Tibetanska meniha

Anja Petković, *Gimnazija Bežigrad, Ljubljana*
Sara Pia Marinček, *Gimnazija Bežigrad, Ljubljana*
Nadja Ogrinc, *I. gimnazija v Celju*
Maja Alif (mentorica), *Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana*

Povzetek

Meniha plezata čez Himalajo tako, da prideta vsak na drugo stran gorovja. Ves čas vzpona morata biti na istih nadmorskih višinah. S pomočjo teorije grafov se dokaže, da jima to lahko uspe. Definira se graf, katerega vozlišča so urejeni pari točk z isto nadmorsko višino, od katerih je vsaj ena prelomna. Nato se poišče pot med začetnim in končnim vozliščem in tako pokaže, da je tak vzpon res mogoč.

Zgodba o tibetanskih menihih

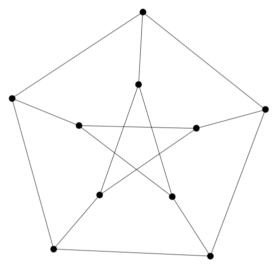
Nekega dne sta se tibetanska meniha odločila, da se bosta odpravila na sprehod na nasprotno stran Himalaje. Pot sta začela ob vznožju, vsak na svoji strani gorovja (prvi na severni in drugi na južni strani). Ker sta imela veliko časa, sta se dogovorila, da bosta sprehod nekoliko popestrila. Hodila bosta vedno na istih nadmorskih višinah, vsak pa bo pot končal v izhodiščni točki drugega. Nadmorski višini izhodišč sta enaki, hkrati pa je to najnižja točka vzpona. Ali jima je uspelo?

1 Matematična osnova

Problema se bomo lotili s pomočjo teorije grafov. Najprej definirajmo nekaj pojmov, ki jih bomo potrebovali za rešitev problema.

Definicija 1 *Naj bo V končna neprazna množica in naj bo E poljubna družina dvoelementnih podmnožic množice V. Potem urejenemu paru $G = (V, E)$ pravimo* graf

- *na* množici vozlišč $V = V(G)$ *in*
- *z* množico povezav $E = E(G)$.



Slika 1: Petersenov graf

Definicija 2 Stopnja vozlišča *v grafu G, označimo je z $deg_G(u)$ ali $d_G(u)$, je število povezav grafa G, ki imajo vozlišče u za svoje krajišče.*

Lema 1 (Lema o rokovanju) *V vsakem grafu je vsota stopenj vozlišč enaka številu povezav, pomnoženem z 2:*

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$$

Dokaz te leme je zelo preprost, zato ga lahko kar zapišemo:

DOKAZ. Ker ima vsaka povezava dva konca, prispeva k vsoti stopenj grafa natanko 2. Rezultat sledi. □

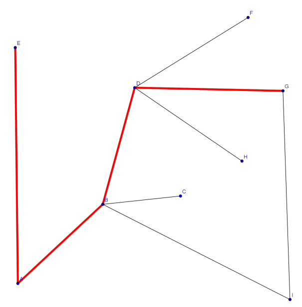
Lema o rokovanju ima dve pomembni posledici, ki pripomoreta k dokazu rešitve problema o tibetanskih menihih.

Posledica 1 *V vsakem grafu je vsota vseh stopenj vozlišč grafa sodo število.*

Posledica 2 *V vsakem grafu je število vozlišč lihe stopnje sodo.*

Definicija 3 *Naj v grafu G velja $u, v, w, x, y, z \in V(G)$.* Sprehod dolžine *$k$ v grafu G je zaporedje k povezav grafa G oblike uv, vw, wx, $\ldots$, yz. Tak sprehod označimo z $uvwx \ldots yz$ in ga poimenujemo* sprehod med vozliščema *u in z.*

Definicija 4 *Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod imenujemo* enostavni sprehod *ali* sled*. Če so v enostavnem sprehodu vsa vozlišča različna, potem sprehod poimenujemo* pot*.*



