Štetje preko neskončnosti

Zara Barbarić, Nika Bogataj Golc, Tina Tiara Opalič
Mentor: Nejc Zajc

Povzetek

Spraševali smo se, kako šteti dlje od neskončnosti, zato smo se v projektu posvetili ordinalnim številom. Zanje smo definirali računske operacije in si ogledali pravila za računanje z njimi.

1 Uvod

Vsi smo že slišali za neskončnost. Vendar ali ste vedeli, da lahko štejemo še dlje? Da lahko neskončnosti seštevamo, množimo in potenciramo? Nam so pri tem pomagala ordinalna števila, za katera pa marsikdaj veljajo zanimiva pravila. Pri našem projektu smo raziskovali ta števila in njihove lastnosti, jim določili pravila za računanje in se v računanju tudi preizkusili.

2 Naravna struktura

Za začetek smo se vprašali, kako bi definirali naravna števila, ki so se v našem projektu začela z ničlo. Ogledali smo si, kaj je naravna struktura.

Definicija 1. ***Naravna struktura*** *je množica N skupaj z izbranim elementom O in funkcijo $S : N \to N$. V njej velja:*

- $O \in N$,
- *S je* ***operacija naslednika****, za katero velja*

$$S(n) = S(m) \Rightarrow n = m \quad \textit{(injektivnost)}$$

  in

$$\forall n \in N : S(n) \neq O.$$

Velja tudi ***načelo indukcije****, ki pravi, da za vsako množico X, za katero je:*

- *$O \in X$ in*
- *za vsak $n \in N$ velja implikacija $n \in X \Rightarrow S(n) \in X$,*

sledi, da je $N \subseteq X$.

Množica naravnih števil je primer naravne strukture. Ni pa edina, saj tudi v množici sodih števil in množici $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \ldots\}$ prepoznamo naravno strukturo.

2.1 Operacije v množici $\mathbb{N}$

Operacije v množici naravnih števil so definirane rekurzivno na naslednji način.

- Seštevanje: $m + 0 = m \quad$ in $\quad m + S(n) = S(m + n)$.
- Množenje: $m \cdot 0 = 0 \quad$ in $\quad m \cdot S(n) = m \cdot n + m$.
- Potenciranje: $m^0 = 1 \quad$ in $\quad m^{S(n)} = m^n \cdot m$.

2.2 Indukcija

Da smo indukcijo in njen pomen pri dokazovanju trditev na naravnih številih bolje spoznali, smo si ogledali naslednja primera.

Primer 1. Denimo, da želimo izračunati vsoto prvih n naravnih števil. Rezultat uganemo s pomočjo nizkih primerov in ga dokažemo z indukcijo.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Pri bazi indukcije $n = 0$ velja
$$0 = 0.$$
Za indukcijski korak predpostavimo, da enakost velja za n, in jo želimo pokazati za $n + 1$. Dokazujemo
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$
Leva stran je po indukcijski predpostavki enaka
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Primer 2. Z indukcijo lahko dokažemo tudi resničnost naslednje neenakosti za vsa naravna števila, večja od 0.
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$
Pri bazi indukcije $n = 1$ velja
$$\frac{1}{1} \geq 1.$$
Za indukcijski korak predpostavimo, da neenakost velja za n, in jo želimo pokazati za $n + 1$. Dokazujemo
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}.$$
Leva stran je po indukcijski predpostavki večja ali enaka od $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Dokažimo, da je $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$.
$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &\geq \sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
n &\geq n + 1 - 2\cdot\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+1} \\
n &\geq n + 1 - 2 + \frac{1}{n+1} \\
n &\geq n - 1 + \frac{1}{n+1} \\
1 &\geq \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$
Zadnja neenakost velja za vsa naravna števila, večja ali enaka 1.

3 Relacije

Relacija je zveza med elementi dane množice. Ogledali smo si primer binarne relacije, ki se nanaša na dva elementa, označujemo pa jo z $\leq$. Naj bo M poljubna množica. Relacija na množici M je definirana s tem, da povemo, katere pare (a, b) iz množice $M \times M$ vsebuje. Torej tako, da povemo, za katere a in b velja $a \leq b$.

3.1 Lastnosti relacij

Za relacije lahko veljajo različne lastnosti.

