Projektivna geometrija, modelirana na vektorskem prostoru nad končnim obsegom

Katja Klobas, UL FMF, Izola
Matej Petkovič, UL FMF, Velika Stara vas

Mentor: Gašper Zadnik, IMFM, Ljubljana

Cilj najinega projekta je bilo narediti model projektivne geometrije na razširjenem vektorskem prostoru nad končnim obsegom. Ker je obseg končen, premice niso take, kot si jih navadno predstavljamo, saj niso zvezne ravne črte in ne vsebujejo neskončnega števila točk. Kljub temu najin model ne nasprotuje prvim sedmim aksiomom projektivne geometrije.

1 Definicije

Premica je množica $\{\vec{a} + \lambda\vec{b} | \lambda \in \mathcal{O}\}$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna vektorja iz $\mathcal{V}$.

Snop je množica vseh tistih premic, kjer za poljubni dve velja, da imata linearno odvisna smerna vektorja.

Število različnih smeri je moč množice vseh snopov premic iz vektorskega prostora $\mathcal{V}$.

Neskončna točka $T_{\mathcal{S}}$ je skupno presečišče premic iz snopa $\mathcal{S}$.

2 Konstrukcija

Imamo množico $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ vseh ostankov pri deljenju s praštevilom p. Na tej množici definiramo operaciji $+$ in $\cdot$ kot običajna seštevanje in množenje po modulu p. Ni se težko prepričati, da je $\mathbb{Z}_p$ za ti operaciji polje. Posledično je za vsak $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mathcal{V} = (\mathbb{Z}_p)^k$ vektorski prostor. Razširimo prostor $\mathcal{V}$ tako, da vsakemu snopu premic $\mathcal{S}$ injektivno priredimo neskončno točko $T_{\mathcal{S}}$. Točke $T_{\mathcal{S}}$ tvorijo množico $\mathcal{M}_\infty$, ki je za $k = 2$ po dogovoru premica, za $k = 3$ ravnina, sicer pa hiperravnina dimenzije $k - 1$. Zaradi dodanih točk se definicija premice spremeni, saj vsaki premici dodamo še neskončno točko, ki je bila prirejena snopu, v katerega premica spada. Ta definicija je dobra, saj nobena premica hkrati ne pripada več snopom. Prav tako $\mathcal{V}_\infty := \mathcal{V} \cup \mathcal{M}_\infty$ ni več vektorski prostor, saj operacij $+$ in $\cdot$ ni mogoče smiselno razširiti še na nove točke.

3 Število premic v $(\mathbb{Z}_p)^k$

3.1 Točke na premici

Naj bosta $k \in \mathbb{N}$ in $p \in \mathbb{P}$ poljubna, a fiksna. Vzemimo premico $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna. Za λ zaporedoma vstavimo vse vrednosti iz $\mathcal{O}$. Tako dobimo p različnih kolinearnih točk. Ker smo za λ vstavili vse elemente obsega, so to poleg neskončne točke vse točke na premici. Ker sta bila $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna, vsaka premica v $\mathcal{V}_\infty$ vsebuje natanko $p + 1$ točk.

3.2 Različni smerni vektorji

Vseh možnih smernih vektorjev je za 1 manj, kot je točk v $\mathcal{V}$. Med izhodiščem in preostalimi točkami v $\mathcal{V}$ je namreč ravno toliko povezav. Naj bo s_s število smeri. Vemo, da je s_s enak številu paroma nekolinearnih vektorjev. Za vsak $\vec{b}$ lahko poleg $\vec{b}$ najdemo še $p-2$ vektorjev, ki so kolinearni z $\vec{b}$. Število vseh vektorjev je zato enako produktu s_s in $p-1$. Torej velja

$$s_s\,(p-1)=p^k-1.$$

Izrazimo s_s in dobimo

$$s_s=\frac{p^k-1}{p-1}.$$

To pa je tudi enako številu vseh točk v $\mathcal{M}_\infty$.

3.3 Vse premice

V vsaki smeri je p^{k-1} različnih premic, saj je v $\mathcal{V}$ točk, na vsaki premici pa je p točk iz $\mathcal{V}$. Število premic v $(\mathbb{Z}_p)^k$ je torej

$$s_p=s_s\cdot p^{k-1}=\frac{p^k-1}{p-1}\cdot p^{k-1}.$$

3.4 Dualni prostor

Za $k=2$ lahko tvorimo dualni prostor k $\mathcal{V}_\infty$. Takrat se števili premic in točk zamenjata. Število točk na premici je število premic skozi točko v $\mathcal{V}_\infty$, kar je enako s_s. Število smeri pa je enako s_p. V neskončnosti je torej s_p točk.

