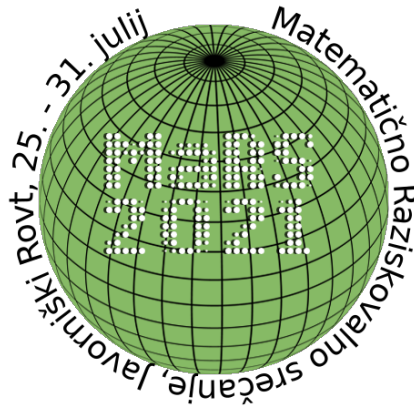


Fraktali - čudež Narave

Borut Bončina, Kanisaja Nika Kovačič,
Luka Svenšek in Timotej Vičar
Mentor: Simon Brezovnik



Povzetek

Fraktali so matematični objekti, s katerimi lahko sorazmerno dobro aproksimiramo nekatere objekte v naravi, ki imajo strukturo z neskončno podrobnostmi. Natančneje, so neprazne kompaktne podmnožice nekega metričnega prostora, ki vsebujejo neskončno podrobnosti. Fraktali običajno premorejo neko vrsto samopodobnosti. Takšno posebno družino, pri kateri je faktor samopodobnosti konstanten, imenujemo sebipodobnostni fraktali. V članku pokažemo, da ima Cantorjeva množica res sebipodobnostno fraktalno strukturo. V nadaljevanju predstavimo postopek računanja sebipodobnostne dimenzije, dimenzije štetja škatlic ter izračunamo omenjeni karakteristiki na konkretnih primerih, med drugim tudi na praproti, ki smo jo za ta namen poiskali v bližnji okolici. Nadalje smo prikazali postopek računanja obsegov in ploščin fraktalnih množic in ugotovili, da obstajajo takšne s končno ploščino, a neskončnim obsegom. V programu POV-RAY smo zapisali algoritem, s katerim smo generirali nove fraktale z zanimivim izgledom.

1 Uvod

Objekti, ki nakazujejo na fraktalno obliko, se nahajajo povsod okoli in znotraj nas. To so npr. cvet sončnice, človeška pljuča, brokoli, pa tudi morska obala, lunini kraterji, snežinke in izgled jutranje zarje.

Prvič v zgodovini zasledimo začetek razvoja oblik podobnih fraktalnim oblikam leta 1525 v Albrecht Dürerjevi knjigi *The Painter's Manual*. Gre za pojav Dürerjevih petkotnikov, ki predstavljajo posredne zametke nastanka tematskega polja fraktalov [5]. Prva ideja, neposredno vezana na fraktale, pa je privrela na dan v 17. stoletju. Nemški matematik Gottfried Wilhelm Leibniz je predstavil koncept samopodobnosti [6], ki pravi, da ko pobližje pogledamo posamezen delec vzorca, vidimo v tem pobližje pogledanem delcu ponovno podoben vzorec, kot smo ga videli v predhodnem vzorcu.

Naslednji večji premik na področju fraktalov je napravil Karl Weierstrass leta 1872 s prikazom Weierstrassove funkcije [6]. Weierstrassova funkcija ima fraktalno strukturo, saj gre za zvezno ne-odvedljivo funkcijo, razprostrto po Evklidski ravnini, s posebnostjo, da ko povečamo posamezen poljubni del grafa funkcije, ima ta poljubno povečan del podobno obliko kot del grafa, ki smo ga opazovali pred povečavo.

Ta posebnost Weierstrassove funkcije se sklada s konceptom Leibniza ter je vzrok za opredeljevanje strukture te funkcije kot fraktalne strukture. Eno bolj znanih fraktalnih krivulj je general Helge Koch leta 1904, ponaša se z imenom Kochova krivulja [6]. Dandanes obstajajo različne posplošitve Kochove krivulje.

Nadaljnji razvoj področja fraktalov je omogočil Felix Hausdorff s svojo predstavitevijo koncepta fraktalnih dimenzij. Koncept fraktalnih dimenzij, predstavljen leta 1918 [7], je razširil definicijo dimenzije in s tem zanimivo omogočil obstoj likov z dimenzijo, ki ni naravno število. Besedo fraktal, ki izhaja iz latinske besede *fractus*, kar pomeni zlomljen oziroma nepravilen, je leta 1975 prvi uporabil francosko-ameriški matematik Benoit Mandelbrot. Le-ta je ob svoji izdaji članka ob odkritju Mandelbrotove množice priložil računalniško generirane slike fraktalov. Grafično predstavljanje fraktalov je zelo zahtevno, kar je pred računalniško dobo predstavljalo velik problem. Mandelbrot je med odpravljanjem problematike komunikacijskega šuma pri toku podatkov po telefonskih linijah podjetja IBM odkril da, če ilustrira komunikacijski šum kot graf turbulence, opazi samopodobnostno fraktalno lastnost grafa. Ne glede na to, ali je skala grafa prikazovala časovno obdobje enega meseca, enega dne, ene ure ali pa ene sekunde, je bil vzorec komunikacijskega šuma presenetljivo podoben. S pomočjo računalnika je obdelal predpis grafa ter dobil fraktal v obliki žužka [8]. S tem je odprl vrata v računalniško generiranje fraktalov,

ki omogoča njihovo vizualizacijo.

