Razdelitev ravnine s premicami

Aljoša Krstič, *Šentilj, II. gimnazija Maribor*
Mateja Čarman, *Medvode Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana*
Jan Zmazek, *Ptuj, Gimnazija Ptuj*
Lara Kozarski (mentorica), *Domžale, Fakulteta za matematiko in fiziko*

Povzetek

Na Marsu delijo ozemlje med različne marsovske družine na poseben način. Z naprednim marsovskim orodjem čez celotno površje naključno rišejo premice. Pri tem nastajajo različna območja. Marsovske družine naseljujejo na s premicami omejena območja, neomejena območja pa ostajajo neposeljena. Po nekaj letih je nastal problem, saj je bilo veliko premic med seboj vzporednih ali pa se jih je v eni točki sekalo več, zaradi tega je bilo štetje območij oteženo. Problem rešuje skupina Marsovcev znanstvenikov Mateja, Aljoša in Jan.

Uvod

Ravnino razdelimo s premicami. Pri enakem številu premic lahko dobimo različno število območij, kar je odvisno od lege premic. Pri manjšem številu premic se območja da prešteti, težava pa nastane, če število premic povečamo, saj je nastalih območij preveč. Vzporedne premice in sekanje več premic v eni točki bistveno vplivajo na število območij. Formulo za število območij je leta 1889 podal britanski matematik Samuel Roberts.

V formuli in med dokazovanjem je uporabljen binomski simbol $\binom{n}{k}$, ki pove število načinov, na katere lahko izmed n elementov izberemo k elementov. Izračunamo ga po formuli

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}.$$

Med računanjem je pogosto uporabljena naslednja lastnost binomskega simbola:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Robertsova formula

Opazujemo različne možnosti sekanja različnega števila premic ter štejemo nastala območja. Začnemo s premicami v splošni legi, kar pomeni, da se v eni točki lahko sekata največ 2 premici, in da nobeni 2 premici nista med seboj vzporedni. Najprej ugotavljamo, za koliko se poveča število območij, ko k splošni legi premic dodamo novo premico. Če torej v ravnino z n premicami dodamo še eno premico, že narisane premice sekajo novo premico v n točkah, pri tem pa razdelijo novo premico na $n+1$ delov. Vsak izmed teh delov razdeli eno območje na 2 dela. Nastane $n+1$ novih območij, zato velja rekurzivna formula

$$R_{n+1} = R_n + n + 1. \tag{1}$$

Za število vseh območij pri splošni legi n premic v ravnini velja zveza

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}, \tag{2}$$

ki se jo iz (1) dokaže s popolno indukcijo.
Potrebno je torej ugotoviti, kaj se zgodi, če premice niso v splošni legi. V prvem primeru se v eni točki

sekajo 3 premice ali več. Število vseh območij se v primerjavi s številom območji pri enakem številu premic v splošni legi zmanjša. Oglejmo si večkratno presečišče, kjer se seka λ premic. Te premice razmaknemo tako, da dobimo postavitev, ki bi jo tvorilo λ premic v splošni legi. Premice iz skupnega presečišča postopamo odmikamo. Ko odmaknemo prvo, pridobimo $\lambda-2$ območij, ko odmaknemo še eno, jih pridobimo $\lambda-3$ itd. Premice odmikamo dokler ne dobimo postavitve, ki bi jo te premice tvorile v splošni legi. Ko odmaknemo zadnjo, pridobimo le še 1 območje. Število območij se v taki točki razlikuje za

$$(\lambda-2)+(\lambda-3)+(\lambda-4)+\cdots+2+1=\sum_{i=1}^{\lambda-2} i=\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{2}=\binom{\lambda-1}{2}.$$

Ta formula velja za vsako večkratno presečišče, zato moramo vse vrednosti, ki jih dobimo na tak način, med seboj sešteti. Pri tem za vsako večkratno presečišče upoštevamo pripadajočo λ.

V drugem primeru obravnavamo vzporedne premice. Podobno kot zgoraj ugotovimo, za koliko se število območij razlikuje od tistega, ki bi ga te premice tvorile v splošni legi. Družino μ vzporednic premaknemo tako, da se vse sekajo v isti točki. Od prej vemo, da imamo zaradi večkratnega presečišča $\binom{\mu-1}{2}$ območij manj kot bi jih bilo v splošni legi. Zaradi premika vzporednih premic v skupno presečišče pa imamo manj še dodatnih $\mu-1$ območij. To skupaj nanese

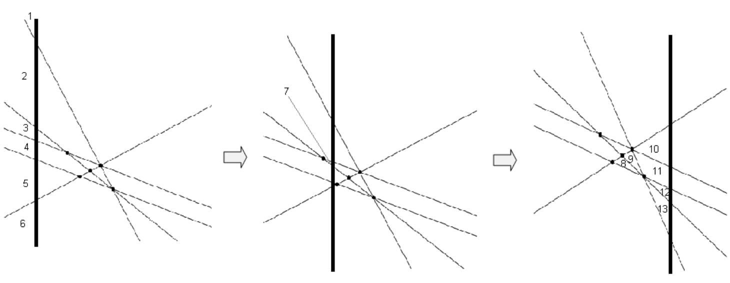
$$\binom{\mu-1}{1}+\binom{\mu-1}{2}=\binom{\mu}{2}$$

območij. Enako kot pri primeru večkratnih presečišč velja tudi pri vzporednih premicah, da ta formula velja za vsako družino vzporednih premic, zato moramo vrednosti med seboj sešteti. Za vsako družino vzporednic spet upoštevamo pripadajoči μ.