- Če za vsaka elementa $a, b \in M$ velja

  $$a \leq b \ \wedge \ b \leq a \ \Rightarrow \ a = b,$$

  je relacija $\leq$ **antisimetrična**.

- Če za vse elemente $a, b, c \in M$ velja

  $$a \leq b \ \wedge \ b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c,$$

  je relacija $\leq$ **tranzitivna**.

- Če za vsak element $a \in M$ velja

  $$a \leq a,$$

  je relacija $\leq$ **refleksivna**.

- Če za vsaka elementa $a, b \in M$ velja

  $$a \leq b \ \vee \ b \leq a,$$

  je relacija $\leq$ **sovisna**.

Relacijo, ki je tranzitivna, refleksivna in antisimetrična, imenujemo **delna urejenost**. V primeru, da je tudi sovisna, gre za **linearno urejenost**.

Za pomnožico $X \subseteq M$ in element $a \in M$ smo vpeljali oznako za primer, ko je a večji od vseh elementov iz X.

$$X \leq a, \text{ če velja } x \leq a \text{ za vse } x \in X$$

3.2 Meje množic

Na primeru intervala $[1, 3)$ smo si ogledali kaj sta minimalni in maksimalni element ter kaj sta natančna spodnja in zgornja meja.

- **Minimalni element intervala** $[1, 3)$ je tak njegov element n, da za vse $m \in [1, 3)$ velja $n \leq m$.

  V našem primeru je minimalni element 1.

- **Maksimalni element intervala** $[1, 3)$ je tak njegov element n, da za vse $m \in [1, 3)$ velja $m \leq n$.

  V našem primeru maksimalnega elementa ni.

- **Natančna spodnja meja intervala** $[1, 3)$ je največje tako realno število, ki je manjše ali enako od vsakega elementa intervala $[1, 3)$.

  V našem primeru je natančna spodnja meja 1.

- **Natančna zgornja meja ali supremum intervala** $[1, 3)$ je najmanjše tako realno število, ki je večje ali enako od vsakega elementa intervala $[1, 3)$.

  V našem primeru je natančna zgornja meja 3.

4 Ordinalna števila

Z vsem pridobljenim znanjem smo si na tem mestu lahko ogledali, kaj so ordinalna števila. Prvo neskončno število, ki ga dobimo, če poiščemo supremum množice naravnih števil, smo označili z ω. To si lahko predstavljamo tudi tako, da štejemo naravna števila po vrsti $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ v neskončnost, nato pa z operacijo supremum preskočimo do ω. Nato lahko spet štejemo naprej $(\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots)$ in dobimo še naslednja ordinalna števila.

Ordinalna števila so natančno definirana na naslednji način.

Definicija 2. ***Ordinalna struktura*** *je delno urejen razred* $\underline{Ord}$ *skupaj s številom* $0 \in \underline{Ord}$*, funkcijo* $S : \underline{Ord} \to \underline{Ord}$ *in funkcijo* $\sup : P(\underline{Ord}) \to \underline{Ord}$*. V njej velja:*

- 0 *je* ***najmanjši element****, torej*

$$\forall n \in \underline{Ord} : 0 \leq n,$$

- S *je* ***operacija naslednika****, za katero velja*

$$n < S(n) \qquad in \qquad n < m \Rightarrow S(n) \leq m,$$

- sup *je* ***operacija supremuma****, kjer*

$$\forall X \subseteq \underline{Ord} : X \leq \sup X$$

in

$$\forall X \subseteq \underline{Ord},\ n \in \underline{Ord} : X \leq n \Rightarrow \sup X \leq n.$$

Velja tudi ***načelo transfinitne indukcije****, ki pravi, da za vsako množico* $X \subseteq \underline{Ord}$*, za katero je:*

- $0 \in X$,
- $n \in X \Rightarrow S(n) \in X$ *in*
- $Y \subseteq X \Rightarrow \sup Y \in X$,

sledi, da je $X = \underline{Ord}$.

Opazili smo, da so ordinalna števila zgrajena iz naravnih števil, torej smo razmišljali, da imajo lahko tudi podobne lastnosti. Pokazali smo, da njihova urejenost ni le delna.