V članku smo stopili na matematično področje, ki še posebej lepo modelira svet v vsej njegovi privlačnosti in skrivnostnosti. Avtorji smo se najprej seznanili z osnovami metričnih prostorov in kompaktnih množic, kar je predpogoj za razumevanje strukture osnovnih gradnikov fraktala. V nadaljevanju smo predstavili konkretne fraktale, natančneje Kochovo krivuljo in snežinko, piramido Sierpinskega ter Cantorjevo množico. Pokazali smo, da ima Cantorjeva množica res fraktalno strukturo. Pogoj za to je, da je omejena, zaprta in neprazna podmnožica nekega metričnega prostora. V nadaljevanju smo generirali fraktale v splošnem, pri čemer bomo faktor skrčitve ves čas ohranjali konstanten. Predstavili smo postopek računanja sebi podobnosti dimenzije in dimenzije štetja škatlic. Ugotovili smo, da obstajajo objekti z dimenzijami, ki niso nujno naravna števila. V naslednjem poglavju smo prikazali postopek računanja obsegov in ploščin fraktalnih množic. Pri tem smo si pomagali z znanjem konvergence oz. divergence neskončne geometrijske vrste. Spoznali smo matematične objekte, ki premorejo končno ploščino, a imajo neskončen obseg. V zadnjem poglavju smo s člani skupine v programu POV-RAY ustvarili še neznane fraktale.

2 Osnove metričnih prostorov

Za začetek si pogledjmo nekaj osnovnih definicij, ki bodo pomagale razumeti, kakšno strukturo imajo fraktali, in posledično omogočile, da jih bomo generirali na pravi način. Definicije so povzete po [13].

Definicija 1. Naj bo M neprazna množica. Preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ se imenuje **metrika (razdalja)**, če zadošča pogojem:

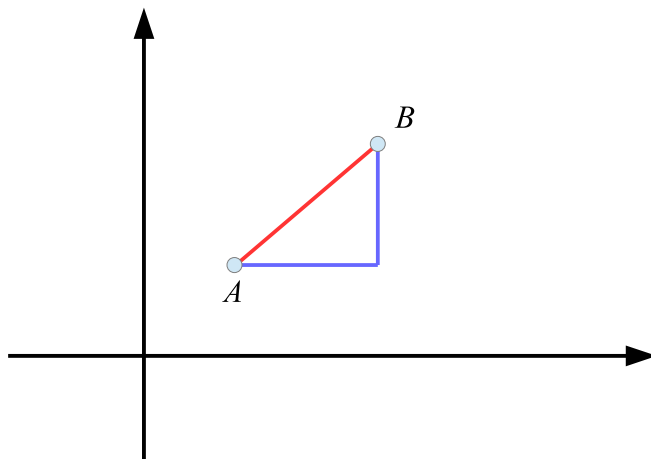
- $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$,
- $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Urejeni par množice in metrike (M, d) imenujemo **metrični prostor**.

Poglejmo si nekaj znanih metrik, ki nastopajo v različnih metričnih prostorih.

1. *Evklidska metrika* d , definirana na množici \mathbb{R} , ni nič drugega kot razdalja med dvema točkama na številski premici. Formalno jo definiramo na naslednji način:

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$



Slika 1: Modri del predstavlja Manhattan razdaljo med točkama, rdeči pa Evklidsko razdaljo med točkama v realni ravnini.

2. *Evklidska metrika* d' , definirana na množici \mathbb{R}^2 , predstavlja razdaljo med dvema poljubnima točkama v ravnini in je definirana s predpisom:

$$d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. *Manhattan metrika* d'' je metrika, definirana na množici \mathbb{R}^2 in ima naslednji predpis:

$$d''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Na sliki vidimo, kako izgledata razdalji med dvema točkama Evklidski in Manhattan metriki v realni ravnini.

Osnovni objekt metričnega prostora, ki bo igral pomembno vlogo v nadaljevanju, je odprta krogla. Pa si pogledajmo njeno definicijo.

Definicija 2. Naj bo (X, d) metrični prostor, $a \in X$ in $r > 0$. Množico $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ imenujemo **odprta krogla** s središčem a in polmerom r .

Definicija 3. Naj bo (X, d) metrični prostor, $S \subseteq X$. Množica S je **omejena**, če obstaja tak $a \in X$ in $R > 0$, da je $d(a, x) < R, \forall x \in S$.

Preprosto povedano, neka množica je omejena, kadar obstaja takšna odprta krogla, ki vsebuje vse elemente te množice.

Da bomo razumeli, kdaj je poljubna množica nekega metričnega prostora zaprta, si moramo prej pogledati definicijo limite zaporedja, limitne točke in zaprtja množice.

Definicija 4. Zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ metričnega prostora (X, d) konvergira k elementu $x \in X$, če

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Element x imenujemo **limita zaporedja** in ga označimo kot $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Definicija 5. Naj bo (X, d) metrični prostor, $S \subseteq X$. Točka $x \in X$ je **limitna točka** množice S , če obstaja tako zaporedje $\{x_n\} \subseteq S \setminus \{x\}$, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Definicija 6. **Zaprta** množica S , ki ga označimo s \bar{S} , je unija množice S z vsemi njenimi limitnimi točkami. Množica S je **zaprtá**, če je $S = \bar{S}$.

Sedaj imamo vse potrebno, da lahko definiramo osrednji pojem tega poglavja, tj. pojem kompaktnosti neke množice, ki predstavlja potreben pogoj, da lahko neki množici rečemo fraktal. Zaradi kompleksnosti same definicije kompaktne množice, smo se omejili na prostor \mathbb{R}^n , saj se bomo v nadaljevanju ukvarjali predvsem s takimi vrstami fraktalov. V tem primeru lahko kompaktnost definiramo s pomočjo Haine-Borelovega izreka.

Izrek 1. (\mathbb{R}^n, d) metrični prostor $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$S \text{ je } \mathbf{kompaktna} \iff S \text{ je omejena in zaprtá.}$$

Zgornji izrek nam pojasnjuje, kakšne so dovoljene oblike fraktalov v realnih metričnih prostorih z Evklidsko metriko. Torej bomo sedaj lažje razumeli, katere začetne množice lahko vzamemo, da je končno generirana struktura dejansko fraktal.

