogojev so poimenovane po nemških imenih za geometrijske objekte:
p ... punkt (točka),
e ... ebene (ravnina),
g ... gerade (premica),
s ... strahl (šop).

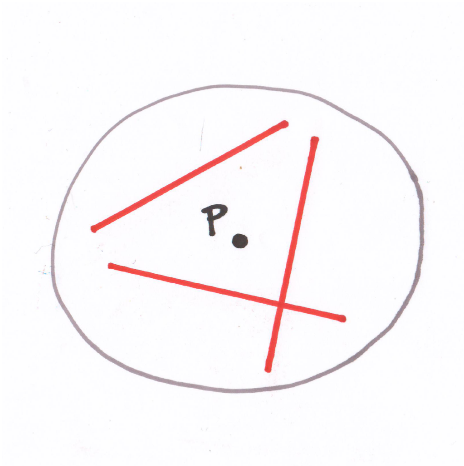
S pomočjo slik si poglejmo, kaj ti osnovni pogoji pomenijo.

Pogoj σ_p Iz slike 1 je razvidno, da pogoju σ_p ustrezajo vse premice v prostoru, ki potekajo skozi dano točko P v prostoru. Kot lahko vidimo na sliki 2, pa premice v prostoru, ki ne potekajo skozi točko P, pogoju σ_p ne ustrezajo.

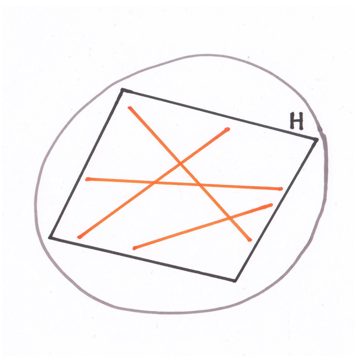
[1]Vsa neznana terminologija je razložena pri postopku reševanja posamezne naloge.



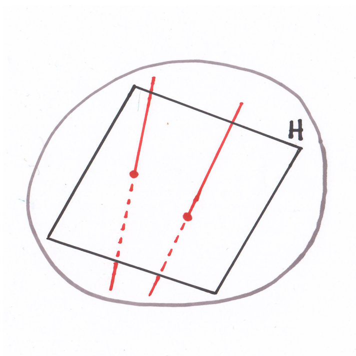
Slika 1: Premice, ki zadoščajo σ_p.



Slika 2: Premice, ki ne zadoščajo σ_p.



Slika 3: Premice, ki zadoščajo σ_e.

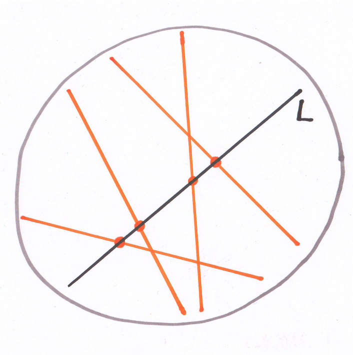


Slika 4: Premice, ki ne zadoščajo σ_e.

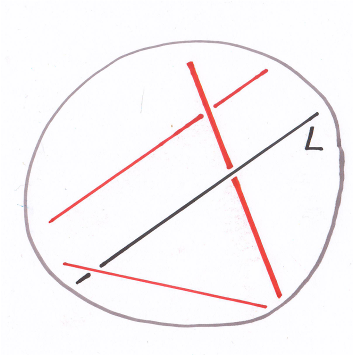
Pogoj σ_e Kot lahko vidimo na sliki 3, pogoju σ_e ustrezajo vse premice v prostoru, ki (v celoti) ležijo na dani ravnini H. Na sliki 4 pa vidimo, da pogoju σ_e ne ustrezajo premice, ki imajo z ravnino H le 1 skupno točko (jo prebadajo).

Pogoj σ_g Iz slike 5 je razvidno, da pogoju σ_g ustrezajo premice, ki sekajo dano premico L v prostoru. Pogoju σ_g pa ne ustrezajo vse premice v prostoru, ki s premico L v prostoru nimajo skupnih točk, kot je razvidno iz slike 6.

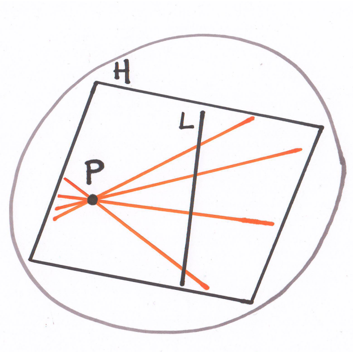
Pogoj σ_s Pogoju σ_s ustrezajo vse premice v prostoru, ki potekajo skozi dano točko in sekajo dano premico. Pogoj lahko ekvivalentno povemo tudi tako, da so ustrezne vse premice, ki ležijo na dani ravnini in potekajo



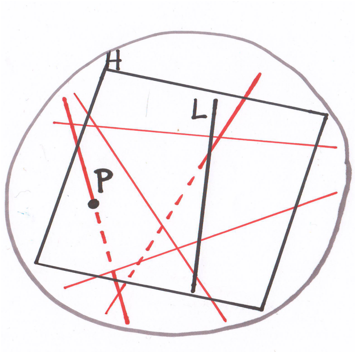
Slika 5: Premice, ki zadoščajo σ_g.