Slika 2: Primer poti v grafu

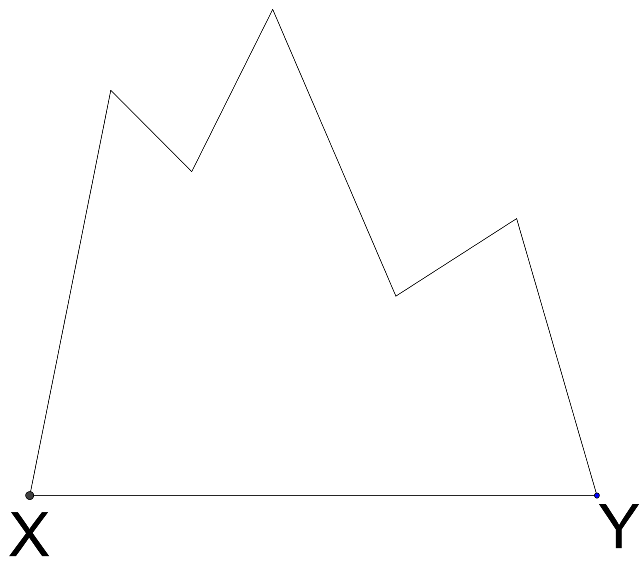
Definicija 5 *Graf G je* povezan*, če obstaja pot med poljubnim parom vozlišč. Sicer je* nepovezan*.*

2 Rešitev

Problem si najlažje predstavljamo na skici.

Goro si predstavljamo kot lomljeno črto (slika 3). Naša dva meniha sta vsak na svoji strani gore. Izhodišče levega poimenujemo x, izhodišče desnega pa y.

Naš cilj je njun problem prevesti v teorijo grafov, s katero bi preverili, če lahko prvi pride iz točke x v točko y, drugi pa iz točke y v točko x tako, da sta ves čas vzpona na istih nadmorskih višinah. Izraz *točka* bo v tem primeru pomenil mesto na gori z določeno nadmorsko višino. Pravimo, da menih *napreduje*, če se pomika proti izhodišču drugega meniha (svojemu cilju v vodoravni komponenti), sicer *nazaduje*. Menih nazaduje le v primeru, da s tem omogoči napredovanje drugega meniha. Iz izhodišča lahko menih le napreduje, saj se točki x in y nahajata na najnižjih nadmorskih višinah.



Slika 3: Skica Himalaje

Definicija 6 *Prelomna točka rečemo vrhu ali najnižji točki doline..*

Trditev 1 *Če se bosta meniha srečala, se bo to zgodilo kvečjemu na prelomni točki, ki se nahaja med njima.*

Dokaz. Meniha morata biti vedno na istih nadmorskih višinah; če predpostavimo, da bi se srečala v točki, ki ni prelomna točka, bi to pomenilo, da sta bila tik pred srečanjem na različnih nadmorskih višinah. □

Pri iskanju rešitve si pomagamo s skico.

Najprej poiščemo prelomne točke in jih označimo. Skozi vsako prelomno točko narišemo vodoravnico (izohipso) in označimo njihova presečišča s krivuljo, ki predstavlja goro.

Trditev 2 *Če se bosta meniha srečala, se bo to zgodilo v neki točki, ki jo označimo z z. Točka z mora biti prelomna točka (po trditvi 1).*