3 Fraktali

Osnovne ideje in definicije tega poglavja so vzete iz virov [1], [2] in [3]. Kot smo že omenili, formalna definicija fraktalov ni znana, oziroma je preveč splošna, da bi jo matematično zapisali. Kljub temu bi fraktale lahko opisali na naslednji način.

Množico F imenujemo fraktalna množica, če ima naslednje lastnosti:

- (i) ima prefinjeno (dobro) strukturo, vidno pri poljubni povečavi,
- (ii) je preveč zapletena (lokalno in globalno), da bi jo lahko obravnavali z uporabo klasičnih geometrijskih metod,

- (iii) pogosto premore neko vrsto samopodobnosti, morda le približno ali naključno,
- (iv) v večini primerov lahko F definiramo na dokaj preprost način (recimo rekurzivno).

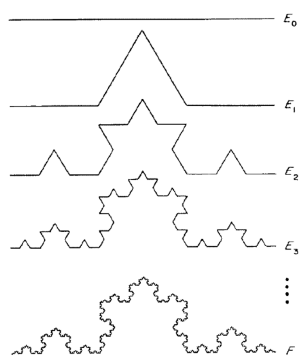
V kolikor zahtevamo, da ima fraktalna množica sebidobnostno strukturo, lahko njene lastnosti lažje matematično opišemo. Zato oblikujemo naslednjo definicijo.

Definicija 7. *Množico F imenujemo **sebidobnostna fraktalna množica**, če ima fraktalno strukturo in sestavlja neskončno samopodobnih delov, tako da vsaka povečava za nek enolično določen faktor razkrije novo kopijo predhodne oblike.*

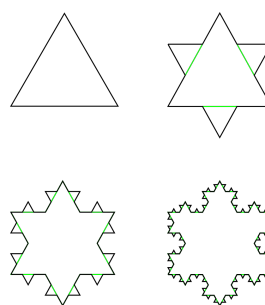
V nadaljevanju si pogledjmo nekaj najbolj znamenitih sebidobnostnih fraktalov.

Najprej si pogledjmo primer sebidobnostnega fraktala, ki je prikazan na sliki 2. Začnemo z enotsko daljico, ki jo na prvem koraku skrčimo s faktorjem $\frac{1}{3}$ in vzamemo štiri takšne kopije. Kopije postavimo tako, da na sredini nastane enakostraničen trikotnik. Nato na vsakem izmed naslednjih korakov postopek ponovimo. Struktura, ki nastane po neskončno izvedenih korakih, se imenuje Kochova krivulja.

V kolikor bi pri generiranju Kochove krivulje na začetku namesto enotske daljice izbrali enakostranični trikotnik, bi dobili sebidoben fraktal, ki ga poznamo pod imenom Kochova snežinka in ga prikazuje slika 3.

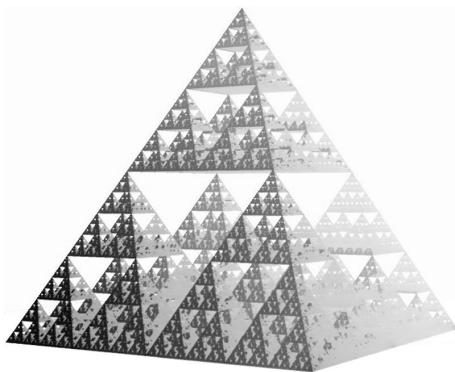


Slika 2: Prvi štirje koraki generiranja fraktala Kochove krivulje [11].



Slika 3: Prvi trije koraki generiranja fraktala Kochove snežinke [12].

Pri generiranju fraktala na koncu dobimo poljubno neprazno kompaktno množico. Slika 4 prikazuje primer fraktala, ki se imenuje piramida Sierpinskega in jo generiramo tako, da iz začetnega enotskega tetraedra na sredini izrežemo njegovo pomanjšano kopijo, skrčeno za faktor $\frac{1}{2}$. V tem primeru je fraktalna množica podmnožica realnega metričnega prostora \mathbb{R}^3 .



Slika 4: Piramida Sierpinskega [10].

Primer fraktala, ki je kompaktna podmnožica metričnega prostora \mathbb{R} , je t.i. *Cantorjeva množica* in jo vidimo na sliki 5. V nadaljevanju bomo pokazali, da je množica res fraktal, zato si podrobneje pogledimo njeno generiranje. Cantorjevo množico dobimo po naslednjem postopku. Začnemo z enotskim intervalom $E_0 = [0, 1]$. Na naslednjem koraku temu enotskemu intervalu izrežemo srednjo tretjino daljice, vendar pustimo obe robni vrednosti. Rezultat je unija dveh intervalov dolžine $\frac{1}{3}$, ki ju označimo z E_1 . Na naslednjem koraku vsaki od preostalih daljic izrežemo srednjo tretjino, rezultat, ki je unija štirih daljic dolžine $\frac{1}{9}$, pa označimo z E_2 . Postopek ponavljamo: na k -tem koraku izrežemo srednje tretjine intervalov množice E_{k-1} in kot rezultat dobimo množico točk E_k , ki jo sestavlja 2^k intervalov dolžine 3^{-k} .

V nadaljevanju bomo s pomočjo prej usvojenega znanja o metričnih prostorih pokazali, da je Cantorjeva množica dejansko fraktal.

Izrek 2. *Cantorjeva množica je sebipodobnostni fraktal.*

Dokaz. Glede na postopek konstrukcije Cantorjeve množice opazimo, da le ta gotovo vsebuje vsaj element 1, torej je neprazna. Da je Cantorjeva množica kompaktna, bomo dokazali s pomočjo Haine-Borelovega izreka, torej bo dovolj dokazati, da je omejena in zaprta.