Slika 6: Premice, ki ne zadoščajo σ_g.



Slika 7: Premice, ki zadoščajo σ_s.



Slika 8: Premice, ki ne zadoščajo σ_s.

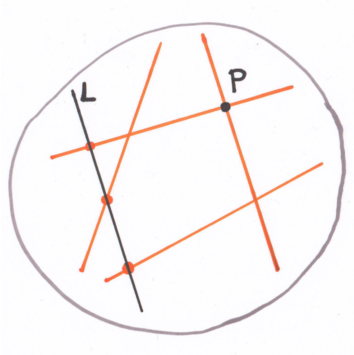
skozi dano točko na tej ravnini. Oba načina sta razvidna na sliki 7. Potemtakem pogoju σ_s ne ustrezajo tiste premice na ravnini, ki ne potekajo skozi dano točko, ter vse premice, ki ne ležijo na ravnini. To lahko vidimo na sliki 8.

3 Računanje s pogoji

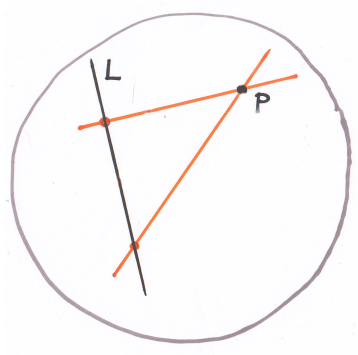
Recimo, da sta σ in σ' dva pogoja na premico. Pri računanju s pogoji uporabljamo dve operaciji: seštevanje in množenje.

Definicija 1. *Vsota pogojev $\sigma + \sigma$' je pogoj, da premica zadošča pogoju σ* ***ali*** *pogoju σ'.*

Definicija 2. *Produkt pogojev σ σ' je pogoj, da premica zadošča hkrati pogoju σ* ***in*** *pogoju σ'.*



Slika 9: Vsota pogojev σ_g in σ_p.



Slika 10: Produkt pogojev σ_g in σ_p.

3.1 Množenje osnovnih pogojev

Pri nadaljnem računanju bomo potrebovali produkte osnovnih pogojev.

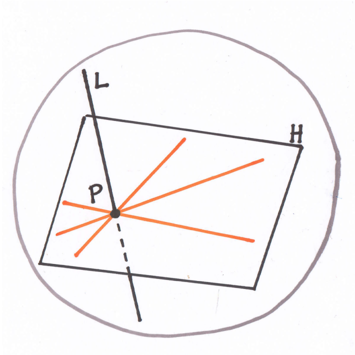
Pogoj $\sigma_e\sigma_g$: Pogoj najdemoga na sliki 11. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1, ki jo iščemo, leži v dani ravnini H in seka dano premico L. Ker premica L seka ravnino H le v eni točki P, lahko produkt pogojev $\sigma_e\sigma_g$ pojasnimo tudi kot: premica leži v dani ravnini in gre skozi točko v tej ravnini. Spomnimo se, da je to osnovni pogoj σ_s. Torej je $\sigma_e\sigma_g = \sigma_s$.

Pogoj $\sigma_e\sigma_p$: Pogoj najdemo na sliki 12. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1 zadošča hkrati pogojema σ_e in σ_p, če leži v dani ravnini H in gre skozi dano točko P. Ker gre za generično postavitev, točka P ne leži v ravnini H, zato nobena premica L_1, ki leži v ravnini H ne gre skozi točko P. Sledi $\sigma_e\sigma_p = 0$.

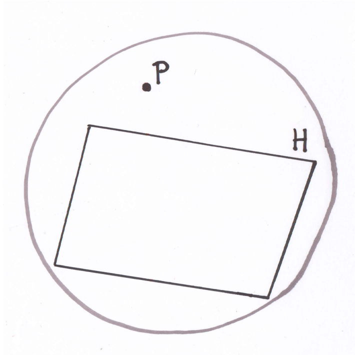
Pogoj $\sigma_p\sigma_g$: Pogoj najdemo na sliki 13. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1 zadošča obema pogojema, če seka dano premico L in gre skozi dano točko P, kar pa je točno pogoj σ_s. Ugotovimo, da je $\sigma_p\sigma_g = \sigma_s$.

