Krogec pri krogcu … Pappusova veriga

Vesna Iršič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Tina Klobas, Gimnazija Koper, Izola
Anja Petkovič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

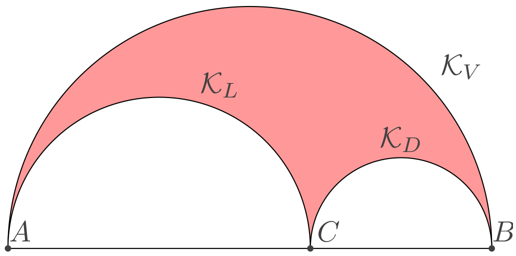
Mentor: Nejc Rosenstein, UL FMF, Gorica pri Slivnici

Ukvarjali smo se s problemom, kako vrisati zaporedje krožnic v arbelos, t.j. lik, ki ga omejujejo tri med seboj dotikajoče se polkrožnice. Pri tem smo uporabili geometrijo inverzij na razširjeni evklidski ravnini. Dodatno smo pogledali, kako lahko ista orodja izkoristimo za opis nekaterih lastnosti krožnic v zaporedju.

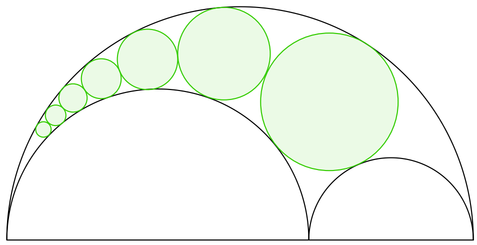
1 Arbelos in Pappusova veriga

Arbelos je lik, ki ga sestavljajo tri polkrožnice: velika polkrožnica $\mathcal{K}_V$ z radijem R_V, znotraj nje pa sta leva polkrožnica $\mathcal{K}_L$ z radijem R_L in desna $\mathcal{K}_D$ z radijem R_D.

Grški matematik Pappus iz Aleksandrije (290-350 n.š.) je prvi opisal zaporedje krogov v arbelosu, ki ga po njem imenujemo Pappusova veriga. Pappusova veriga je takšno zaporedje krožnic $\mathcal{K}_n$, da ima vsaka krožnica natanko eno skupno točko s krožnicama $\mathcal{K}_V$ in $\mathcal{K}_L$ ter s prejšnjo krožnico zaporedja, prva krožnica pa se dotika $\mathcal{K}_D$.



(a) Arbelos



(b) Pappusova veriga

Pappus je zaporedje opisal z evklidsko geometrijo, v 19. stoletju pa je nemški matematik Steiner do istih rezultatov prišel na veliko lažji način - s pomočjo inverzij preko krožnice.

2 Inverzija

Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem O in radijem r ter A od O različna točka v ravnini. Če A' leži na nosilki daljice $|OA|$ in na istem bregu glede na O kot A ter ustreza enačbi

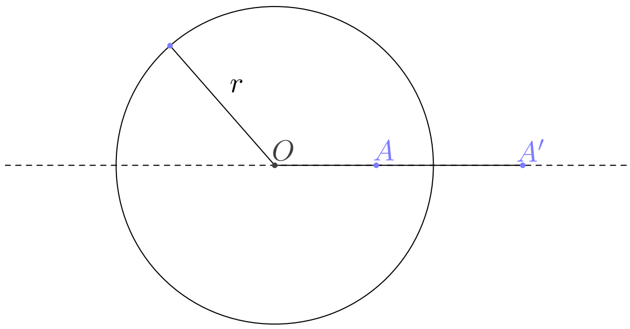
$$|OA| \cdot |OA'| = r^2,$$

potem točko A' imenujemo inverzna točka točke A glede na krožnico $\mathcal{K}$. Točka O je središče inverzije, krožnica $\mathcal{K}$ pa krožnica inverzije. Ker v evklidski ravnini središče inverzije nima invezne točke, vpeljemo točko ∞ kot inverzijo središča O. Množico $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ imenujemo razširjena evklidska ravnina.

Naštejmo najpomembnejše lastnosti inverzije:

1. Premica, ki poteka skozi središče inverzije O, se z inverzijo preslika sama vase.

2. Premica, ki ne vsebuje središča inverzije O, se z inverzijo preslika v krožnico, ki poteka skozi O (in obratno).
3. Slika krožnice, ki ne vsebuje središča O, je spet krožnica.
4. Točke, ki ležijo na krožnici inverzije, se z inverzijo preslikajo same vase.
5. Pri inverziji se velikosti kotov ohranjajo.
6. Inverzija je sebi nasprotna transformacija.