Da je Cantorjeva množica omejena, ni težko opaziti, saj vemo, da je generirana na intervalu realnih števil med 0 in 1. Potem jo lahko v gotovosti zaobjamemo z odprto kroglo $K_2(0)$.

Za dokaz dejstva, da je Cantorjeva množica zaprta, bomo uporabili alternativno definicijo zaprte množice. Za to se moramo najprej poučiti o tem, kdaj je neka množica odprta.

Definicija 8. (X, d) metrični prostor, $S \subseteq X$. S je **odprta množica**, če za vsak $x \in S$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je

$$K_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Če bi preprosteje povzeli zgornji zapis, bi lahko rekli, da je neka množica odprta natanko tedaj, ko lahko za poljubno točko te množice narišemo odprto kroglo, ki ima središče v tej točki in v celoti leži znotraj te množice.

Pri dokazu dejstva, da je Cantorjeva množica kompaktna, se bomo oprli na naslednjo uporabno lastnost.

Izrek 3. [13] Naj bo (X, d) poljuben metrični prostor. Množica $A \subseteq X$ je zaprta v (X, d) , če je A^c odprta množica v (X, d) .

Če si sedaj še enkrat pogledamo konstrukcijo Cantorjeve množice, opazimo, da na vsakem koraku iz preostanka (ki je unija zaprtih intervalov) odrežemo neko končno množico odprtih intervalov. Torej je komplement naše fraktalne množice tudi unija neskončno mnogo odprtih intervalov. Ker je vsak odprt interval komplementa fraktala odprta množica, je tudi njihova unija odprta množica. To pa pomeni, da je fraktalna množica po izreku 3 zaprta.

S tem smo torej pokazali, da je Cantorjeva množica zaprta in omejena, torej tudi kompaktna. Ker je neprazna in vsebuje neskončno mnogo samopodobnosti, je tudi fraktal in je s tem dokaz zaključen. \square



Slika 5: Prvih šest korakov generiranja Cantorjeve množice [9].

3.1 Dimenzije fraktalov

Različni objekti imajo lahko različne dimenzije. Črta je enodimenzionalna, kvadrat dvodimenzionalen, kocka pa je tridimenzionalna. Videli bomo, da dimenzija objektov ni nujno celo število.

Kvadrat s stranico dolžine tri ima devetkrat večjo ploščino kot kvadrat s stranico ena, ker lahko večji kvadrat razdelimo na devet skladnih kopij manjšega.

Kvadrat je dvodimenzionalen, saj lahko s povečanjem stranice za faktor 3 dobljen kvadrat razdelimo na $3^2 = 9$ kopij starega.

Podobno lahko povemo, da je kocka tridimenzionalna, ker s povečavo za faktor 3 dobimo $3^3 = 27$ kopij stare.

V splošnem definirajmo dimenzijo fraktalov na naslednji način.

Definicija 9. Naj bo N število r -krat pomanjšanih kopij nekega sebipodobnostnega fraktala F , ki jih potrebujemo, da pokrijemo začetni lik. Potem definiramo d tako, da velja

$$\left(\frac{1}{r}\right)^d = N,$$

in ta d imenujmo **dimenzija sebipodobnosti fraktala F** .

Iz zgornje enačbe lahko izrazimo naš d :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}\right)^d &= N \\ \ln\left(\frac{1}{r}\right)^d &= \ln(N), \\ d \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) &= \ln(N), \\ d &= \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}. \end{aligned}$$

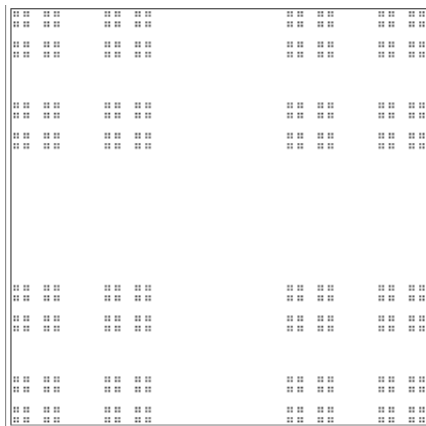
Potem lahko zapišemo alternativno definicijo dimenzije sebipodobnosti.

Definicija 10. Naj bo N število r -krat pomanjšanih kopij nekega sebipodobnostnega fraktala F , ki jih potrebujemo, da pokrijemo začetni lik. Potem definiramo d tako, da velja

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)},$$

in ta d imenujmo **dimenzija sebipodobnosti fraktala F** .

Na primeru Kochove snežinke si pogledajmo, kako dimenzije izgledajo pri sebipodobnostnih fraktalih. Spomnimo se, da pri koraku sestavljanja Kochove snežinke dobimo štiri kopije prvotne daljice, ki so od prve manjše za faktor $\frac{1}{3}$. Če lahko lik sestavimo iz manjših kopij, jih bomo potrebovali 3^d (npr. $3^2 = 9$ pri kvadratu). Za Kochovo snežinko potrebujemo štiri kopije, torej bo veljalo $3^d = 4$. Če enačbo logaritmiramo in izrazimo d , vidimo, da ima snežinka dimenzijo približno 1,26.



Slika 6: Primer fraktala, ki ima sebipodobnostno dimenzijo $d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ [4].

Dimenzijo sebipodobnostnih fraktalov si oglejmo na še enem primeru (glej sliko 6).

V vsakem koraku je faktor skrčitve $\frac{1}{3}$ (torej tudi na prvem), da sestavimo lik pa na prvem koraku potrebujemo štiri manjše kopije. Dimenzija tega fraktala je torej $d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$, kar je približno 1,26.

Seveda pa velja, da niso vsi fraktali sebipodobnostni. Nekateri imajo skozi konstrukcijo različne faktorje skrčitve, torej ne moremo izračunati njihove dimenzije na tak način kot prej. Primer fraktala, ki ni sebipodoben, je prikazan na sliki 7. V takih primerih uporabimo dimenzijo štetja škatlic. V ta namen si pogledjmo naslednjo definicijo.