Pogoj $\sigma_s\sigma_p$: Pogoj najdemo na sliki 14. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1 zadošča obema pogojema, če leži v ravnini H in gre skozi točko $P \in H$ ter točko $P' \notin H$. Da L_1 leži v H mora veljati $P \in H$, kar je protislovje. To pomeni, da velja $\sigma_s\sigma_p = 0$.

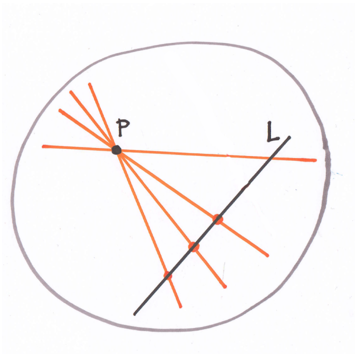
Pogoj $\sigma_s\sigma_e$: Pogoj najdemo na sliki 15. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1 zadošča obema pogojema, če leži v ravnini H in gre skozi točko $P \in H$ ter leži v ravnini H'. Ker gre za generično situacijo, premica L ne more ležati hkrati v ravnini H in v ravnini H'. Torej je $\sigma_s\sigma_e = 0$.



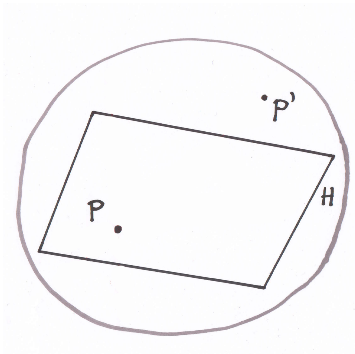
Slika 11: Premice, ki zadoščajo $\sigma_e\sigma_g$.



Slika 12: Premice, ki zadoščajo $\sigma_e\sigma_p$, ne obstajajo.



Slika 13: Premice, ki zadoščajo $\sigma_p\sigma_g$.

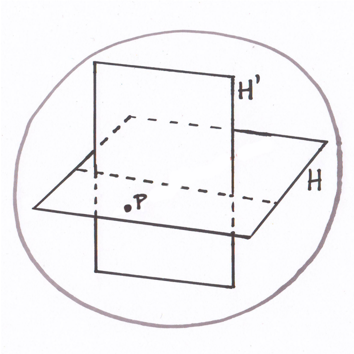


Slika 14: Premice, ki zadoščajo $\sigma_p\sigma_s$, ne obstajajo.

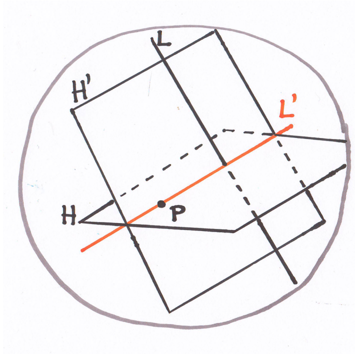
Pogoj $\sigma_s\sigma_g$: Pogoj najdemo na sliki 16. Z besedami ga lahko opišemo: premica L_1 zadošča obema pogojema, če leži v ravnini H in gre skozi točko $P \in H$, hkrati pa seka premico L, ki ne leži v ravnini H. Premica L_1 leži v ravnini H', ki jo določata točka P in premica L. Presek ravnin H in H' je premica, torej mora biti premica L prav ta premica. Sledi, da je $\sigma_s\sigma_g = 1$.

3.2 Kvadrati pogojev

Pogoje na premice lahko tudi potenciramo, na primer $\sigma_p^2 = \sigma_p\sigma_p'$. Pogoja σ_p in σ_p' nista ista temveč sta ekvivalentna, t.j. točki pri posamičnem pogoju sta različni.



Slika 15: Premice, ki zadoščajo $\sigma_s\sigma_e$, ne obstajajo.



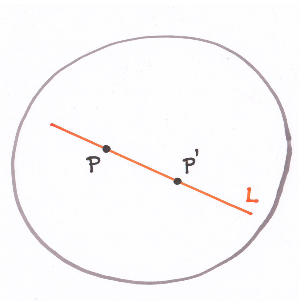
Slika 16: Premica, ki zadošča $\sigma_g\sigma_s$.

Pogoj σ_p^2: Potenciranje σ_p^2 ubesedimo kot: premica L_1 zadošča obema pogojema, če gre skozi točko P in skozi točko P'. Gre za generično situacijo zato velja $P \neq P'$. Dve različni točki vedno določata le eno premico, zato je L_1 točno ta premica (glej sliko 17). Sledi: $\sigma_p^2 = 1$.

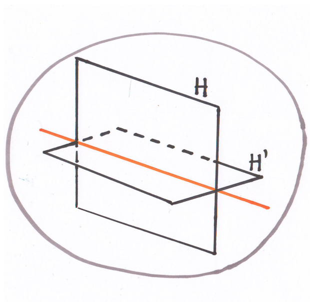
Enako izračunamo še kvadrate preostalih osnovnih pogojev.

