Parakompleksna analiza

avtor: Rok Gregorič
mentor: Gašper Zadnik

Gimnazija Poljane, Ljubljana

23. avgust 2012

Parakompleksna števila

Parakompleksna števila $\mathbb{A}$:

$$z = x + jy, \; x, y \in \mathbb{R}$$

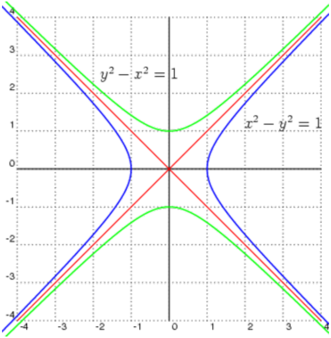
kjer je $j^2 = 1, \; j \neq \pm 1$.

- Seštevanje: $(x + jy) + (x' + jy') = (x + x') + j(y + y')$
- Množenje: $(x + jy)(x' + jy') = (xx' + yy') + j(xy' + x'y)$
- Konjugiranje: $\overline{(x + jy)} = x - jy$.

Idempotentna baza: $\alpha = \frac{1}{2}(1 + j)$, $\overline{\alpha} = \frac{1}{2}(1 - j)$.

- $\alpha^2 = \alpha, \; \overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha}, \; \alpha\overline{\alpha} = 0$.
- $z = \alpha a + \overline{\alpha} b, \; a = x + y, b = x - y$.
- $(\alpha a + \overline{\alpha} b)(\alpha a' + \overline{\alpha} b') = \alpha a a' + \overline{\alpha} b b'$.

- Hiperbolični modul $\|x+jy\| = \|\alpha a + \overline{\alpha} b\| = x^2 - y^2 = ab$.
- Neobrnljiva števila $\mathbb{X} = \{z \in \mathbb{A} : \|z\| = 0\}$.
- Polarni zapis $(\mathbb{A} - \mathbb{X}) \ni z = re^{j\theta} = r(\cosh\theta + j\sinh\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}, r \in \{\pm\sqrt{\pm\|z\|}, \pm j\sqrt{\pm\|z\|}\}$.



Slika: Hiperboli: modra: $\pm e^{j\theta}$, zelena: $\pm je^{j\theta}$; rdeči asimptoti: $\mathbb{X}$.

Paraholomorfne funkcije

Definicija

$\mathcal{C}^1$ funkcija $f : U \to \mathbb{A}$ je paraholomorfna na $U \subseteq \mathbb{A}$, če velja kateri od ekvivalentnih pogojev:

1. *Za vsak $z \in U$ obstaja*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \qquad \|h\| \neq 0.$$

2. *Vsaka točka $z \in U$ ima takšno okolico, da v njej velja $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, oziroma funkcija je neodvisna od konjugirane spremenljivke $\overline{z}$.*
3. *Obstajata par zvezno odvedljivih realnih funkcij A, B, da za vse $z \in U$ velja:*

$$f(z) = f(\alpha a + \overline{\alpha} b) = \alpha A(a) + \overline{\alpha} B(b).$$

Avtohtoni rezultati

Idempotenta dekompozicija:

$$f(\alpha a + \overline{\alpha} b) = \alpha A(a) + \overline{\alpha} B(b)$$

za vsako paraholomorfno funkcijo f in par realnih funkcij A, B.

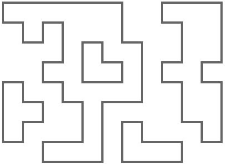
- Simultano "analitično" nadaljevanje na največji območju D očrtan "pravokotnik".
- Osnovni izrek algebre: polinom n-te stopnje s parakompleksnimi koeficientii do n^2 parakompleksnih ničel.
- Močnejša dekompozicija $f(\alpha a + \overline{\alpha} b) = \alpha f(a) + \overline{\alpha} f(b)$.

Avtohtoni rezultati

Hiperbolična konformnost

- Paraholomorfne bijekcije ohranjajo hiperbolične kote.
- Preslikava $z \to \exp(-\exp(z))$ slika $\mathbb{A}$ v "enotski pravokotnik" $(0,1) \oplus (0,1) \simeq (0,1)^2$.
- Neštevno konformno distinktnih domen.
- Trivialno nadaljevanje čez rob.
- Upodobitven izrek za enostavno povezane unije "pravokotnikov", paraevklidski premiki:

$$f(z) = \alpha(\lambda_1 z) + \overline{\alpha}(\lambda_2 z) + z_0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\},\ z_0 \in \mathbb{A}.$$



Parakompleksne mnogoterosti

Definicija

Parakompleksna mnogoterost je gladka mnogoterost s paraholomorfnimi prehodnimi kartami.

Definicija

Skoraj parakompleksna struktura na M je tenzor $J \in \mathcal{T}_1^1(M)$, za katerega velja $J^2 = \mathrm{id}$ in sta njegovi lastni distribuciji za ± 1 enake dimenzije.

Izrek (Newlander-Nirenberg)

Integrabilna skoraj parakompleksna strukutra na M enolično inducira zgradbo parakompleksne mnogoterosti.

Na parakompleksni mnogoteorsti dekompoziciji

$$TM = T^{+}M \oplus T^{-}M, \quad T_{\mathbb{A}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

inducirata razdad vnanjega odvoda na *Dolbeaultove operatorje*:

$$d = \partial_{+} + \partial_{-} = \partial + \overline{\partial}.$$

Izrek (Poincare-Dolbeault-Grothendieck)

Diferencialne forme na kartezičnih produktih kontraktibilnih mnogoterosti so D-ekzaktne, če in samo, če so D-sklenjene, kjer je D poljuben Dolbeaultov operator.

Definicija

Lorentzova metrika na ploskvi je tenzor $\mathcal{T}_2^1(M)$, ki na vsakem tangentnem prostoru podaja konformen razred nedefinitnih skalarnih poduktov. Realna 2-mnogoterost opremljena z Lorentzovo metriko se imenuje Lorentzova ploskev.

Izrek

Vsaka parakompleksna 1-mnogoterost sovpada z eno in samo eno Lorentzovo ploskvijo.

Izrek

Vsaka kompaktna Lorentzova ploskev je rodu 1.