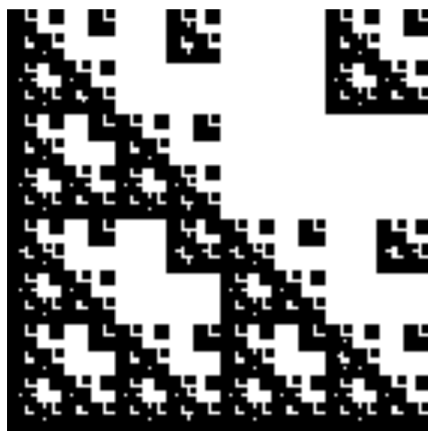
Definicija 11. Pokrijmo prostor \mathbb{R}^m , v katerem leži množica S s škatlicami, ki imajo dolžino stranice r . Naj $N_r(S)$ označuje število škatlic, ki imajo z S neprazen presek. Če obstaja

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N_r(S)}{\ln r},$$

potem D imenujemo **dimenzija štetja škatlic** množice S .

Kot vidimo je razlika med sebipodobnostno dimenzijo in dimenzijo štetja škatlic v tem, da pri prvi štejemo število sebipodobnih delov, pri drugi pa se ne omejimo več na dejstvo, da morajo biti deli sebipodobni, ampak jih ne glede na njihov izgled "pakiramo" v odprte škatle, ki niso nič drugega kot zaprti intervali v \mathbb{R} , kvadrati v \mathbb{R}^2 , oziroma kocke v \mathbb{R}^3 .

V nadaljevanju bomo prikazali, kako lahko izračunamo dimenzijo štetja škatlic poljubni fraktalni množici, ki sama po sebi nima sebipodobnostne strukture.



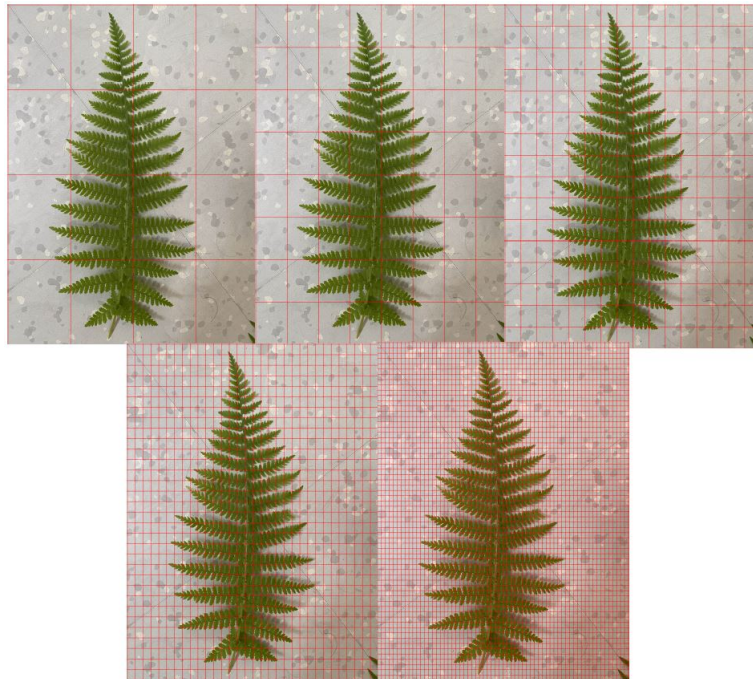
Slika 7: Primer fraktala, za katerega ni mogoče izračunati sebi-podobnostne dimenzije, saj je desni zgornji del pomanjšan za večji faktor skrčitve na vsakem koraku generiranja fraktala [4].

V ta namen smo odšli na bližnji travnik, kjer smo našli praprot. Izdelali smo njeno fotografijo in s pomočjo prostodostopnega programa Proportion Grid Maker izdelali različno velike mreže, v katere smo postavili to praprot (glej sliko 8). S pomočjo programa Logger Pro smo aproksimirali graf odvisnosti števila škatlic, ki pokrijejo krivuljo in faktorja skrčitve teh škatlic. Za podrobnosti glej sliko 9. Po definiciji dimenzije štetja škatlic, nam smerni koeficient grafa te funkcije ponudi dimenzijo same krivulje. Torej je dimenzija krivulje naše praproti enaka 1,677.