Pogoj σ_e^2: Kvadrat σ_e^2 razložimo kot: premica L_1 zadošča obema pogojema, če leži v ravnini H in v ravnini H'. Presek dveh ravnin je premica, zato je premica L_1 točno ta premica (glej sliko 18). Ugotovimo: $\sigma_e^2 = 1$.

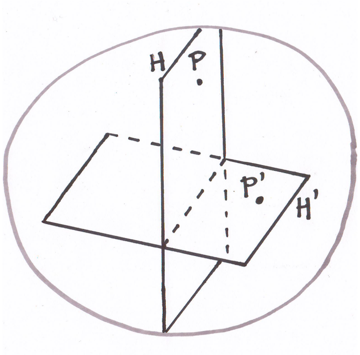
Pogoj σ_s^2: Kvadrat σ_s^2 pomeni: premica L_1 zadošča obema pogojema, če leži v ravnini H in gre skozi točko $P \in H$ ter leži v ravnini H' ter gre skozi točko $P' \in H'$. Spet gre za presek dveh ravnin, kar je premica. Ker gre za generično situacijo, točki P in P' ne ležita na tej premici, kar pomeni, da ni rešitve (glej sliko 19). Torej: $\sigma_s^2 = 0$.



Slika 17: Premica, ki zadošča σ_p^2.



Slika 18: Premica, ki zadošča σ_e^2.



Slika 19: Premice, ki zadoščajo σ_s^2, ne obstajajo.

Pogoj σ_g^2: Velja tudi $\sigma_g^2 = \sigma_e + \sigma_p$, kar bomo razložili in dokazali kasneje, saj še nimamo dovolj podatkov za izračun. (Glej: Poglavje 5, Uporaba Schubertovega računa)

3.3 Množenje pogojev s števili

Na množenje pogojev s števili lahko gledamo kot na večkratno seštevanje. Ravnamo enako kot pri množenju s števili.

Primer 1. Na ta način je $3a = a + a + a$, kjer je a poljubno število. Enako velja za pogoje: $3\sigma = \sigma + \sigma + \sigma$, kjer je σ poljuben pogoj.

Spomnimo se, da potenciranje pogojev pomeni množenje ekvivalentnih (ne istih) pogojev. Enako je tukaj, gre namreč za seštevanje ekvivalentnih (ne istih) pogojev.

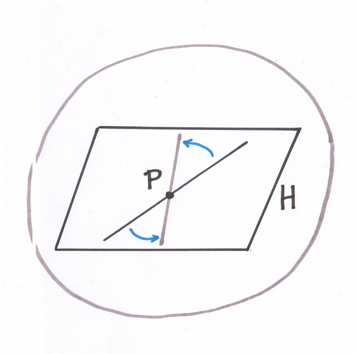
4 Dimenzije pogojev

Denimo, da imamo pogoj σ. **Dimenzija pogoja** σ oziroma **število prostih parametrov** je število načinov, na katere lahko spreminjamo premice v prostoru, ki zadoščajo pogoju σ, tako da bodo še vedno zadoščale pogoju σ. Dimenzijo pogoja σ označimo z $\dim(\sigma)$.

4.1 Dimenzije osnovnih pogojev

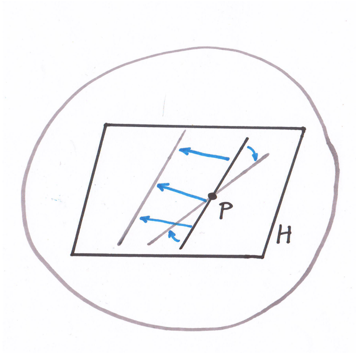
Določili bomo $\dim(\sigma)$ osnovnim pogojem, torej σ_s, σ_e, σ_p, σ_g, T in 1.

Pogoj σ_s: Premice zadoščajo σ_s če grejo skozi točko P in ležijo na ravnini H. Te premice se lahko vrtijo samo okoli točke P po ravnini H. Vrtenje v ravnini štejemo kakor eno spreminjanje. Torej je $\dim(\sigma_s) = 1$.



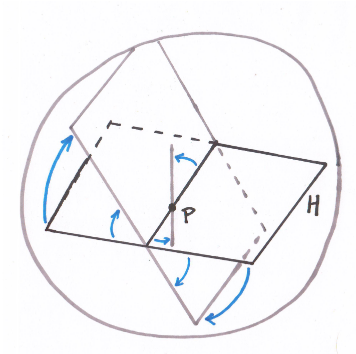
Slika 20: Dimenzije σ_s.

Pogoj σ_e: Premice zadoščajo σ_e, če ležijo na ravnini H. Te premice se lahko vrtijo in se lahko premikajo po ravnini H. Iz vsake premice, ki zadošča pogoju σ_e, lahko pridemo do vsake druge take premice, tako da jo rotiramo po ravnini H ter transliramo v zgolj eni smeri po H. Torej je premikanje zgolj v eno smer dovolj in šteje za en parameter. Sledi, da je $\dim(\sigma_e) = 1 + 1 = 2$.



