Bernoullijevi polinomi

Rok Gregorič, Gimnazija Poljane, Ljubljana
Nežka Rugelj, ŠC RM Kamnik, Kamnik
Ana Smerdu, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Mentor: Aleksander Simonič, UL FMF, Grosuplje

V članku predstavimo zanimivo družino polinomov, imenovanih po Jakobu Bernoulliju. Spoprimemo se z današnjo definicijo, ki je podana s sredstvi matematične analize, vendar ne prezremo tistega, kar je opazil Bernoulli.

1 O Bernoulliju

Jakob Bernoulli (1665-1705) je bil švicarski matematik. Starši so želeli, da bi Jakob postal teolog, a se je proti njuni volji odločil za študij matematike in fizike. Po končanem študiju je potoval po Evropi, kjer je srečal pomembnejše znanstvenike, kot sta Hooke in Boyle. Jakob je eden najbolj poznanih predstavnikov družine Bernoulli, ki so zaslužni tudi za matematično kariero Leonharda Eulerja (1707-1783).

Znan je po postavitvi baselskega problema, kjer se je spraševal po zaključeni vsoti vrste $\sum_k 1/k^2$. Leta 1735 je ta problem rešil Leonhard Euler.

Med mnogimi novostmi, ki jih je v matematiko prinesel Jakob Bernoulli, so morda najzanimivejša števila, ki so danes imenovana po njem. Nekaj o njih in o polinomih, ki so globoko povezani z njimi, bomo spoznali v tem članku.

2 O potenčnih vrstah

Preden pa se lahko spoprimemo z Bernoullijevimi polinomi, se moramo najprej seznaniti z nekaj izreki o potenčnih vrstah.

Za začetek si osvežimo pojem konvergence vrste. Pravimo, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***konvergira***, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot.

Definicija 1. Vrsta $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je ***absolutno konvergentna***, če konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Zgoraj smo obravnavali t.i. ***številske vrste***. Tako vrsto pa lahko posplošimo na primer, ko seštevamo po zaporedju nekih funkcij. Takim vrstam pravimo ***funkcijske vrste***. Poseben primer funkcijske vrste je podan v naslednji definiciji.

Definicija 2. ***Potenčna vrsta*** je vrsta s koefincienti $a_k \in \mathbb{R}$ obilke

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Za $x = 0$ ima potenčna vrsta obliko $A(0) = a_0$, torej pri $x = 0$ vsaka potenčna vrsta konvergira. Oglejmo si, kako je s konvergenčnim radijem potenčnih vrst še pri drugih x.

Izrek 1. *Za potenčno vrsto $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ obstaja $0 \le r \le \infty$, da je za $|x| < r$ vrsta $A(x)$ absolutno konvergentna, za $|x| > r$ pa divergentna. Število r imenujemo* ***konvergenčni radij***.

Dokaz. Vemo, da pri $x = 0$ vrsta $A(x)$ konvergira. Če je to edina točka konvergence, imamo $r = 0$ in je dokaz končan. Zato naj obstaja taka točka $x_0 \neq 0$, da velja $A(x_0) < \infty$. Naj bo $0 < r < |x_0|$. Ker je vrsta v x_0 konvergenta, velja $\lim_{k\to\infty} |a_k||x_0^k| = 0$, torej eksistira nek $M < \infty$, da je $|a_k||x_0^k| < M$ za vsak n. Naj bo $|x| < r$. Zdaj lahko ocenimo

$$|a_k||x^k| \leq |a_k|r^k = |a_k|\Big(\frac{r}{|x_0|}\Big)^k |x_0|^k \leq M\Big(\frac{r}{|x_0|}\Big)^k.$$

Sledi, da je vrsta členoma manjša od geometrijske vrste, za katero pa vemo, da je konvergentna. Če postavimo

$$r = \sup\{|x_0|; A(x_0) < \infty\},$$

je izrek s tem dokazan. □

Naslednji izrek bomo navedli brez dokaza, za katerega naj se bralec obrne na [2].

Lema 1. *Potenčne vrste so kot funkcije spremenljivke x zvezne.*

Za nas bo pomemben naslednji izrek, ki mu pravimo tudi *princip identičnosti potenčnih vrst*.

Izrek 2. *Naj bosta r in R konvergenčna radija potenčnih vrst $A(x) = \sum_k a_k x^k$ in $B(x) = \sum_k b_k x^k$. Če za $|x| < \min(r, R)$ velja $A(x) = B(x)$, potem sledi $a_k = b_k$.*

Dokaz. Naj bo $x = 0$. Tedaj sledi $a_0 = A(0) = B(0) = b_0$. Zdaj naj bo $x \neq 0$. Imamo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1} b_k x^k$. Ker x ni enak nič, lahko na obeh straneh delimo z x, kar nam da (skupaj z lemo 1)

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k-1},$$

oziroma $a_1 = b_1$. Z indukcijo zdaj lahko nadaljujemo, sledi $a_k = b_k$. □

Funkcija, ki jo bomo spoznali v naslednji definiciji, ima konvergenčni radij neskončno velik.