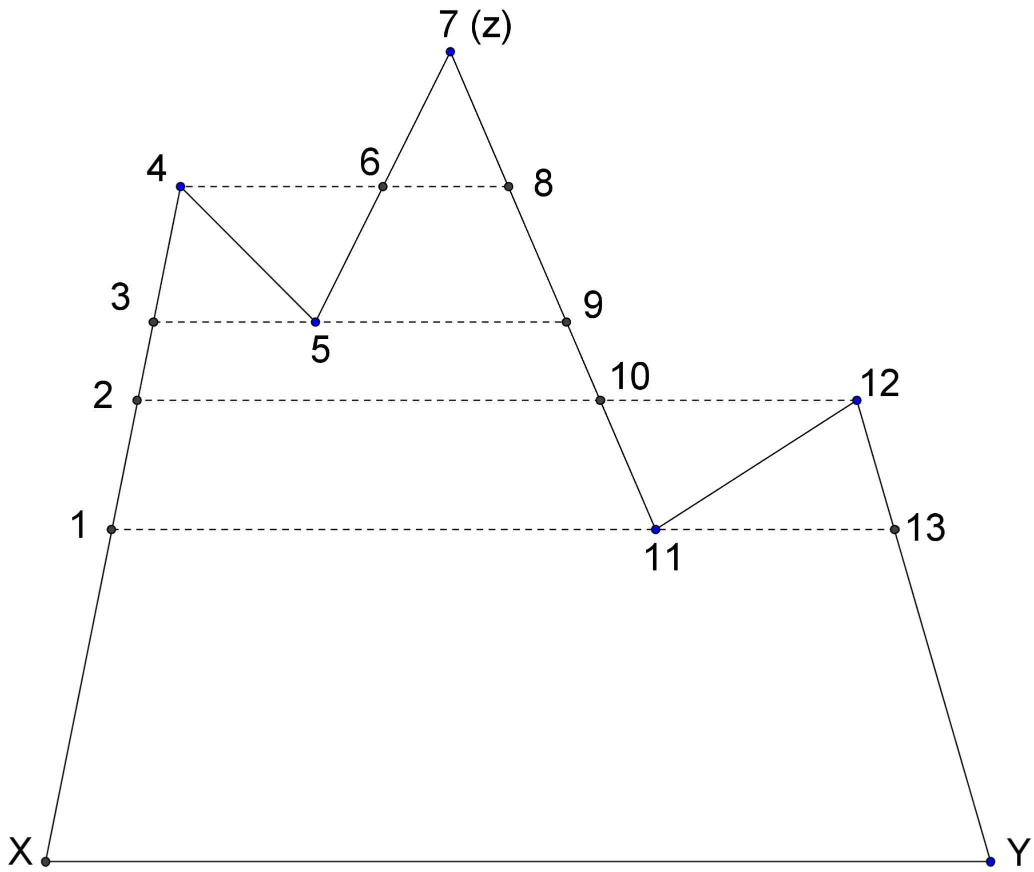
Menih, ki je pot začel v izhodišču x, se bo vse do srečanja nahajal levo od točke z, drugi pa na desni strani točke z. Poiščemo vse urejene pare točk na isti nadmorski višini tako, da je vsaj ena od točk v paru prelomna točka. Ker vsak tak urejeni par predstavlja možen položaj obeh menihov, izločimo vse tiste pare, za katere velja, da se obe točki nahajata na isti strani točke z. V primeru na skici izločimo pare $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,6)$, $(6,4)$, $(10,12)$, $(12,10)$, $(11,13)$, $(13,11)$.

Urejeni pari, ki ostanejo, predstavljajo vozlišča v novem grafu. Med vozlišči narišemo povezavo natanko tedaj, ko lahko v enem koraku meniha prideta iz danega položaja, ki ga predstavlja prvi urejeni par, v položaj, ki ga predstavlja drugi urejeni par.

Trdimo, da je vsako vozlišče v tako dobljenem grafu sode stopnje.

Vedno velja, da vsaj eden izmed menihov napreduje (po gori v vodoravni smeri). Vsako vozlišče med začetnim (x,y) in končnim (y,x) ima torej natanko dve povezavi (po eni v vozlišče pridemo in po drugi ga zapustimo, ko napravimo korak). Če bi v neko vozlišče vodilo več povezav, bi te povezave predstavljaje nazadovanje obeh ali nepotrebno podaljšanje sprehoda.

Graf začnemo v izhodišču enega meniha – v vozlišču (x,y) in se pomikamo skozi ostala vozlišča stopnje 2, dokler je to mogoče. Ker je vozlišč končno, se naša pot mora nekje končati.



Slika 4: Skica Himalaje z izohipsami

Dobimo nek podgraf, za katerega mora veljati lema o rokovanju, torej mora biti število vozlišč lihe stopnje sodo. Edino drugo vozlišče lihe stopnje je (y, x), zato mora biti vsebovano v tej poti oz. je njen konec.

3 Zaključek

Ugotovili smo, da je menihoma uspelo doseči zastavljeni cilj in živela sta srečno do konca svojih dni…

Viri

[1] R. J. Wilson, *Uvod v teorijo grafov.* DMFA založništvo, 1997.

[2] P. Potočnik, *Diskretna matematika 1*, zapiski s predavanj, FMF, šolsko leto 2009/10.