Trditev 1. *Relacija* $\leq$ *na* $\underline{Ord}$ *je linearna urejenost.*

Dokaz. Prve tri pogoje linearne urejenosti že imamo, saj je ordinalna struktura po definiciji delno urejen razred. Zato moramo dokazati le še sovisnost. Fiksirajmo število $a \in \underline{Ord}$ in s transfinitno indukcijo dokažimo, da za poljuben $b \in \underline{Ord}$ velja $a \leq b \ \vee \ b \leq a$. Definirajmo si še tako množico X elementov, za katero ta lastnost velja.

$$X = \{n \in \underline{Ord} \mid n \leq a \vee a \leq n\}$$

Najprej pogledamo primer, ko je $b = 0$. V tem primeru po definiciji vedno velja $0 \leq a$.

Potem naredimo indukcijski korak. Predpostavimo, da za nek $b \in \underline{Ord}$ velja $a \leq b \ \vee \ b \leq a$. Dokažimo, da velja tudi $a \leq S(b) \ \vee \ S(b) \leq a$. Recimo, da je $a \leq b$, potem velja $a \leq S(b)$, saj je $b \leq S(b)$. Sicer pa je $b \leq a$. Tu dobimo dve možnosti. Če je $b = a$, potem je $a \leq S(a) = S(b)$. Če pa je $b < a$, potem je $S(b) \leq a$.

Sedaj naredimo še supremum korak. Naj bo $Y \subseteq X$, dokažimo da velja tudi $\sup Y \in X$. Torej dokazujemo, da je $\sup Y \leq a \ \vee \ a \leq \sup Y$. Če v množici Y obstaja tak b, da velja $a \leq b$, potem po definiciji velja tudi $a \leq b \leq \sup Y$. Sicer za vse $b \in Y$ velja $b \leq a$. Iz tega po definiciji operacije supremuma sledi $\sup Y \leq a$.

Tako smo za množico X elementov, ki so v relaciji z a, pokazali vse tri točke načela transfinitne indukcije. Sledi $X = \underline{Ord}$, kar pomeni, da je relacija $\leq$ na $\underline{Ord}$ linearna. $\square$

Za vsako ordinalno število n smo definirali množico

$$\downarrow n = \{a \in \underline{Ord} \mid a < n\}.$$

Dva primera tega sta $\downarrow 3 = \{0, 1, 2\}$ in $\downarrow \omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.
S pomočjo te strukture lahko ordinalna števila razdelimo na dve skupini.

- Število n je **nasledniško**, če obstaja tak $a \in \underline{Ord}$, da velja $S(a) = n$. Takšni števili sta 3 in $\omega + 1$.
- Če n ni nasledniško, je **limitno**. Tedaj velja $n = \sup \downarrow n$. Primer je ω.

5 Operacije

Na ordinalnih številih lahko definiramo operacije. Natančneje smo si pogledali seštevanje, množenje in potenciranje.

5.1 Seštevanje

Naslednja rekurzivna definicija postavi pravila za seštevanje:

- $a + 0 = a$,
- $a + S(b) = S(a + b)$,
- $a + c = a + \sup\{b \mid b < c\}$
  $= \sup\{a + b \mid b < c\}$ za limitno število c.

Ogledali smo si nekaj primerov seštevanja, kjer smo zgoraj našteta pravila uporabili in opazovali, kako se ta operacija obnaša na ordinalnih številih.

$$\begin{aligned}\omega + 1 &= S(\omega + 0) \\ &= S(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + \omega &= \sup\{1 + b \mid b < \omega\} \\ &= \sup\{1 + n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup \mathbb{N} \\ &= \omega\end{aligned}$$

V zadnjem računu smo upoštevali dejstvo, da so ordinalna števila, ki so manjša od ω, ravno naravna števila.

Opazili smo, da seštevanje v ordinalnih številih **ni komutativno**, saj velja $1 + \omega = \omega < S(\omega) = \omega + 1$.

5.2 Množenje

Pravila za množenje so sledeča:

- $a \cdot 0 = 0$,
- $a \cdot S(b) = a \cdot b + a$,
- $a \cdot c = a \cdot \sup\{b \mid b < c\}$
  $= \sup\{a \cdot b \mid b < c\}$ za limitno število c.

Zopet smo si ogledali uporabo teh pravil na nekaj primerih, pri čemer smo morali biti pozorni na vrstni red členov v podobnih računih.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \omega &= \sup\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup \mathbb{N} \\ &= \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \cdot 2 &= \omega \cdot 1 + \omega \\ &= \omega + \omega \end{aligned}$$

Zopet smo opazili, da je vrstni red členov pomemben. Tudi množenje ni komutativno.

