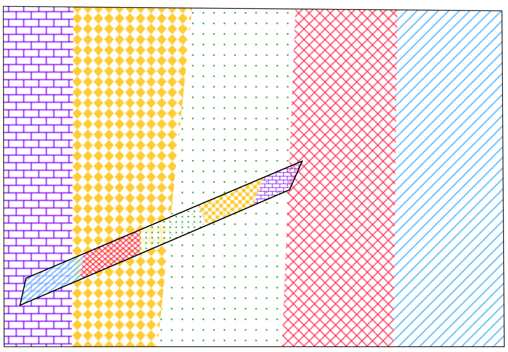
Banachovo skrčitveno načelo

Avtorji: Maša Smajila, Ana Štuhec, Nejc Zajc
Mentorica: Neža Žager Korenjak

1 Uvod

Naš MARSovski projekt v samem jedru vključuje Banachovo skrčitveno načelo, začene pa se s preprosto uganko. Pravokotnik razdelimo na 5 pasov različnih barv, nato pa ga skrčimo in poskušamo dobljeni pravokotnik postaviti na prvotnega tako, da se enaki barvi ne dotikata.



Slika 1: Pravokotniik in skrčitev le-tega.

Ko nam po poskušanju naloga ni uspela, smo razmišljali o njeni izvedljivosti. Ker je v primeru nerešljivosti naloge to potrebno tudi dokazati, smo začeli postavljati temelje (osnovne definicije, ki smo jih potrebovali pri razumevanju in dokazovanju problema). Ugotovili smo, da naloga ni rešljiva, kar smo na koncu tudi dokazali.

2 Osnovne definicije

Definicija 1. *Metrični prostor* je množica M skupaj s preslikavo $d : M \times M \to [0, \infty)$, za katero velja:

- $d(A,B) = d(B,A)$ za vsak $A, B \in M$;
- $d(A,B) = 0 \iff A = B$ za vsak $A, B \in M$;
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$ za vsak $A, B, C \in M$.

Preslikavo d imenujemo metrika in sicer posplošuje našo intuitivno predstavo razdalje v ravnini in prostoru. Ko govorimo o metriki, lahko omenimo tudi diskreten metrični prostor.

Zgled 1. Naj bo M poljubna neprazna množica. Definirajmo preslikavo $d : M \times M \to [0, \infty)$ s predpisom

$$d(A,B) = \begin{cases} 0; & A = B \\ 1; & A \neq B \end{cases}$$

Enostavno se da preveriti, da je to zares metrika, vendar se v osnovi ne sklada z našo intuitivno predstavo razdalje, saj so točke, ki ne sovpadajo, enako oddaljene. Dobljeni metrični prostor imenujemo *diskretni metrični prostor*.

Zgled 2. Standardno metriko na $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$, kjer sta $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ in $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, definiramo kot:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

V primeru $n = 1$ dobimo $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$.

Definicija 2. *Zaporedje* v metričnem prostoru M je preslikava $a : \mathbb{N} \to M$. Členi zaporedja so zaloga vrednosti preslikave a in jih označimo $a(n) = a_n$.

Definicija 3. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru M *konvergira* k $a \in M_0$, če vsaka okolica točke a vsebuje vse a_n od nekega naprej, tj. če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}_0$, da je $d(a_n, a) < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Točko a imenujemo *limita zaporedja* a_n, označimo pa jo $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

Zgled 3. Poglejmo si dve zaporedji v realnih številih s standardno metriko, ki konvergirata.

- Definirajmo zaporedje: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. To zaporedje konvergira, njegova limita pa je $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

- Za $0 < q < 1$ definirajmo zaporedje s predpisom $a_n = q^n$. To zaporedje konvergira in njegova limita je enaka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definicija 4. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru M je *Cauchyjevo*, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$.