Definicija 3. Eksponentna funkcija je predpisana kot

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

3 O Bernoullijevih polinomih

Definicija 4. ***Bernoullijevi polinomi*** so funkcije $B_k(y)$, generirane z

$$\frac{xe^{xy}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)}{k!} x^k. \tag{1}$$

Da lahko funkcijo (1) razvijemo v potenčno vrsto po spremenljivki x, je utemeljeno v 4. razdelku. V primeru $y = 0$ pišemo $B_k(0) = B_k$, pri čemer se B_k imenuje ***k-to Bernoullijevo število***.

Ob svoja števila se je Jakob Bernoulli prvič spotaknil, ko je združeval delne vsote potenčnih vrst celih števil. V svojem delu *Ars Conjectandi*, ki je bilo objavljeno po njegovi smrti leta 1713, je v drugem poglavju zapisal vsoto $\sum_{j=1}^{n} j^k$ za $1 \leq k \leq 10$ s pomočjo števil B_2, B_4, B_6 in B_8. Čeprav je računal eksplicitno, pa za svoje manipulacije ni podal dokaza.

Bernoullijeva števila se pojavljajo v najrazličnejših vejah matematike kot so analiza, kombinatorika, teorija števil in topologija. Pojavljajo se tudi v teoriji Riemannove funkcije zeta in v potenčnih razvojih funkcij tangens in kotangens.

Lema 2. *Funkcija $f(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$ je soda.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(x)-f(-x) &= x\Big(\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^{-x}-1}+1\Big) \\ &= x\Big(\frac{e^{-x}-1+e^x-1+(e^x-1)(e^{-x}-1)}{(e^x-1)(e^{-x}-1)}\Big) \\ &= x\Big(\frac{e^{-x}-1+e^x-1+1-e^x-e^{-x}+1}{(e^x-1)(e^{-x}-1)}\Big)=0. \end{aligned}$$

Posledično je $f(x)=f(-x)$. ☐

S pomočjo zgornje leme dokažemo zanimivo lastnost Bernoullijevih števil.

Izrek 3. *Za vse $k>1$ velja $B_{2k-1}=0$.*

Dokaz. Iz leme 2 in povezavo nje z Bernoullijevimi števili sledi

$$\sum_k \frac{B_k}{k!}x^k+\frac{x}{2}=\sum_k \frac{B_k}{k!}(-x^k)-\frac{x}{2}.$$

Po principu identičnosti sledi, da je $B_1=-\frac{1}{2}$, za $k\neq 1$ pa velja enačba $(-1)^kB_k=B_k$. Za soda števila k to avtomatično velja, pri lihih številih k pa mora biti $B_k=-B_k=0$. ☐

Lema 3. *Za potenčni vrsti $A(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ in $B(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^k$ s konvergenčnima radijema r in R je vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k,\quad \textit{kjer je}\;\; c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{i-k},$$

konvergentna na $|x|<\min(r,R)$ in enaka produktu $A(x)B(x)$.

Dokaz. Za dokaz naj se bralec obrne na [2], izrek 85. ☐

Naslednji izrek zagotavlja, da so funkcije $B_k(y)$ res polinomi.

Izrek 4.

$$B_k(y)=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}y^{k-n}B_n$$

Dokaz. Po definiciji Bernoullijevi polinomov in eksponentne funkcije je

$$\sum_k \frac{B_k(y)}{k!}x^k=e^{xy}\cdot\frac{x}{e^x-1}=\Big(\sum_k\frac{x^ky^k}{k!}\Big)\Big(\sum_k\frac{B_k}{k!}x^k\Big).$$

Obe vrsti sta absolutno konvergentni, torej nam lema 2 pove, kako ju množiti. k-ti koeficient v vrstnem razvoju produkta je

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{B_n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!}.$$

To je po izreku 2 enako $B_k(y)/k!$, s čimer je izrek dokazan. ☐

Posledica 1. $B_0(y)=1$ za vsak $y\in\mathbb{R}$.