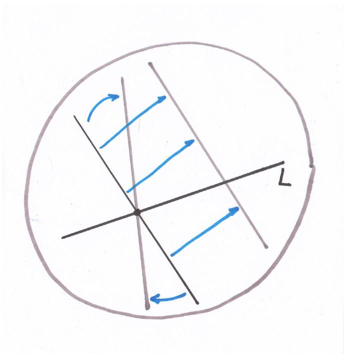
Slika 21: Dimenzije σ_e.

Pogoj σ_p: Premice zadoščajo σ_p če grejo skozi točko P. Te premice se lahko vrtijo v poljubni ravnini H, v kateri ležijo. Poleg tega lahko tudi vrtimo ravnino H vzdolž fiksne premice skozi P, ki leži v ravnini H. S tema operacijama lahko iz poljubne premice, ki zadošča pogoju σ_p, dobimo poljubno drugo takšno premico. Torej smo dobili dimenzijo in je $\dim(\sigma_p) = 1 + 1 = 2$.



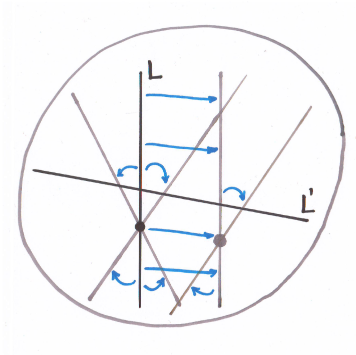
Slika 22: Dimenzije σ_p.

Pogoj σ_g: Premice zadoščajo σ_g, če sekajo premico L. Takšno premico lahko vrtimo okoli točke preseka s premico L, poleg tega pa jih lahko s to točko premikamo vzdolž premice L. Zato ker je $\dim(\sigma_p) = 2$, vemo da imamo zaradi rotacije dve dimenziji in, ker lahko točko preseka z L premikamo po premici L, dobimo še eno dimenzijo. S temi operacijami lahko iz poljubne premice, ki zadošča pogoju σ_g, dobimo poljubno drugo takšno premico. Torej je $\dim(\sigma_g) = \dim(\sigma_p) + 1 = 2 + 1 = 3$.



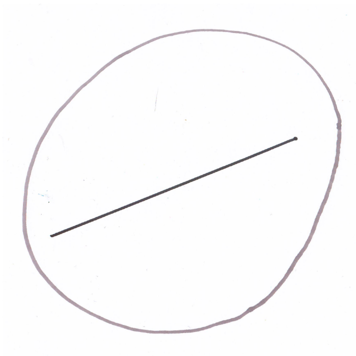
Slika 23: Dimenzije σ_g.

Pogoj T: Vse premice v prostoru zadoščajo pogoju T. Če želimo prešteti parametre pogoja T, si lahko predstavljamo premico L in gledamo vse premice, ki zadoščajo σ_g glede na to premico. To nam da 3 dimenzije, saj je $\dim(\sigma_g) = 3$. To premico pa lahko tudi transliramo vzdolž poljubne druge premice, kar nam da še eno dimenzijo. Na ta način smo dobili dimenzije pogoja T, saj lahko samo z eno translacijo L vzdolž dane druge premice L' in s spreminjanjem znotraj pogoja σ_g (glede na L), dosežemo poljubno drugo premico v prostoru. Iz tega sledi, da je $\dim(T) = \dim(\sigma_g) + 1 = 3 + 1 = 4$.



Slika 24: Dimenzije T.

Pogoj 1: Pogoju 1 zadošča samo ena premica. Te premice ne moremo spremeniti tako, da bi še vedno ustrezala pogoju 1, torej sledi, da je $\dim(1) = 0$.



Slika 25: Pogoj 1 ima dimenzijo 0.

V naslednji tabeli so zbrani vsi osnovni pogoji ter število dimenzij, ki jih ta pogoj ima:

σ	$dim(\sigma)$
T	4
σ_g	3
σ_p	2
σ_e	2
σ_s	1
1	0.

4.2 Ključno dejstvo Schubertovega računa

Dimenzije pogojev so ključnega pomena za Shubertov račun, zaradi naslednjega pomembnega izreka, ki ga v tem članku ne bomo dokazovali.

Izrek 1 (Ključno dejstvo Shubertovega računa)**.** *Če je σ pogoj na premice v prostoru z $\dim(\sigma) = d$, za $d = 0, 1, 2, 3$ ali 4, potem je možno σ zapisati kot večkratnik osnovnih pogojev ustrezne dimenzije.*

V kolikor je $d = \dim(\sigma)$, potem po zgornjem izreku velja

d	σ
0	a
1	$a\sigma_s$
2	$a\sigma_p + b\sigma_e$
3	$a\sigma_g$
4	aT

za neki nenegativni celi števili a in b.