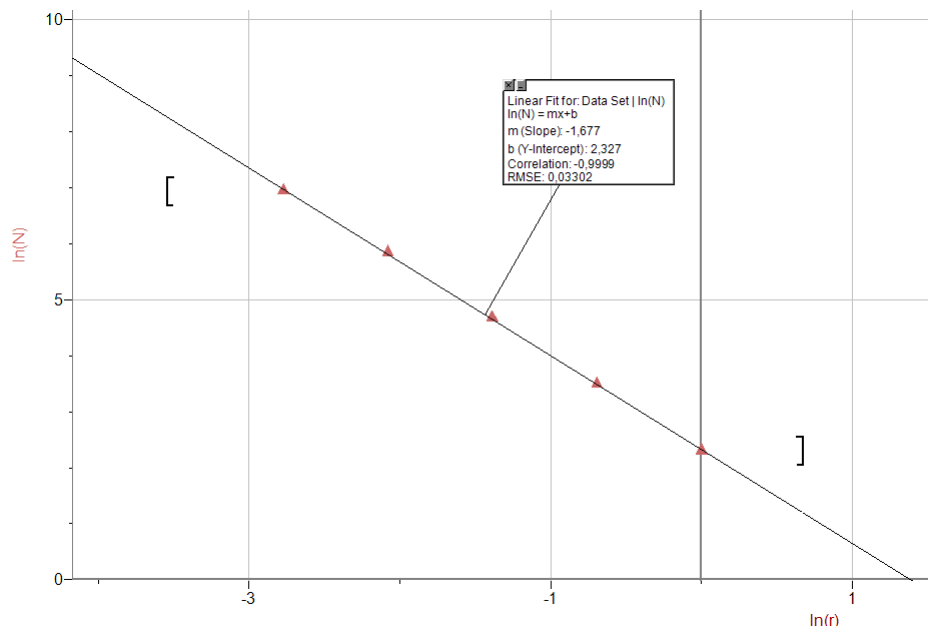
3.2 Ploščine in obsegi fraktalov

V nadaljevanju si bomo pogledali, kako se računata ploščina in obseg fraktala. Za začetek si pogledajmo primer sebi-podobnostnega fraktala, ki smo ga generirali s pomočjo programa POV-RAY, postopek njegove konstrukcije pa prikazuje slika 10.

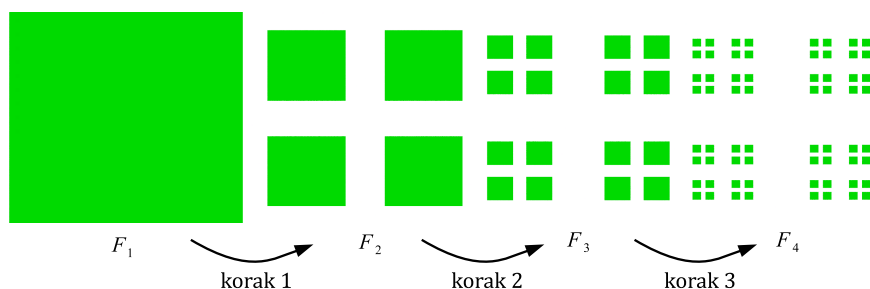
Fraktal F smo generirali tako, da smo na vsaki iteraciji skrčili kvadrat za $\frac{1}{3}$ in štiri kopije postavili blizu kotov. Pogledajmo najprej, kakšen je njegov obseg. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je stranica množice F_1 enaka 1. Torej je $o(F_1) = 4$. Stranica množice F_2 je enaka $\frac{1}{3}$, saj ima naš postopek generiranja fraktala prav takšen faktor skrčitve. Torej je $o(F_2) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 = 5.\bar{3}$. Množico F_3 tvorimo tako, da je stranica posameznega dela enaka $\frac{1}{9}$. Zato je obseg $o(F_3) = \frac{4^3}{3^2} = 7.\bar{1}$. Na podoben način dobimo $o(F_4) = \frac{4^4}{3^3} = 9.\overline{481}$. Vidimo lahko, da se obseg z vsako iteracijo večja. V splošnem je $o(F_n) = \frac{4^n}{3^{n-1}}$, kjer je n poljubna korak skrčitve delov predhodne množice za faktor $\frac{1}{3}$. Da



Slika 8: Prikaz praproti v mrežah s kvadrati različnih dimenzij.



Slika 9: Prikaz logaritemske odvisnosti števila kvadratkov, ki jih na nekem koraku potrebujemo, da pokrijemo celotno krivuljo in dolžine stranice posameznega kvadrata.



Slika 10: Postopek konstrukcije primera sebi-podobnostnega fraktala, na katerem smo izračunali obseg in ploščino.

dobimo obseg fraktala, moramo izvesti neskončno korakov takšnih skrčitev. To pomeni, da je

$$o(F) = o(F_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} o(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1} \right) = \infty,$$

saj geometrijsko zaporedje, ki ima kvocient večji od ena, divergira. To pomeni, da ima naš fraktal neskončen obseg.

Sedaj pa pogledajmo še njegovo ploščino. Spet lahko predpostavimo, da je stranica množice F_1 enaka 1. Dobimo, da je $S(F_1) = 1$. Stranica množice F_2 je dolžine $\frac{1}{3}$. Torej je $S(F_2) = \frac{1}{9} \cdot 4 = 0.\bar{4}$. Množico F_3 tvorimo tako, da je stranica posameznega dela enaka $\frac{1}{9}$. Zato je ploščina $S(F_3) = \frac{1}{9^2} \cdot 4^2 \approx 0.198$. Na podoben način dobimo $S(F_4) = \frac{1}{9^3} \cdot 4^3 \approx 0.088$. Vidimo lahko, da se ploščina z vsako iteracijo manjša. V splošnem je $S(F_n) = \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$, kjer je n poljuben korak skrčitve za faktor $\frac{1}{3}$. Da dobimo ploščino fraktala, moramo izvesti neskončno korakov takšnih skrčitev. To pomeni, da je

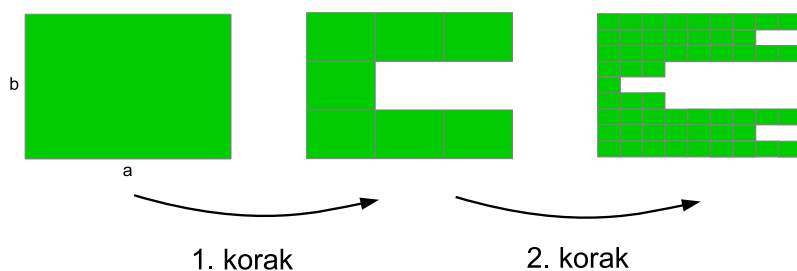
$$S(F) = S(F_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} = 0,$$

saj geometrijsko zaporedje, ki ima kvocient strogo med vrednostima nič in ena, konvergira proti 0. To pomeni, da ima naš fraktal ploščino enako nič.

Našli smo torej fraktal F , ki premore neskončen obseg, njegova ploščina pa je enaka 0.

