Popotniška kombinatorika

Jan Geršak, I. gimnazija v Celju, Celje
Mihael Simonič, Gimnazija Bežigrad, Višnja Gora

Mentor: Maja Alif, UL FMF, Košnica pri Celju

V članku bomo predstavili dva kombinatorična problema. Prvi so Strilingova števila druge vrste, ki povedo, na koliko različnih načinov lahko razdelimo elemente množice na določeno število nepraznih delov. Drugi je problem nahrbnika, kjer skušamo vanj spraviti čim pomembnejše predmete, pri čemer moramo upoštevati omejitev teže.

1 Stirlingova števila druge vrste

Večkrat se srečamo z vprašanjem, koliko različnih kombinacij parov ali ekip lahko sestavimo iz skupine ljudi. To lahko izračunamo s pomočjo binomskega simbola, ki se bo kasneje pojavil tudi v eksplicitni formuli za izračun Stirlingovih števil druge vrste.

Definicija 1. Naj bo N poljubna množica z n elementi in k poljubno nenegativno celo število. Številu k - elementnih podmnožic množice N pravimo ***binomski koeficient*** in ga označimo z binomskim simbolom $\binom{n}{k}$.

Zanj velja formula (dokaz bomo izpustili):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Opomba. Velja $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Kombinacije so povezane s Stirlingovimi števili druge vrste, kjer nas ponovno zanima, koliko je možnih razdelitev skupine ljudi v nekaj manjših ekip. Za razliko od prej tu niso določene velikosti ekip, temveč njihovo število. Stirlingovo število druge vrste nam torej pove, na koliko načinov lahko razdelimo n ljudi v k (ne nujno enakih) ekip.

Definicija 2. Številu vseh razbitij n-elementne množice A na k nepraznih podmnožic rečemo ***Stirlingovo število druge vrste*** in ga označimo s $S(n, k)$.

Med zaporednimi Strilingovimi števili druge vrste obstaja korelacija, ki jo lahko opišemo z rekurzivno formulo.

Trditev 1. Naj bo A množica z $n + 1$ elementi. Tedaj za število razbitij množice A na k nepraznih podmnožic velja formula: $S(n + 1, k) = k \cdot S(n, k) + S(n, k - 1)$.

Dokaz. Denimo, da imamo n elementov, ki jih delimo v k nepraznih množic. Predpostavljamo, da lahko to storimo na $S(n, k)$ načinov. Dodajmo en element in poiščimo vrednost $S(n + 1, k)$. Imamo natanko dve možnosti:

- $(n+1)$-vi element damo v svojo podmnožico, ostale pa razdelimo v preostalih $k-1$ podmnožic. S tem pravzaprav razporejamo n elementov na $k-1$ podmnožic. Vseh takih delitev je $S(n, k-1)$.
- $(n + 1)$-vi element dodamo v eno od k že obstoječih množic. Obstaja torej $S(n, k)$ delitev, za določitev pozicije dodatnega elementa pa imamo k možnosti. V tem primeru je torej še $k \cdot S(n, k)$ delitev.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Tabela 1: Stirlingova števila druge vrste za $n \leq 10$ in $k \leq 10$

S tem smo pregledali vse možnosti, torej lahko izračunamo število delitev $n+1$ elementa na k podmnožic z rekurzivno enačbo. $\square$

V tabeli 1 je podanih prvih nekaj Stirlingovih števil druge vrste.

Opomba. Velja: $S(n,k) = 0$ za $n < k$ in $S(n,0) = 0$ za vsak $n \leq 1$, saj ne dovoljujemo praznih množic. Očitno velja $S(0,0) = 1$.

Omenimo še, da se da Stirlingova števila druge vrste izračunati tudi po eksplicitni formuli (dokaz bomo izpustili):

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i} i^n (-1)^{k-i}.$$

2 Problem nahrbtnika

2.1 Opis problema

Imamo nekaj predmetov, vsak ima svojo vrednost in težo. Z njimi poskusimo napolniti nahrbtnik tako, da bo skupna teža predmetov v nahrbtniku manjša ali enaka dani omejitvi, njihova skupna vrednost pa čim večja.

V realnem življenju gre lahko tudi bodisi za polnjenje nahrbtnika, polnjenje nakupovalne vreče ali pa zlaganje predmetov v avto. Vedno želimo kar najbolje zapolniti razpoložljiv prostor in vzeti s seboj pomembnejše predmete.

