Marsovec v hribih

Mateja Čarman, *Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana*
Tisa Ževart, *Gimnazija Slovenj Gradec*
Špela Pušnik, *Gimnazija Velenje*
Špeh Jaka (mentor),*Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

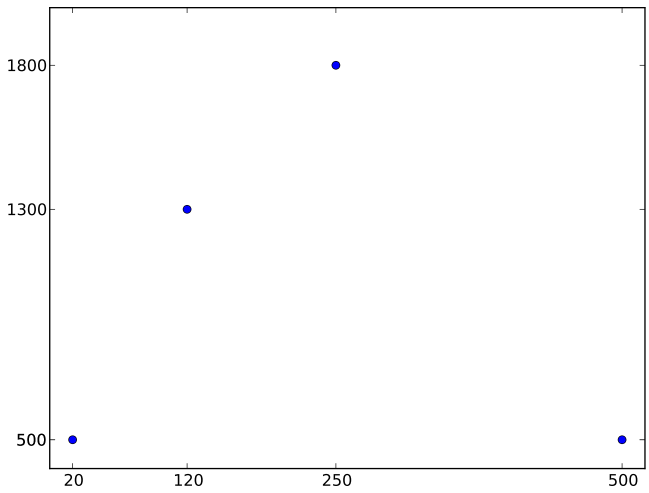
POVZETEK
Predstavljajte si pridnega Marsovca na poti v hribe, ki si zapisuje čase, ko doseže neko nadmorsko višino. Ker to lahko stori le ob določenih časih, ko ob poti opazi oznako, nima veliko meritev. Dobljene točke bi rad povezal s krivuljo. Mi smo se tega problema lotili z interpolacijo polinomov.

Višinske točke

Naš marsovec je priden športnik, ki redno nabira kondicijo. Tako se nekega dne odloči za pohod v hribe. Na rame si oprta nahrbtnik in se odpravi. Na poti do vrha stojijo štirje znaki, na katerih je zapisana nadmorska višina. Ker pa je naš marsovec tudi matematik, si pridno beleži čase, ob katerih je prispel do posameznega znaka. Ko se vrne domov, si sestavi tabelo in napiše rezultate.

Znak	Nadmorska višina (m)	Čas (min)
1.	$y_0 = 500$	$x_0 = 20$
2.	$y_1 = 1300$	$x_1 = 120$
3.	$y_2 = 1800$	$x_2 = 250$
4.	$y_3 = 500$	$x_3 = 500$

Ker obožuje grafe, si takoj nariše dobljene točke.



Slika 1: Točke iz zgornje tabele.

Slika je skoraj prazna in to ga zelo moti. Razmišljati začne, kako bi točke lahko najlepše povezal. Hkrati pa pride do problema, saj ne ve, na kolikšni nadmorski višini se je nahajal v času, ki ga ni zabeležil.

Sigma in pi

Da v matematiki zapisi niso predolgi, uporabljamo različne simbole. Dva izmed takšnih simbolov sta veliki grški črki Σ (sigma) in Π (pi). Simbol, s katerim krajše zapišemo vsoto števil, je Σ. Splošna oblika takega zapisa je:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

za $n \in \mathbb{N}$. Zapisano na dolg način pa izgleda tako:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Primer:

$$\sum_{t=2}^{6} 3t = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6.$$

Simbol, s katerim krajše zapišemo produkt števil, je Π. Splošna oblika takega zapisa je:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i,$$

zapisana na dolg način pa izgleda tako:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Primer:

$$\prod_{k=2}^{5} (k+3) = (2+3) \cdot (3+3) \cdot (4+3) \cdot (5+3).$$

Polinomi

Že v uvodu smo povedali, da je naš cilj narisati pot našega marsovca, kar bomo naredili s pomočjo polinomov. Polinom stopnje n zapišemo kot

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

za $a_i \in \mathbb{R}$, oziroma v ničelni obliki:

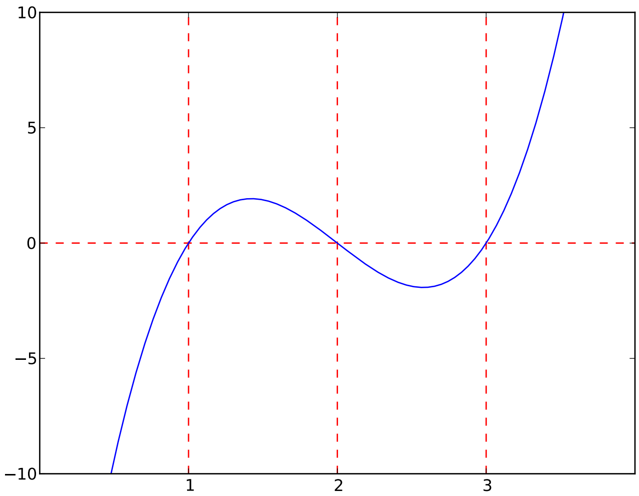
$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

kjer je a_n neko realno število, x_j pa ničle polinoma p.