Poglejmo si še en primer fraktala, katerega ploščina je končna. Definirajmo fraktal po vzorcu, ki ga prikazuje slika 11.

Brez škode za splošnost predpostavimo, da je začetni lik enotski kvadrat, ki ga na vsakem koraku skrčimo za faktor $\frac{1}{3}$. Potem je ploščina dobljenega lika



Slika 11: Postopek konstrukcije fraktala F' .

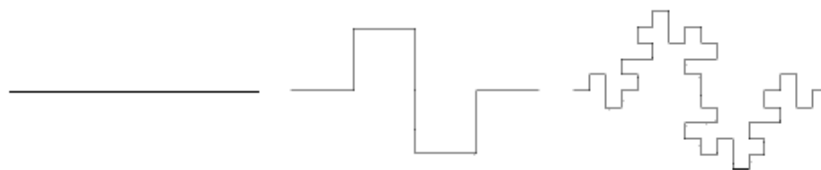
na vsakem koraku:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1 \\
 S_2 &= 1 - \frac{2}{9} \\
 S_3 &= 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9^2} \cdot 3 \\
 S_3 &= 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9^2} \cdot 3 - \frac{2}{9^3} \cdot 3^2 + \dots \\
 S_\infty &= S_{F'} = 1 - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1^2}{3} + \dots \right) = \\
 &= 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

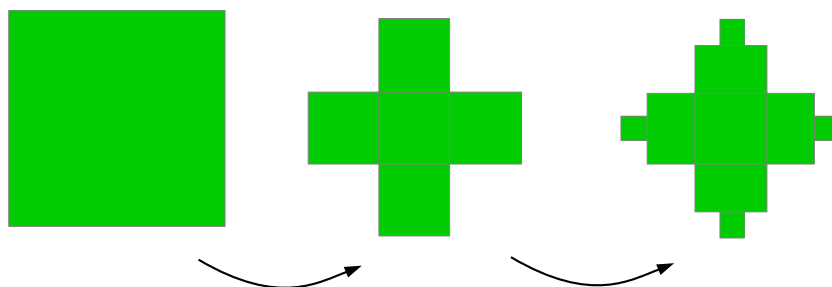
Fraktal F' ima torej ploščino enako dveh tretjinam ploščine začetnega enotskega kvadrata. Hitro bi lahko ugotovili tudi, da je obseg takšnega lika neskončen.

Kot zanimivost si pogledjmo fraktal, ki ga dobimo po postopku, ki ga nakazuje slika 12. Na vsakem koraku vsako od daljic skrčimo za faktor $\frac{1}{4}$ in 8 novonastalih pomanjšanih kopij postavimo v nek izbran vrstni red. Poljubnemu fraktalu, ki ga dobimo z izbranim nizanem pomanjšanih stranic, bomo rekli *zmajeve krivulje*. V kolikor sklenemo skupaj štiri zmajeve krivulje, dobimo t.i. *zmajev lik*. Pri računanju ploščine zmajevega lika hitro ugotovimo, da na vsakem koraku izločimo enako število "kvadratkov" kot jih dodamo v množico. Torej ostane ploščina konstantna skozi celoten postopek generiranja fraktala. Zato je ploščina tako konstruiranega zmajevega lika enaka kar ploščini začetne množice.

V prikazanih primerih smo opazili, da je lahko ploščina posameznega fraktala enaka 0, lahko pa je tudi neka konkretna, od nič različna vrednost. Pogoji omejenosti množice nam onemogoča, da bi bila ploščina fraktala enaka neskončno.



Slika 12: Postopek konstrukcije zmajeve krivulje.



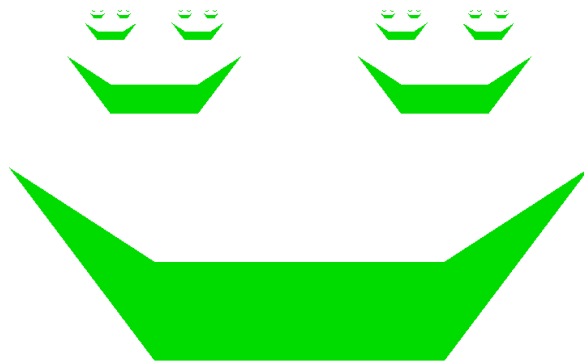
Slika 13: Postopek konstrukcije primera sebi-podobnostnega fraktala, ki ima končen obseg.

Intuitivno gledano bi lahko na podlagi zgornjih primerov sklepali, da je obseg poljubnega fraktala neskončen. Kljub temu pa lahko hitro najdemo tak fraktal, ki temu ne zadošča. Eden takih primerov je prikazan na sliki 13. Na vsakem koraku opazimo, da je obseg nove množice enak obsegu predhodne (torej začetne). Zato je obseg tega fraktala enak obsegu kvadrata, s katerim postopek začnemo.

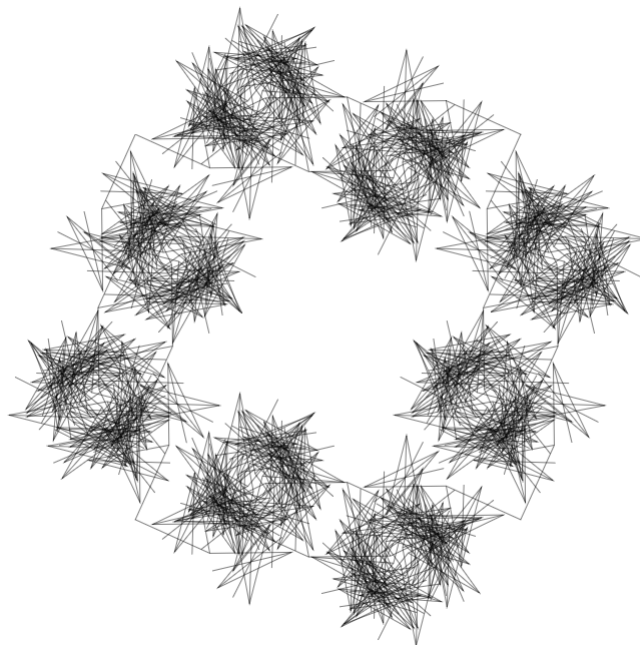
3.3 Izdelava fraktalov s programom POV-RAY in s pomočjo spletnega generatorja