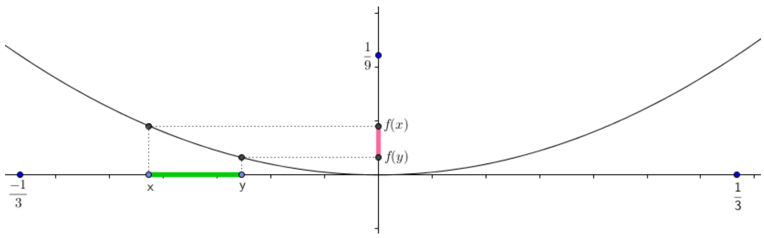
Hitro lahko ugotovimo, da je vsako konvergentno zaporedje hkrati tudi Cauchyjevo, obratno pa ni nujno res. Oglejmo si racionalna števila z metriko $d(x, y) = |x - y|$. Protiprimer je zaporedje racionalnih približkov števila $\sqrt{2}$ pri katerem je vsak naslednji člen bolj natančen. To zaporedje v $\mathbb{Q}$ nima limite, saj $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definicija 5. *Metrični prostor* je *poln*, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje tudi konvergentno, to pomeni, da je Cauchyjev pogoj zadosten za konvergenco.

Po zgornjem razmisleku vidimo, da racionalna števila niso poln metrični prostor, saj smo našli Cauchyjevo zaporedje brez limite. Primera polnih metričnih prostorov sta množica realnih števil in ravnina s standardno metriko.

Definicija 6. $f : M \to M$ je *skrčitev*, če obstaja $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, da za vsaka $A, B \in M$ velja $d(f(A), f(B)) \leq q \cdot d(A, B)$.

Definirana skrčitev se sklada z intuitivno predstavo, da se razdalja med poljubnima dvema točkama zmanjša. Tako sta dobljeni sliki vedno bližje kot originala. Primer funkcije, ki je skrčitev, je kvadratna funkcija na intervalu blizu 0. Vzemimo $f : [\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}] \to [\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}]$ s predpisom $f(x) = x^2$.



Slika 2: Graf funkcije f.

Ocenimo razdaljo med slikama dveh poljubnih x in y, v intervalu $[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}]$:

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|,$$

kjer zadnja neenakost velja, saj je $|x + y| \leq |x| + |y| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3 Banachovo skrčitveno načelo

Sedaj smo opremljeni z vsemi orodji, ki jih potrebujemo za formulacijo in dokaz glavnega izreka. Povedal nam bo, da ima skrčitev vedno neko odlikovano – negibno – točko. To nam bo pomagalo pri utemeljitvi nerešljivosti igre iz uvoda.

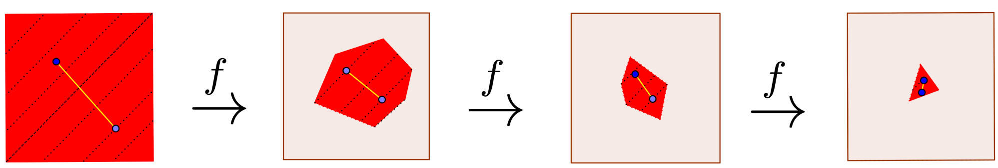
Izrek 1. *Naj bo M poln metrični prostor in naj bo $f\colon M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena negibna točka preslikave f, tj. obstaja natanko en tak $x \in M$, da velja $f(x) = x$.*

Dokaz. Označimo z A_0 poljubno točko v M in z A_1 njegovo sliko. Definirajmo zaporedje $\{A_n\}_n$:

$$A_0 \in M,\ A_1 = f(A_0),\ A_2 = f(A_1), \ldots, A_n = f(A_{n-1}), \ldots$$

Definirajmo si konstanto $D = d(A_0, A_1)$, tj. razdaljo med prvima dvema zaporednima členoma. Velja

$$\begin{aligned} d(A_n, A_{n+1}) &= d(f(A_{n-1}), f(A_n)) \leq && (1)\\ &\leq q \cdot d(A_{n-1}, A_n) = && (2)\\ &= q \cdot d(f(A_{n-2}), f(A_{n-1})) \leq \\ &\leq q^2 \cdot d(A_{n-2}, A_{n-1}) \leq \\ &\vdots \\ &\leq q^n \cdot d(A_0, A_1) = q^n \cdot \end{aligned}$$



Slika 3: Kaj se lahko zgodi, ko neko konkretno skrčitev f iteriramo.