Poglejmo si polinom, za katerega velja, da je $n = 3$, $a_n = 5$, njegove ničle pa so $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 3$. Ta polinom zapišemo:

$$p(x) = 5 \prod_{j=1}^{3} (x - x_j) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30$$

Vidimo ga na sliki 2.



Slika 2: Polinom $5x^3-30x^2+55x-30$.

Interpolacija

Dane imamo točke (x_0,y_0), (x_1,y_1), $\ldots$, (x_n,y_n), za katere velja $x_0<x_1<\ldots<x_n$. Želimo skonstruirati tak polinom p, pri katerem bo vrednost $p(x_0)$ enaka y_0, vrednost $p(x_1)$ enaka y_1 in tako naprej. Da pa ga bomo lahko sestavili, moramo definirati še Lagrangeeve bazne polinome.

$$\ell_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},$$

za $i=0,1,2,\ldots,n$. V tem produktu indeks j teče od 0 do n, pri čemer preskoči i. (Torej $j=0,1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n-1,n$.) Ker so točke x_i različne med seboj, ni nevarnosti, da bi delili z 0.

Oglejmo si Lagrangeev polinom za $n=3$ in $i=2$.

$$\ell_2(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{3}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}.$$

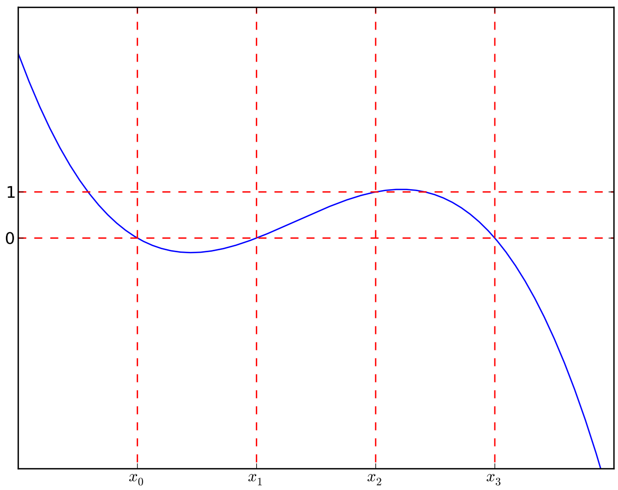
V polinom vstavimo nekaj vrednosti:

$$\ell_2(x_0)=\frac{x_0-x_0}{\underbrace{x_2-x_0}_{0}}\cdot\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-x_3}{x_2-x_3}=0$$

$$\ell_2(x_1)=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x_1-x_1}{\underbrace{x_2-x_1}_{0}}\cdot\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=0$$

$$\ell_2(x_2)=\frac{x_2-x_0}{\underbrace{x_2-x_0}_{1}}\cdot\frac{x_2-x_1}{\underbrace{x_2-x_1}_{1}}\cdot\frac{x_2-x_3}{\underbrace{x_2-x_3}_{1}}=1$$

$$\ell_2(x_3)=\frac{x_3-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_3-x_3}{\underbrace{x_2-x_3}_{0}}=0$$



Slika 3: Lagrangeev bazni polinom $\ell_2(x)$ (za $n=3$).

Iz primera in iz slike 3 vidimo, da je $\ell_2(x_2)=1$, $\ell_2(x_0)=0$, $\ell_2(x_1)=0$ in $\ell_2(x_3)$, zato nas zanima ali kaj takšnega drži tudi v splošnem. Velja:

$$\ell_i(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_i-x_j}{x_i-x_j}=\underbrace{\frac{x_i-x_0}{x_i-x_0}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x_i-x_1}{x_i-x_1}}_{1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x_i-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}}_{1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{x_i-x_n}{x_i-x_n}}_{1}=1,$$

za $i=0,1,2,\ldots,n$.

$$\ell_i(x_k)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x_k-x_0}{x_i-x_0}\cdot\frac{x_k-x_1}{x_i-x_1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{x_k-x_k}{x_i-x_k}}_{0}\cdot\ldots\cdot\frac{x_k-x_n}{x_i-x_n}=0,$$

za $i=0,1,2,\ldots,n$, $k=0,1,2,\ldots,n$ in $i\neq k$. V produktu j teče po številih $0,1,2,\ldots n$, le da izpusti i-tega ($j\neq i$). Zato bo j enkrat enak k. Torej imamo člen $\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x_k-x_k}{x_i-x_k}$, s čimer smo pokazali naslednje.