Persistence of Vision Ray Tracer, krajše POV-Ray je program, s katerim lahko preko zapisa programa uporabnik izdelava večdimenzionalno sliko matematičnega objekta. Program prav tako omogoča izdelavo animacij, ki jih dobimo z vrtenjem ali približevanjem oz. oddaljevanjem izdelanih matematičnih oblik.

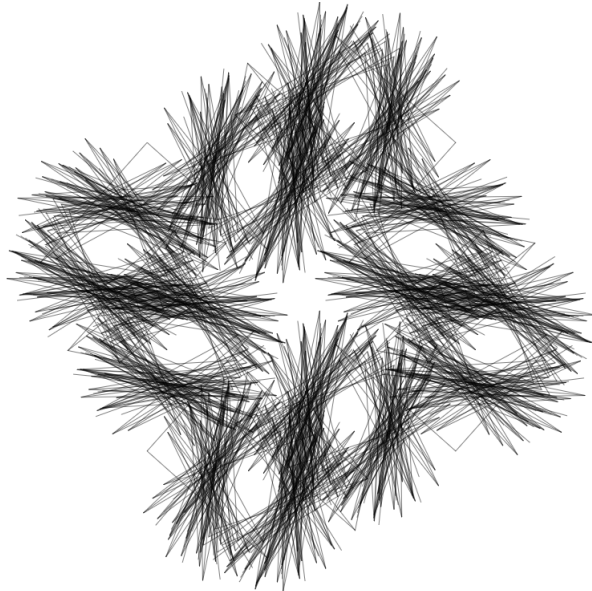
V zaključku tega članka predstavljamo primere fraktalov, ki smo jih narisali v programu POV-RAY in so plod naše domišljije. V programu smo na začetku generiranja fraktala izbirali različne začetne množice in nastali so najrazličnejši fraktali z zanimivimi oblikami. Prav tako smo si v generatorju, ki je dostopen na [14], izbrali neke začetne množice in generirali fraktale z zanimivimi podobami. Nekatere od "kreacij" si bralec lahko ogleda na slikah 14, 15, 16 in 17.



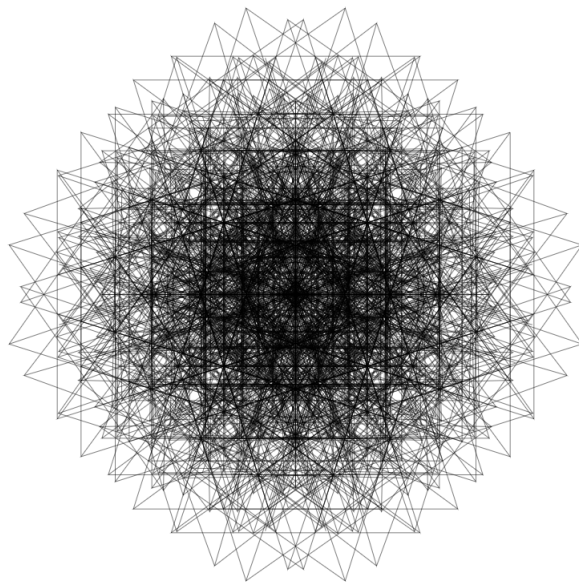
Slika 14: Fraktal "smajko".



Slika 15: Fraktal "šopki rož".



Slika 16: Fraktal "Picasso".



Slika 17: Fraktal "štrikanje".

Literatura

- [1] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [2] Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Dover Publications, New York, 2012.
- [3] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, L. Yunker (auth.), *Fractals for the Classroom - Strategic Activities*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] Viri primerov za računanje dimenzij, obsegov in ploščin fraktalov. (29.7.2021). Pridobljeno iz https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/IntroToFrac/InvProb/IFSExerc/IFSExerc.html.
- [5] Dürerjevi petkotniki (29.7.2021). Pridobljeno iz <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pentagon/Durer.html>
- [6] Osnova zgodovinske podlage področja fraktalov. Pridobljeno iz J. Sheppard, C. Lee. *Fractals and the Koch snowflake*, University of Leicester, Mathematics BSc, 2020.
- [7] Leto predstavitve koncepta fraktalnih dimenzij (29.7.2021). Pridobljeno iz <https://www.britannica.com/science/fractal>
- [8] Ozadje zgodovine Mandelbrotovega generiranja fraktalov z računalnikom (29.7.2021). Pridobljeno iz <https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/>
- [9] Fotografija Cantorjeve množice (29. 7. 2021). Pridobljeno iz https://sl.wikipedia.org/wiki/Cantorjeva_mno%C5%BEica#/media/Slika:Cantor_set_in_seven_iterations.svg
- [10] Fotografija piramide Sierpinskega. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Sierpinski_pyramid.png
- [11] Fotografija generiranja Kochove krivulje. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://www.researchgate.net/figure/Construction-of-the-von-Koch-curve-F-At-each-stage-the-middle-third-of-each-interval_fig5_26365833

- [12] Fotografija Kochove snežinke. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake#/media/File:KochFlake.svg
- [13] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza 1*, DMFA, Ljubljana, 2016.
- [14] Spletni generator fraktalov. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz <https://sciencevmagic.net/fractal/#0060,0090,1,1,0,0,1>