Slika 1: Inverzija točke A čez krožnico

3 Konstrukcija Pappusove verige

Pappusovo verigo konstruiramo s pomočjo inverzije. Za središče inverzije vzamemo točko O, ki je presečišče velike polkrožnice $\mathcal{K}_V$ in leve polkrožnice $\mathcal{K}_L$ arbelosa. Za polmer krožnice inverzije $\mathcal{K}$ vzamemo premer velike polkrožnice $2R_V$. Inverzija večjo polkrožnico preslika v poltrak, tangenten na $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_V$ in $\mathcal{K}_D$; levo polkrožnoco v poltrak, vzporeden s prejšnjim; desno pa v polkrožnico, katere premer je razdalja med poltrakoma $2R'_D$. Nato med poltraka vrišemo skladne krožnice s polmerom R'_D. Krožnice med poltrakoma se dotikajo med seboj in obeh poltrakov, ki sta sliki $\mathcal{K}_V$ in $\mathcal{K}_L$. Tudi krožnice Pappusove verige se znotraj arbelosa dotikajo sosednjih krožnic iz zaporedja ter $\mathcal{K}_V$ in $\mathcal{K}_L$. Ker se koti pri inverziji ohranjajo (pri dotikanju je kot 0°), inverzija krožnice med poltrakoma preslika v nove krožnice, ki predstavljajo Pappusovo verigo.

4 Izračun višine središča n-tega kroga

Označimo višino n-tega kroga v Pappusovi krožnici s h_n in njeno nožišče z A_n. Premica OS'_n seka n-to krožnico Pappusove verige in njeno inverzno sliko pod pravim kotom (po 5. lastnosti inverzije), zato poteka tudi skozi središče n-te krožnice. Iz tega sledi, da so točke O, S_n in S'_n kolinearne. Trikotnik $\triangle OAS_n$ je podoben $\triangle OS'_D S'_n$ iz česar sledi

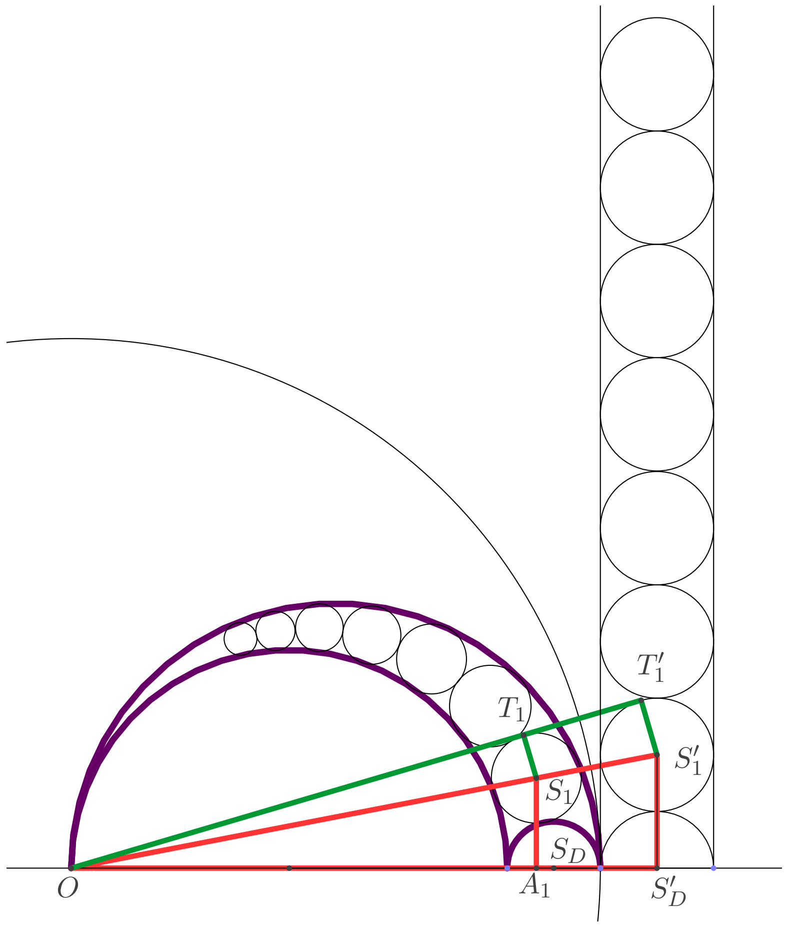
$$\frac{|OS_n|}{|OS'_n|} = \frac{|A_n S_n|}{|S'_D S'_n|} = \frac{h_n}{2nR'_D}.$$

Če narišemo tagento iz točke O na $\mathcal{K}_n$, bo zaradi lastnosti inverzije to tudi tangenta na $\mathcal{K}'_n$. Točki, kjer se tangenta dotika obeh krožnic, označimo s T_n in T'_n. Zato

$$\triangle OT_n S_n \text{ je podoben } \triangle OT'_n S'_n \tag{1}$$

in posledično

$$\frac{|OS_n|}{|OS'_n|} = \frac{|T_n S_n|}{|T'_n S'_n|} = \frac{r_n}{R'_D}.$$



Slika 2: Primer konstrukcije končne Pappusove verige z inverzijo

Če ti enačbi delimo, dobimo

$$h_n = 2nr_n.$$

5 Izpeljava radija n-te krožnice

Z R_V, R_D, R_L označimo radije ustreznih polkrožnic arbelosa. Velja $R_D + R_L = R_V$. Označimo razmerje $\frac{R_L}{R_D} = k$ in iz tega izrazimo $R_L = \frac{R_V}{k+1}$. Nato R_D' izrazimo z radiji polkrožnic, ki sestvljajo arbelos. Dotikališče $\mathcal{K}_L$ in $\mathcal{K}_D$ označimo z U, njegovo inverzno sliko pa z U'. Po definiciji inverzije velja $|OU| \cdot |OU'| = (2R_V)^2$ oziroma $2R_L \cdot (2R_V + 2R_D') = 4R_V^2$ iz česar sledi

$$R_D' = R_V(k+1)\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) = R_V k. \tag{2}$$