Da dobimo izraz za izračun števila območij n premic v poljubni legi, moramo od izraza (2) za število območij n premic v splošni legi odšteti število območij, ki jih izgubimo zaradi m večkratnih presečišč in v družin vzporednih premic. Dobimo formulo

$$R=1+n+\binom{n}{2}-\sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i-1}{2}-\sum_{j=1}^{v}\binom{\mu_j}{2}. \tag{3}$$

Formula je intuitivno pridobljena z opazovanjem dogajanja v okolici ene točke oz. ene družine vzporednih premic, zato jo je potrebno bolj dosledno dokazati. To naredimo s *sweep-line* metodo, kjer z vzporednim premikanjem neke dodatne premice q, ki ni vzporedna z nobeno od n premic naše postavitve, preštejemo vsa območja.



Slika 1: V razporeditev s 5 premicami dodamo novo premico ter jo vzporedno premikamo preko razporeditve. Premica se giblje z leve proti desni in šteje območja, ki jih pusti na levi strani. V začetni legi je območij 6, pri prečkanju presečišč pa prišteva nova območja in na koncu poda vrednost, da je skupno število območij enako 13.

Dokaz s sweep-line metodo

Začnemo tako, da so vsa presečišča n premic na eni strani premice q. Začetno število območij je tako $n+1$. Premico nato premikamo na drugo stran preko vseh presečišč. Ko gre premica skozi enostavno presečišče, se število območij poveča za 1, ko pa gre skozi večkratno presečišče, kjer se seka λ premic se število območij poveča za $\lambda - 1$. Tako dobimo naslednji izraz

$$R = 1 + n + S + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - 1), \tag{4}$$

kjer je S število enostavnih presečišč.

Da dobimo formulo (3), moramo izraziti še število enostavnih presečišč S. V poljubni razporeditvi n premic imamo $\binom{n}{2}$ parov premic. Vemo, da se vsaki 2 premici sekata ali pa sta med seboj vzporedni. Če označimo s k_1 število parov sekajočih se premic in s k_2 število parov vzporednih premic, velja

$$\binom{n}{2} = k_1 + k_2.$$

V vsakem enostavnem presečišču se seka natanko 1 par premic, v vsakem večkratnem presečišču M_i z večkratnostjo $\lambda_i \geq 3$ pa $\binom{\lambda_i}{2}$ parov premic. Zato je skupaj

$$k_1 = S + \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i}{2}$$

parov med seboj sekajočih se premic. Oglejmo si še vzporedne pare. V j-ti družini vzporednic z μ_j premicami imamo $\binom{\mu_j}{2}$ parov premic, ki se med seboj ne sekajo. V skupnem to znese

$$k_2 = \sum_{j=1}^{m}\binom{\mu_j}{2}$$

parov med seboj nesekajočih se premic. Iz prejšnih treh enačb izrazimo S;

$$S = k_1 - \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i}{2} = \binom{n}{2} - k_2 - \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i}{2} = \binom{n}{2} - \sum_{j=1}^{v}\binom{\mu_j}{2} - \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i}{2}$$

ter izraz vstavimo v formulo (4).

$$\begin{aligned}
R &= 1 + n + S + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - 1) = \\
&= 1 + n + \binom{n}{2} - \sum_{j=1}^{v}\binom{\mu_j}{2} - \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i}{2} + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - 1) = \\
&= 1 + n + \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m}\left[\binom{\lambda_i}{2} - \binom{\lambda_i - 1}{1}\right] - \sum_{j=1}^{v}\binom{\mu_j}{2} = \\
&= 1 + n + \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m}\binom{\lambda_i - 1}{2} - \sum_{j=1}^{v}\binom{\mu_j}{2}
\end{aligned}$$

Res dobimo formulo (3), imenovano tudi Robertsova formula.

Zaključek

Z metodo, ki smo jo izbrali, je štetje območij dokaj enostavno, saj smo se osredotočili le na ozek pas v razporeditvi. Število območij smo dobili tako, da smo prešteli začetna območja ter območja, ki nastanejo ob presečiščih. Obstajajo še drugi načini dokazovanja. Problema bi se lahko lotili z matematično indukcijo, ki v tem primeru ni najbolj elementarna. Lahko pa bi premice premišljeno premikali in območja prešteli skoraj direktno.

Viri

[1] J. E. Wetzel, *On the Division of Plane by Lines*, The American Mathematical Monthly, letnik 1978, št. 8, str. 647–656.