Izkaže se, da je problem nahrbtnika tipičen problem kombinatorične optimizacije in se ga zato lahko lotimo tudi z računalniškim algoritmom.

2.2 Formalni opis in definicije

Da bomo lahko problem obravnavali z veliko mero matematične strogosti, bomo kar takoj definirali osnovne pojme, s katerimi bomo opisovali naš problem:

Definicija 3. Naj bo:

- n število razpoložljivih predmetov,
- W omejitev skupne teže nahrbtnika,
- x_i atribut i-tega predmeta, $x_i = \begin{cases} 1, & \text{če je predmet v nahrbtniku} \\ 0, & \text{če predmeta ni v nahrbtniku} \end{cases}$
- w_i teža,

- v_i pa vrednost i-tega predmeta.

Predmet je določen z urejenim parom (x_i, v_i).

Definicija 4. ***Dopustna rešitev*** je kakršna koli množica rešitev $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ki izpolnjuje pogoj omejitve teže.

Primer dopustne rešitve lahko dosežemo s t.i. ***slabim polnjenjem nahrbtnika*** oziroma takrat, ko kar po vrsti polnimo nahrbtnik. Lahko se zgodi, da je v njem samo en predmet. Četudi je ta sam po sebi pomemben, pa zasede več prostora, kot bi ga kaki drugi, posamezno sicer manj pomembni, a skupno več vredni predmeti.

Optimalna rešitev je tista dopustna rešitev, pri kateri je skupna vrednost predmetov v nahrbtniku največja.

Formalneje to povemo takole:

Definicija 5. Za ***optimalno rešitev*** poiščemo maksimum vsote $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$, ki hkrati ustreza pogoju $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq W$.

Zgled 1. Spodaj je seznam predmetov, ki jih lahko vzamemo v nahrbtnik, ki pa ne sme tehtati več kot 5 kg. Na izbiro imamo predmete s tabele 2:

Predmet	Vrednost	Teža (g)
zemljevid	80	200
kompas	70	50
voda	99	500
sendvič	60	400
banana	65	200
jabolko	65	100
sončna krema	40	150
fotoaparat	70	700
kratka majica	75	200
superge	20	500
dežnik	15	200
palerina	25	100
sončna očala	15	110
brisača	80	300
knjiga	90	200
prenosnik	90	5010

Tabela 2: Lastnosti razpoložljivih predmetov

Izkaže se, da so najbolj smiselni predmeti zemljevid, kompas, voda, sendvič, banana, jabolko, sončna krema, fotoaparat, kratka majica, superge, dežnik, palerina, sončna očala, brisača in knjiga.

Skupna vrednost optimalne rešitve je 869 enot in teže 3910 g, kar zadosti omejitvam.

2.3 Računalniški algoritem

Spodaj je predstavljena psevdokoda algoritma, ki poišče največjo možno vrednost

```
W ... omejitev teze nahrbtnika
n ... stevilo vseh predmetov
w ... teza predmeta
v ... vrednost predmeta
X ... mnozica predmetov v nahrbtniku
```

```
ustvari tabelo z W stolpci in 2 vrsticama

izberi prvi predmet in ga postavi v tabelo na w–to mesto
  v prvo vrstico zapisi njegovo vrednost v
  v drugo vrstico zapisi njegovo ime
za vsak naslednji predmet
  na w–to mesto
    v prvi vrstici pristej njegovo vrednost v
    v drugo vrsico dodaj njegovo ime
  dokler ne prides do konca tabele
    poisci prvo naslednje neprazno mesto v tabeli
    pojdi w stolpcev naprej
      v prvi vrstici pristej njegovo vrednost v
      v drugo vrstico dodaj njegovo ime

v tabeli poisci stolpec z najvecjo vrednostjo v
  na zaslon izpisi vrednost "optimalna vrednost predmetov: v"
  v mnozico X dodaj predmete s seznama v drugi vrstici

vrni mnozico X
```

Algoritem je implementiran v obliki kviza na `http://sis.gimb.si/random/mars/`.

Literatura

[1] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike I*, dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf` [Citirano 26. 8. 2011].

[2] Sodelavci Wikipedije, *Knapsack problem*, dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem` [Citirano 26. 8. 2011].