Izrek 5. *Za vsak $k\geq 1$ in za vsak $y\in\mathbb{R}$ je*

$$B_k(1-y)=(-1)^kB_k(y). \tag{2}$$

Dokaz. Oglejmo si vrstna razvoja:

$$\frac{xe^{x(1-y)}}{e^x-1} = \sum_k \frac{B_k(1-y)}{k!}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k(1-y)}{k!}x^k,$$
$$\frac{-xe^{-xy}}{e^{-x}-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k(y)}{k!}x^k.$$

Trditev izreka je po principu identičnosti enaka domnevi

$$\frac{xe^{x(1-y)}}{e^x-1} = \frac{-xe^{-xy}}{e^{-x}-1}.$$

To pa je

$$\frac{xe^{x(1-y)}}{e^x-1} - \frac{-xe^{-xy}}{e^{-x}-1} = \frac{xe^{x(1-y)}}{e^x-1} - \frac{xe^x e^{-xy}}{e^x-1} = 0.$$

□

Zdaj znamo Bernoullijeva števila izraziti na rekurzivni način.

Posledica 2. Pri vsakem $n \geq 2$ je

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \tag{3}$$

Dokaz. Po izreku je to vrsta za $B_n(1)$, kar pa iz (2) sledi $B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = B_n$, saj so liha števila enaka 0. □

Ker smo že videli $B_1 = -\frac{1}{2}$, lahko preko zgornje posledice ugotovimo $B_n \in \mathbb{Q}$.

Obrazec (3) je primeren za izračun nekaj Bernoullijevih števil. V spodnji tabeli je podanih prvih devet neničelnih števil.

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{60}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$

Naslednji izrek je močan obrazec o razliki zaporednih Bernoullijevih polinomov, znan pod imenom diferenčna formula.

Izrek 6. *Za vsak $k \geq 1$ in vsak $y \in \mathbb{R}$ zadošča enačba*

$$B_k(y+1) - B_k(y) = ky^{k-1}. \tag{4}$$

Dokaz. Iz definicije Bernoullijevih polinomov sledi, da je dovolj potrditi trivialno enakost

$$\frac{xe^{x(y+1)}}{e^x-1} - \frac{xe^{xy}}{e^x-1} = \frac{xe^{xy}}{e^x-1}(e^x-1) = xe^{xy}.$$

□

Posledica 3. Velja

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}.$$

Dokaz. Ko vsak koeficient vsote $\sum_{j=1}^{n} j^k$ preko diferenčne formule (4) zapišemo z Bernoullijevimi polinomi, dobimo prvo enakost. Še drugo enakost pa dobimo direktno iz prejšnje po izreku 4. □

Posledica 3 ima bogato zgodovino. Že pred razvojem infinitezimalnega računa so se matematiki, kot sta bila Fermat in Pascal, ukvarjali z izračunavanjem ploščin in prostornin različnih teles. Pri tem so potrebovali prav vsoto $\sum_{j=1}^{n} j^k$, katere splošno rešitev so poznali le za določene k-je. Z Bernoullijevimi polinomi pa se rešitev zapiše precej preprosto. Enakost je poznana tudi pod imenom *Faulharberjeva formula*.

4 O utemeljitvi vrstnega razvoja

Bernoullijeve polinome smo predstavili kot koeficiente vrstnega razvoja, za katerega smo a priori privzeli, da obstaja. Postavlja se vprašanje ali lahko utemeljimo njeno eksistenco. Naj $x \neq 0$ in se lotimo

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots} = \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} - \cdots)} = (*).$$

Če označimo $A(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ lahko za $|A(x)| < 1$ zapišemo

$$(*) = 1 + A(x) + A^2(x) + \cdots$$

To je res potenčna vrsta, ker je $A^n(x)$ mogoče po lemi 3 zapisati kot eno potenčno vrsto. Pogoj $|A(x)| < 1$ porodi grobo oceno konvergenčnega radija $r > 1$. Po principu identičnosti pa je vseeno tudi, če radij ni optimalen, saj bodo koeficienti enaki, kakor pri optimalnem.

Da je $r = 2\pi$ lahko spoznamo z metodami kompleksne analize. V kompleksnem namreč opazimo, da se singularnosti začno pojavljati na razdalji 2π od izhodišča, do tam pa lahko vrsto brez omejitev analitično nadaljujemo.

Prej smo izključili primer $x = 0$, ker navidez vodi do deljenja z nič. Vendar iz vrstnega razvoja vidimo, da se tej neprijetnosti lahko ognemo s preprostim limitnim procesom, ki nam da na limitno vrednost 1, s čimer lahko funkcijo zvezno razširimo tudi v točki 0.

Literatura

[1] J. Bračič, *Uvod v analitično teorijo števil*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2003

[2] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008

[3] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover publications, 1990

[4] V. J. Katz, *A History of Mathematics: an introduction*, Addison-Wesley, 1998