Iz definicije inverzije sledi tudi $|OT_n| \cdot |OT_n'| = (2R_V)^2$ oziroma

$$|OT_n| = \frac{4R_V^2}{|OT_n'|}. \tag{3}$$

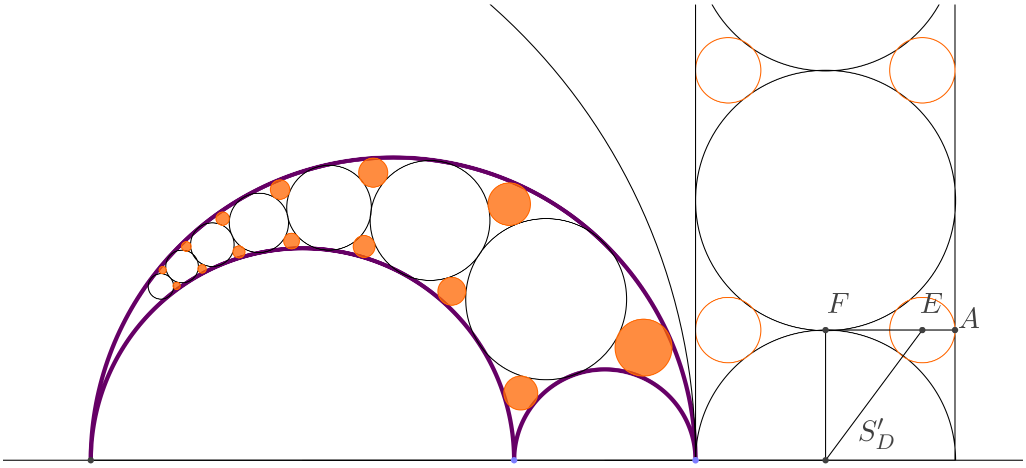
Zaradi podobnosti (1) velja $\frac{|OT_n|}{|OT_n'|} = \frac{r_n}{R_D'}$. V to enačbo vstavimo enačbi (2) in (3) ter dobimo

$$|OT_n'|^2 = \frac{4R_V^3 k}{r_n}. \tag{4}$$

Ker je $\triangle OS_D'S_n'$ pravokoten, po Piragorovem izreku velja $|OS_n'|^2 = |OS_D'|^2 + |S_D'S_n'|^2$ oziroma $|OS_n'|^2 = (2R_V + kR_V)^2 + (2nR_V k)^2$. Podobno iz $\triangle OT_n'S_n'$ dobimo $|OT_n'|^2 + R_V^2 k^2 = |OS_n'|^2$. Če to enačimo in vstavimo enačbo (4) dobimo

$$r_n = \frac{R_V k}{1 + k + n^2 k^2}.$$

6 Uporaba inverzije za vrisovanje dodatnih krožnic



Slika 3: Dodatne krožnice vrisane v prostor med Pappusovo verigo in polkrožnicami arbelosa ter njihove inverzne slike.

Pri raziskovanju Pappusove verige nas je zanimalo, kako vrisati še dodatne krožnice v arbelos s Pappusovo verigo. To znova najlažje storimo tako, da krožnice včrtamo na inverzno sliko in nato preslikamo znotraj arbelosa. Pojavi se vprašanje kako včrtati krožnico med dve enako veliki dotikajoči se krožnici in njuno skupno tangento.

Ker radija ne poznamo, najprej predpostavimo, da je krožnica že včrtana in radij x izračunamo po Pitagorovem izreku v trikotniku $\triangle S'_D FE$. Torej

$$R'_D{}^2 + (R'_D - x)^2 = (R'_D + x)^2$$

oziroma

$$x = \frac{R'_D}{4}.$$

Krožnico torej včrtamo povsem preprosto (na sliki 6 vidimo, da iz F naredimo pravokotnico na poltrak in daljico FA dvakrat razpolovimo ter narišemo krožnico z radijem $|EA|$). Če bi na ta način nadaljevali v neskončnost, bi dobili fraktal.

Literatura

[1] D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] Inversion In Arbelos, dostopno na `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/InversionInArbelos.shtml` [citirano 15.8.2011].

[3] Pappusova veriga, dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_chain` [citirano 15.8.2011].

[4] V. J. Katz, *A History of Mathematics: an introduction*, Addison-Wesley, 1998.