4 Preverjanje aksiomov projektivne ravnine

Aksiom 1. Obstajata vsaj dve točki. Vsaka premica vsebuje vsaj dve točki.

To je očitno res tudi za naš model. Vsaka premica ima vsaj 3 točke, saj je najmanjši primeren p enak 2.

Aksiom 2. Za vsaki dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.

Če si izberemo dve neskončni točki, premica skozi njiju gotovo poteka zaradi konstrukcije točk v neskončnosti. Skozi eno neskončno in eno končno točko je premica tudi enolično določena, ker smo tako konstruirali neskončne točke. Preveriti bi bilo potrebno samo še za dve "navadni" točki. Izberimo si dve taki točki $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Premico, ki poteka skozi ti točki, lahko zapišemo kot $p=\vec{a}+\lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Denimo, da bi skozi točki $\vec{a}$ in $\vec{b}$ potekala še neka druga premica $r=\vec{x}+\gamma\vec{y}$. Ker $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na r, obstajata taka skalarja α in β, da velja $\vec{a}=\vec{x}+\alpha\vec{y}$ ter hkrati $\vec{b}=\vec{x}+\beta\vec{y}$. Če odštejemo enačbi, dobimo $\vec{b}-\vec{a}=(\beta-\alpha)\,\vec{y}$, to pa pomeni, da sta smerna vektorja premic p in r kolinearna. Če torej obstaja neka skupna točka, potem premici p in r sovpadata. Skupna točka seveda obstaja, to je na primer kar $\vec{a}$. Torej skozi vsaki dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.

Aksiom 3. Vsaka premica skozi $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vsebuje vsaj še eno točko, različno od $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

To je tudi očitno res, saj je $p+1\geq 3$ za vsak $p\in\mathbb{P}$.

Aksiom 4. Za vsako premico obstaja vsaj ena točka, ki ne pripada tej premici.

To drži, saj je število točk na poljubni premici strogo manjše od števila vseh točk v $\mathcal{V}_\infty$ za vsaka k in p.

Aksiom 5. Naj bodo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tri nekolinearne točke, $\vec{d}$ točka na premici skozi $\vec{b}$ in $\vec{c}$, $\vec{d}\neq\vec{b}$ in $\vec{d}\neq\vec{c}$, $\vec{e}$ točka premice skozi $\vec{a}$ in $\vec{c}$, $\vec{e}\neq\vec{a}$ in $\vec{e}\neq\vec{c}$. Tedaj obstaja takšna točka $\vec{f}$ na premici skozi $\vec{a},\vec{b}$, da so točke $\vec{d},\vec{e},\vec{f}$ kolinearne.

Pokazati moramo samo, da to velja na ravnini, saj točke $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ določajo ravnino, v kateri ležijo tudi $\vec{d},\vec{e},\vec{f}$ pod pogojem, da $\vec{f}$ obstaja. Enačba $\vec{a}_1+\alpha\vec{b}_1=\vec{a}_2+\beta\vec{b}_2$ je rešljiva za poljubna nekolinearna $\vec{b}_1,\vec{b}_2$. V primeru, ko sta kolinearna, pa se sekata v neskončni točki.

Aksiom 6. Za vsako hiperravnino obstaja točka, ki ji ne pripada.

Ta aksiom je smiseln samo za $k \geq 2$, za $k = 2$ smo ga že preverili. Izberimo si bazo hiperravnine ter jo dopolnimo do baze celotnega vektorskega prostora $\mathcal{V}$. V tej bazi obstaja vsaj en vektor, ki ne leži na izbrani hiperravnini, torej aksiom drži tudi v našem primeru.

Aksiom 7. Presek poljubnih dveh hiperravnih je hiperpremica.

Izberimo si dve hiperravnini v $\mathcal{V}$. Njun presek so vse rešitve enačbe

$$\vec{c}_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{c}_2 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \vec{b}_i.$$

Rešujemo torej sistem z $2k - 2$ neznankami in $k - 1$ enačbami, kar da $k - 2$ parametrično rešitev, torej je presek res hiperpremica. Če sistem ni rešljiv, je množica vektorjev $\vec{b}_i$ baza množice vektorjev $\vec{a}_i$. Torej je presek teh dveh hiperravnin hiperpremica iz neskončnih točk. Podrobnosti prepuščamo bralcu.

Literatura

[1] M. Mitrović, *Projektivna geometrija*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2009.