5 Uporaba Schubertovega računa

Za uporabo Schubertovega računa sledimo naslednjemu postopku. Za dani pogoj σ:

i) določimo $\dim(\sigma)$,

ii) zapišemo σ z osnovnimi pogoji po zgornjem izreku,

iii) uporabimo znanje o računanju z osnovnimi pogoji, da določimo celoštevilske konstante.

Za i) je uporabno dejstvo: Naj bo $\dim(Z) = n$ in $X, Y \subseteq Z$. Če je $\dim(X) = k$ in $\dim(Y) = l$ ter $k + l \geq n$, potem je $\dim(X \cap Y) = k + l - n$.

Sedaj imamo vse potrebno, da lahko uporabimo Schubertov račun za dokaz $\sigma_g^2 = \sigma_e + \sigma_p$:

Dokaz.

1. določimo $\dim(\sigma_g^2)$. Najprej označimo za vsako izmed
$\sigma_g \ldots\ldots \{$vse premice, ki se sekajo z $L\} = X$
$\sigma_g' \ldots\ldots \{$vse premice, ki se sekajo z $L'\} = Y$.

   Iz tega lahko izpeljemo, da je

$$\sigma_g^2 = \sigma_g \sigma_g' = X \cap Y,$$

   kjer velja $X, Y \subseteq Z = \{\text{vse premice}\}$. Sedaj lahko uporabimo dejstvo, ki smo ga omenili prej.

$$\dim(Z) = \dim(T) = 4$$
$$\dim(X) = \dim(Y) = \dim(\sigma_g) = 3$$
$$\dim(X) + \dim(Y) = 6$$

   Ker je $6 \geq 3$, vemo, da velja

$$\dim(X) + \dim(Y) \geq \dim(Z)$$

   Sedaj lahko dokončno izračunamo $\dim(\sigma_g^2)$. Po prej omenjenem dejstvu o dimenzijah velja:

$$\begin{aligned} \dim(\sigma_g^2) &= \dim(X \cap Y) \\ &= \dim(X) + \dim(Y) - \dim(Z) \\ &= 3 + 3 - 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Torej po ključnem dejstvu Schubertovega računa obstajata takšni celi števili a in b, da velja $\sigma_g^2 = a\sigma_p + b\sigma_e$.

3. Določimo števili a in b. Za to se spomnimo računanja s pogoji. Najprej bomo izazili a tako, da celotno enačbo pomnožimo s σ_p.

$$\begin{aligned} \sigma_p \sigma_g^2 &= a\sigma_p^2 + b\sigma_e\sigma_e \\ \sigma_p \sigma_g \sigma_g &= a + 0 \\ \sigma_s \sigma_g &= a \\ 1 &= a \end{aligned}$$

Ponovimo proces, da izrazimo b. Celotno enačbo pomnožimo s σ_e, tako da dobimo

$$\begin{aligned}
\sigma_e\sigma_g^2 &= a\sigma_p\sigma_e + b\sigma_e^2 \\
\sigma_e\sigma_g\sigma_g &= 0 + b \\
\sigma_s\sigma_g &= b \\
1 &= b.
\end{aligned}$$

Iz tega vemo, da je $a = 1$ in $b = 1$. To pomeni, da je $\sigma_g^2 = \sigma_p + \sigma_e$.

□

6 Primeri uporabe

V tem delu si bomo ogledali nekaj nalog, ki jih lahko rešimo z uporabo Schubertovega računa.

6.1 Koliko premic seka 4 premice v prostoru?

V tej nalogi nas zanima število premic, ki bodo sekale štiri poljubne premice v prostoru (generične, torej v splošni legi), torej iščemo σ_g^4. Ta naloga je posebno lep primer, saj lahko obidemo prvi in drugi zgoraj navedeni korak uporabe Shubertovega računa, saj vemo, da je

$$\sigma_g^2 = \sigma_p + \sigma_e.$$

Iz tega lahko izpeljemo

$$\begin{aligned}
\sigma_g^4 &= (\sigma_p + \sigma_e)^2 \\
&= \sigma_p^2 + 2\sigma_p\sigma_e + \sigma_e^2 \\
&= 1 + 0 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

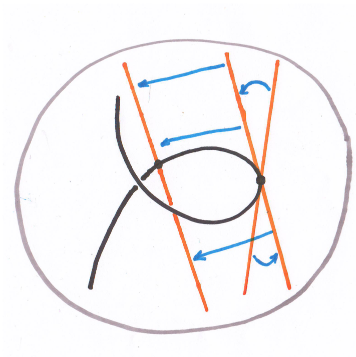
Iz tega lahko razberemo, da **skozi poljubne štiri premice v prostoru (v splošni legi) vedno potekata natanko dve premici**.