V enačbi (**??**) smo uporabili definicijo zaporedja $\{A_n\}_n$. V vrstici (**??**) smo upoštevali, da je funkcija f skrčitev. Koraka **??** in **??** ponavljamo, dokler ne pridemo do razdalje med začetnima členoma A_0 in A_1, kar prikazuje zadnja vrstica.

Razdaljo med poljubnima členoma zaporedja ocenimo z uporabo trikotniške neenakosti. Brez škode za splošnost privzemimo, da je $m > n$.

$$\begin{aligned}
d(A_m, A_n) &\leq d(A_m, A_{m-1}) + d(A_n, A_{m-1}) \leq \\
&\leq d(A_m, A_{m-1}) + d(A_{m-1}, A_{m-2}) + d(A_n, A_{m-2}) \leq \\
&\vdots \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(A_{n+k}, A_{n+k+1}) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} q^{n+k} \cdot D = \\
&= D \cdot q^n \sum_{k=0}^{m-n-1} q^k = D \cdot q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q}
\end{aligned}$$

Ocenimo lahko, da je

$$\frac{1 - q^{m-n}}{1-q} < \frac{1}{1-q}.$$

Torej velja

$$D \cdot q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} < D \cdot \frac{q^n}{1-q},$$

kjer je razvidno, da je faktor $E = \frac{D}{1-q}$ neodvisen od vrednosti n. Sledi, da je

$$d(A_m, A_n) \leq D \cdot \frac{q^n}{1-q} = E \cdot q^n.$$

Po zgledu **??** bo za dovolj velik n veljalo $E \cdot q^n < \varepsilon$. Če povzamemo, za dovolj velika m in n velja:

$$d(A_m, A_n) \leq E \cdot q^n < \varepsilon.$$

S tem smo dokazali, da je zaporedje Cauchyjevo. Po definiciji polnega metričnega prostora je to zaporedje konvergentno.

Naj bo $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. Dokažimo, da je A negibna točka funkcije f. Dovolj je pokazati, da $\{f(A_n)\}_n$ konvergira proti $f(A)$, saj tedaj velja

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} f(A_{n-1}) = f(A).$$

Naj bo $\delta > 0$. Ker $\{A_n\}_n$ konvergira proti A, obstaja n_0, da za vsak $n > n_0$ velja $d(A, A_n) < \delta$. Ocenimo

$$d(f(A), f(A_n)) \leq q \cdot d(A, A_n) < \delta.$$

Po definiciji limite to pomeni, da je $f(A) = \lim_{n\to\infty} f(A_n)$.

Pokazati moramo še enoličnost negibne točke; predpostavimo, da obstajata dve negibni točki, poleg A še B. Razdalja med njunima slikama je enaka razdalji med njima, po drugi strani pa je manjša od razdalje med njima, ker je preslikava skrčitev:

$$d(A,B) = d(f(A), f(B)) \leq q \cdot d(A,B).$$

Ker pa je $q < 1$, smo prišli do protislovja. Torej obstaja samo ena negibna točka. $\square$

S tem smo dokazali, da je bila zastavljena uganka nerešljiva. Če prvotni pravokotnik preslikamo (skrčimo) v manjši pravokotnik, bo obstajala natanko ena negibna točka. Recimo, da se negibna točka nahaja na rumenem polju. Ko bomo manjši pravokotnik (sliko) položili na večjega (originalnega), se bosta prekrivali vsaj na eni točki, kjer sta oba obarvana z rumeno.

Literatura

[1] Josip Globevnik, Miha Brojan: *Analiza 1*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2010.