Izrek. Za realne točke $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ in Lagrangeeve polinome velja

$$\ell_i(x_i)=1 \text{ in } \ell_i(x_j)=0,$$

za $i=0,1,\ldots n$, $j=0,1,\ldots n$ in $i\neq j$.

Definirajmo polinom $p(x)$:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\ell_i(x)$$

Takemu polinomu pravimo interpolacijski polinom. Poglejmo si, da gre graf res čez točke $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y)$:

$$\begin{aligned}p(x_k)&=\sum_{i=0}^{n}y_i\ell_i(x_k)\\&=y_0\underbrace{\ell_0(x_k)}_{0}+y_1\underbrace{\ell_1(x_k)}_{0}+\ldots+y_{k-1}\underbrace{\ell_{k-1}(x_k)}_{0}+y_k\underbrace{\ell_k(x_k)}_{1}+y_{k+1}\underbrace{\ell_{k+1}(x_k)}_{0}+\ldots+y_n\underbrace{\ell_n(x_k)}_{0}\\&=y_k.\end{aligned}$$

Ker i v vsoti teče od 0 do n, bo enkrat enak tudi k. Takrat bo $\ell_i(x_k) = 1$. Za vse ostale i $(i \neq k)$ pa bo $\ell_i(x_k) = 0$. S tem smo dokazali naslednji izrek.

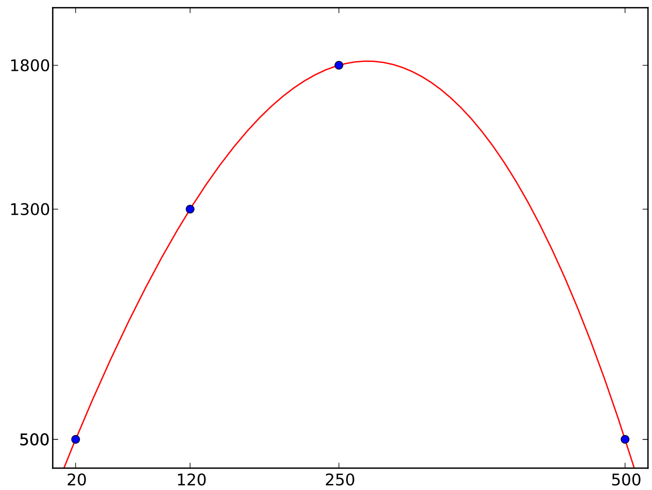
Izrek. Dane imamo točke $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, s pogojem $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Potem za interpolacijski polinom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$$

velja, da je $p(x_k) = y_k$ za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Rešimo naš modelni problem. S točkami, zapisani v uvodni tabeli, konstruirajmo interpolacijski polinom. V tem primeru je $n = 3$ in zato

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=0}^{3} y_i \ell_i(x) \\
&= y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) + y_3\ell_3(x) \\
&= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} + y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \\
&\quad + y_3 \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \\
&= 500 \frac{x - 120}{20 - 120} \cdot \frac{x - 250}{20 - 250} \cdot \frac{x - 500}{20 - 500} + 1300 \frac{x - 20}{120 - 20} \cdot \frac{x - 250}{120 - 250} \cdot \frac{x - 500}{120 - 500} \\
&\quad + 1800 \frac{x - 20}{250 - 20} \cdot \frac{x - 120}{250 - 120} \cdot \frac{x - 500}{250 - 500} + 500 \frac{x - 20}{500 - 20} \cdot \frac{x - 120}{500 - 120} \cdot \frac{x - 250}{500 - 250} \\
&= -\frac{17x^3}{1420250} - \frac{1902x^2}{142025} + \frac{286344x}{28405} + \frac{1726100}{5681}
\end{aligned}$$



Slika 4: Interpolacijski polinom, ki opisuje na kakšni nadmorski višini je bil marsovec ob določenem času.

Zaključek

Marsovec je problemu prišel do dna, saj mu je uspelo skozi dane točke narisati lep graf. Ugotovil je, da lahko za katerokoli čas izračuna nadmorsko višino, na kateri se je takrat nahajal. V članku smo pokazali, da lahko naključno izbranim točkam določimo polinom, ki poteka skozi njih.