6.2 Koliko premic seka štiri zvite kubike?

Za začetek se spomnimo, da je zvita kubika prostorska krivulja stopnje 3. To pomeni, da generična ravnina seka zvito kubiko v treh točkah, kot vidimo na sliki 27. Uvedemo pogoj σ_c. Premica L_1 zadošča pogoju σ_c, če seka dano zvito kubiko C. Naloga zahteva, da izračunamo število premic, ki sekajo štiri zvite kubike. Torej iščemo σ_c^4. Uporabimo Schubertov račun.

Korak 1: Določimo $\dim(\sigma_c)$. Premica L_1, ki zadošča pogoju σ_c glede na zvito kubiko C, seka C v neki točki $P \in C$. Premico L_1 lahko vrtimo okoli točke P pa bo še vedno zadoščala pogoju σ_c. Točko P lahko premikamo po C. Ker je C krivulja, nam to doda en parameter. Dobimo

$$\dim(\sigma_c) = \dim(\sigma_p) + 1 = 2 + 1 = 3.$$



Slika 26: Dimenzije σ_c.

Korak 2: Po ključnem dejstvu Schubertovega računa ugotovimo, da je

$$\sigma_c = a\sigma_g$$

za neko število a.

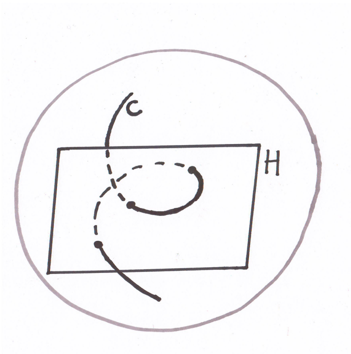
Korak 3: Izračunajmo neznanko a. Spomnimo se, da velja $\sigma_s\sigma_g = 1$. Produkt $\sigma_c = a\sigma_g$ pomnožimo s pogojem σ_s in dobimo

$$\sigma_c\sigma_s = a\sigma_g\sigma_s.$$

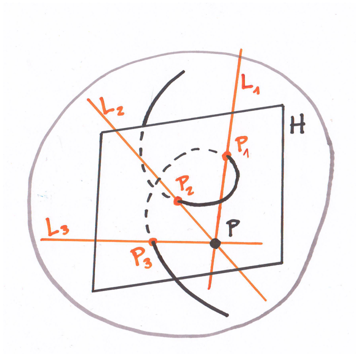
Velja $\sigma_g\sigma_s = 1$, iz česar sledi, da velja

$$\sigma_c\sigma_s = a.$$

Pogoj $\sigma_c\sigma_s$ ubesedimo kot: iskana premica L_1 leži v dani ravnini H in gre skozi točko $P \in H$, hkrati pa seka kubiko C. Spomnimo se, da zvita kubika vsako generično ravnino seka v treh točkah. To pomeni, da C seka H v točkah P_1, P_2 in P_3. Premice, ki zadoščajo obema pogojema so posamezno vpete med točko P in eno izmed točk P_1, P_2 in P_3, kot vidimo na sliki 28.



Slika 27: Sekanje kubike z ravnino.



Slika 28: Premice, ki zadoščajo $\sigma_c\sigma_s$.

Takšne premice so tri, zato je

$$\sigma_c\sigma_s = 3.$$

Tako smo ugotovili, da je

$$\sigma_c\sigma_s = a = 3,$$

zato velja $\sigma_c = 3\sigma_g$. Ostane nam le še izračun σ_c^4, kjer bomo uporabili, da velja $\sigma_g^4 = 2$ (kar smo dokazali v prvi nalogi). Tako računamo:

$$\begin{aligned}
\sigma_c^4 &= (3\sigma_g)^4 \\
&= 3^4\sigma_g^4 \\
&= 3^4 \cdot 2 \\
&= 81 \cdot 2 \\
&= 162.
\end{aligned}$$

Izračunali smo, da **štiri zvite kubike seka 162 premic**.

6.3 Koliko skupnih sekant imata 2 zviti kubiki

Sekanta zvite kubike je premica, ki seka zvito kubiko v vsaj dveh točkah. Zanima nas število premic, ki bodo sekante na dve zviti kubiki hkrati.

Označimo pogoj, da premica seka zvito kubiko v vsaj dveh točkah z $\check{\sigma}_c$. V tej nalogi torej iščemo $\check{\sigma}_c^2$.

Korak 1: Določimo $\dim(\check{\sigma}_c)$. Sekanta L seka zvito kubiko v točkah P in P'. Vsako izmed teh dveh točk lahko premikamo "naprej" in "nazaj" po zviti kubiki (glej sliko 30), kar nam da za vsako točko eno dimenzijo. S premikanjem obeh točk lahko dosežemo poljubno sekanto L', kar pomeni, da je $\dim(\check{\sigma}_c) = 2$.