5.3 Potenciranje

Za potenciranje velja naslednje:

- $a^0 = 1$,
- $a^{S(b)} = a^b \cdot a$,
- $a^c = \sup\{a^b \mid b < c\}$ za limitno število c.

Znova smo si ogledali nekaj primerov.

$$\begin{aligned} 2^\omega &= \sup\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup \mathbb{N} \\ &= \omega \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \omega^1 \cdot \omega$$

Pri zadnjem primeru izraza ni bilo več možno poenostaviti, saj velja enakost $\omega^1 = \omega^0 \cdot \omega = \omega$.

6 Pravila za računanje

Na naravnih številih pri računanju upoštevamo določena pravila, vendar ni nujno, da se ta nanašajo tudi na ordinalna. Kot smo že lahko videli, je takšen primer tudi komutativnost.

Izkaže se, da za ordinalna števila velja asociativnost

- $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Pri distributivnosti velja pravilo

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

medtem ko izračun $\omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega \neq (1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$ pokaže, da obratna distributivnost ne velja.

Za računanje s potencami veljata pravili

- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$,
- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

Ne velja pa pravilo $(a + b)^c = a^c \cdot b^c$, kar lahko preverimo že z računom $\omega^2 = \omega \cdot \omega = 2^\omega \cdot 2^\omega \neq (2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega$.

6.1 Primeri

Za konec smo si ogledali še nekaj zanimivih primerov, ki so prikazali računanje na ordinalnih številih.

V prvem primeru smo si pomagali z asociativnostjo.

$$\begin{aligned}(\omega + 1) + \omega &= \omega + (1 + \omega) \\ &= \omega + \omega\end{aligned}$$

Nato nas je zanimalo, kaj se zgodi, ko imamo na obeh mestih limitno število, vendar je število na desni večje.

$$\begin{aligned}\omega^1 + \omega^2 &= \omega \cdot 1 + \omega \cdot \omega \\ &= \omega \cdot (1 + \omega) \\ &= \omega \cdot \omega \\ &= \omega^2\end{aligned}$$

V sledečem primeru, kjer je $n \in \mathbb{N}$, smo izraz poskušali poenostaviti, pri čemer smo znova lahko uporabili asociativnost.

$$\begin{aligned}(\omega \cdot n + 1) + (\omega + 1) &= \omega \cdot n + (1 + (\omega + 1)) \\ &= \omega \cdot n + ((1 + \omega) + 1) \\ &= \omega \cdot n + (\omega + 1) \\ &= \omega(n + 1) + 1\end{aligned}$$

V zadnjem primeru smo poizkusili poenostaviti izraz, v katerem bi pri naravnih številih uporabili obratno distributivnost, ki pa na ordinalnih številih ne velja.

$$\begin{aligned}(\omega + 1) \cdot \omega^2 &= (\omega + 1) \cdot (\omega \cdot \omega) \\ &= ((\omega + 1) \cdot \omega) \cdot \omega\end{aligned}$$

Najprej smo izračunali izraz znotraj oklepaja.

$$\begin{aligned}(\omega + 1) \cdot \omega &= \sup\{(\omega + 1) \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\underbrace{(\omega + 1) + (\omega + 1) + \cdots + (\omega + 1)}_{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\omega + \underbrace{(1 + \omega) + (1 + \omega) + \cdots + (1 + \omega)}_{n-1} + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\underbrace{\omega + \omega + \cdots + \omega}_{n} + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\omega \cdot n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\omega \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \omega^2\end{aligned}$$

Zadnjo menjavo supremumov smo opravili, ker lahko $\omega \cdot n + 1$ vrinemo v zaporedje s členi oblike $\omega \cdot n$. Na koncu smo dobljeno vrednost le še vrnili v začetni izraz in dobili končni rezultat.

$$(\omega + 1) \cdot \omega^2 = \omega^2 \cdot \omega = \omega^3$$

Na teh primerih smo prikazali uporabo pravil za računanje na ordinalnih številih.

Literatura

[1] Zapiski s predavanj prof. A. K. Simpsona pri predmetu Kardinalna aritmetika, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2021/2022).