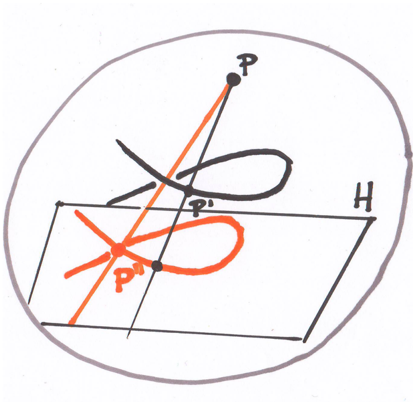
Korak 2: Iz ključnega dejstva Schubertovega računa sledi, da je

$$\check{\sigma}_c = a\sigma_p + b\sigma_e. \tag{1}$$

Korak 3: Izračunamo števili a in b. Najprej bomo izrazili število a s tem, da vso enačbo pomnožimo s σ_p in dobimo

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_c\sigma_p &= a\sigma_p^2 + b\sigma_e\sigma_p \\ &= a + 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

Koliko je $\check{\sigma}_c\sigma_p$ bomo ugotovili s pomočjo projekcije na ravnino. Vzamemo točko P in ravnino H, na kateri točka P ne leži. Projekcijo dobimo na naslednji način: za vsako točko P' na krivulji C točki P in P' napenjata premico L. Projekcija točke P' na ravnino H iz točke P je točka preseka premice L z ravnino H.



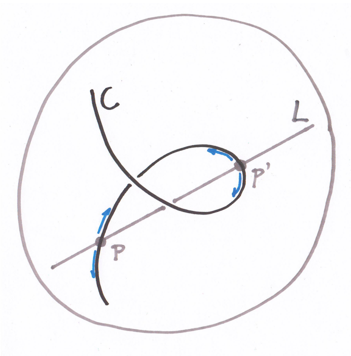
Slika 29: Prikaz projekcije kubike C iz točke P na ravnino H.

Iz slike 29 razberemo, da projekcija krivulje C na ravnini H izriše tako imenovano nodalno kubično krivuljo. Vsaka premica, ki zadošča pogoju σ_p in seka C, je določila projekcijo točke svojega preseka s C na ravnino H. Če premica seka C v dveh točkah, potem dobimo v projekciji samopresečišče. Vendar smo v projekciji dobili nodalno kubično krivuljo, ki samo sebe seka zgolj v eni točki P''. Sledi, da je edina premica, ki zadošča pogoju $\check{\sigma}_c\sigma_p$, premica, ki jo napenjata točki P in P''. Tako dobimo $a = 1$.

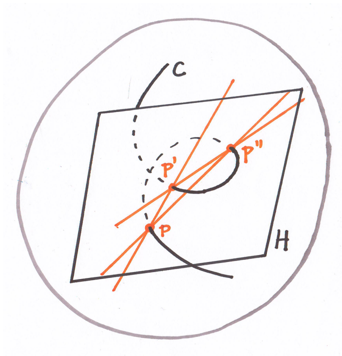
Nato v enačbi (1) izrazimo b s tem, da celotno enačbo pomnožimo s σ_e in dobimo

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_c\sigma_e &= a\sigma_p\sigma_e + b\sigma_e^2 \\ &= 0 + b \\ &= b. \end{aligned}$$

Sedaj izračunamo $\check{\sigma}_c\sigma_e$. Poljubna ravnina H seka krivuljo C v treh točkah P, P' in P''. Edine premice, ki zadoščajo temu pogoju so tiste, ki gredo skozi vsaj dve izmed teh točk. To pomeni, da temu pogoju zadoščajo samo tri premice. To so premice, ki jih napenjata točki P in P', P in P'' ter P' in P'', kot vidimo na sliki 31.



Slika 30: Določanje dimenzije $\check{\sigma}_c$



Slika 31: Premice, ki zadoščajo $\check{\sigma}_c\sigma_e$.

Vstavimo a in b v enačbo (1), kar da

$$\check{\sigma}_c = \sigma_p + 3\sigma_e,$$

iz česar s kvadriranjem dobimo

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_c{}^2 &= (\sigma_p + 3\sigma_e)^2 \\ &= \sigma_p^2 + 6\sigma_p\sigma_e + 9\sigma_e^2 \\ &= 1 + 0 + 9 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Izračunali smo, da imata **dve zviti kubiki 10 skupnih sekant**.

Literatura

[1] F. Ronga, *Schubert Calculus according to Schubert*, 2006, available on arXiv under arXiv:math/0608784

[2] D. Eisenbud, J. Harris, *3264 & All That Intersection Theory in Algebraic Geometry*, available at `https://scholar.harvard.edu/files/joeharris/files/000-final-3264.pdf`