Desno distributivni skoraj kolobar brez aditivne enote

Eva Breznik, UL FMF, Slovenske Konjice
Matej Roškarič, UM FNM, Maribor
Jana Vidrih, UL FMF, Ptuj

Mentor: Gašper Zadnik, IMFM, Ljubljana

Raziskali smo algebrsko strukturo množice vseh strogo naraščajočih zaporedij naravnih števil s seštevanjem po členih in nenavadnim množenjem.

1 Uvod

Kot ena izmed študentskih skupin na MaRSu smo se ukvarjali z vprašanji, povezanimi s snovjo prvega letnika študija matematike. Zato bomo najprej na kratko razložili nekaj pojmov, ki večini srednješolcev morda niso povsem domači, so pa pomembni pri našem raziskovanju.

Pri projektu smo poskusili določiti algebrsko strukturo množice $N = \{\text{neskončne podmnožice } \mathbb{N}\} = \{\text{naraščajoča zaporedja naravnih števil}\}$. Zaporedje bomo označevali z $(a_n)_n$, kjer je a_n splošni člen zaporedja. Najbolj znane algebrske strukture so grupoid, za katerega je potrebna le zaprtost operacije, polgrupa, kar je asociativni grupoid, monoid, to je polgrupa z enoto ter grupa, če ima vsak element še inverz. Komutativni grupi pa pravimo Abelova grupa.

Pri pisanju projekta smo pogosto uporabili tudi vrste, o katerih si lahko več preberete v enem od naslednjih poglavij.

2 Opis problema

Raziskovali smo lastnosti dveh operacij, definiranih na množici

$$N = \{\text{neskončne podmnožice } \mathbb{N}\} = \{\text{naraščajoča zaporedja naravnih števil}\},$$

s predpisoma:

- za seštevanje:
$$+:\ N \times N \to N$$
$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$$

- za množenje:
$$*:\ N \times N \to N$$
$$(a_n)_n * (b_n)_n = (a_{b_n})_n$$

in poskušali ugotoviti, katero algebrsko strukturo dobimo z njihovo vpeljavo na množico N. V drugem delu projekta pa smo množico N razdelili na disjunktno unijo dveh množic K in D oblike

$$K = \left\{ \{a_n|\ n \in \mathbb{N}\} \in N \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} < \infty \right\},$$
$$D = \left\{ \{a_n|\ n \in \mathbb{N}\} \in N \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} = \infty \right\}$$

in ugotavljali, kako je $K \amalg D$ (disjunktna unija) ”usklajena” z danima operacijama.

3 Vrste

Vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ z nenegativnimi členi konvergira, če je zaporedje njenih delnih vsot navzgor omejeno. Če vrsta ne konvergira, pravimo, da je divergentna.

Spoznajmo sedaj najbolj znani primer divergentne vrste - harmonično vrsto.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Vzemimo harmonično vrsto brez prvih dveh členov. Vsota prvih dveh členov nove vrste preseže $\frac{1}{2}$. Seštejmo naslednje štiri člene in njihova vsota je prav tako večja od $\frac{1}{2}$. Sedaj seštejemo naslednjih osem, nato naslednjih šestnajst in tako nadaljujemo. Vidimo da vsota vedno preseže $\frac{1}{2}$ (neskončno krat). Sledi, da delne vsote vrste ne morejo biti navzgor omejene, torej vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergira. Ta izsledek nam bo kasneje pomagal poiskati zanimiv primer divergentne vrste.

4 Lastnosti operacij

- Seštevanje
  - *asociativnost*

$$\begin{aligned}((a_n)_n + (b_n)_n) + (c_n)_n &= (a_n + b_n)_n + (c_n)_n \\ &= (a_n + b_n + c_n)_n \\ &= (a_n)_n + (b_n + c_n)_n \\ &= (a_n)_n + ((b_n)_n + (c_n)_n)\end{aligned}$$

  - *komutativnost*

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n = (b_n + a_n)_n = (b_n)_n + (a_n)_n$$

  Seštevanje nima enote in posledično ne inverza. Iz predpisa operacije vidimo, da bi bila edina možna enota zaporedje sestavljeno iz samih ničel, ki pa ni element naše množice N, saj 0 ni element naravnih števil.

- Množenje
  - *asociativnost*

$$((a_n)_n * (b_n)_n) * (c_n)_n = (a_{b_n})_n * (c_n)_n = (a_{b_{c_n}})_n =$$
$$= (a_n)_n * (b_{c_n})_n = (a_n)_n * ((b_n)_n * (c_n)_n)$$

  - *komutativnost*

$$(a_n)_n * (b_n)_n = (a_{b_n})_n$$
$$(b_n)_n * (a_n)_n = (b_{a_n})_n$$

  Zanima nas ali je $(a_{b_n})_n$ enako $(b_{a_n})_n$. Hitro lahko najdemo protiprimer. Za $(a_n)_n$ vzemimo zaporedje vseh lihih števil, za $(b_n)_n$ pa zaporedje vseh sodih števil. Dobimo $(a_{b_n})_n = \{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$ in $(b_{a_n})_n = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$, torej različni množici.
  - *enota*
  Za množenje smo poiskali enoto $(e_n)_n$, ki je zaporedje vseh naravnih števil.

$$(e_n)_n * (a_n)_n = (a_n)_n$$

  Enakost velja, saj nam predpis za množenje pove, naj vzamemo a_n-ti člen zaporedja $(e_n)_n$, ki je enak vrednosti člena a_n, torej spet dobimo zaporedje $(a_n)_n$. Naslednja enakost

$$(a_n)_n * (e_n)_n = (a_n)_n$$

  pa velja, saj $(a_n)_n * (e_n)_n$ pomeni, naj vzamemo vse člene zaporedja $(a_n)_n$.

  - *inverz*
    Zanimalo nas je ali za vsako zaporedje $(a_n)_n \in N$ obstaja takšno zaporedje $(b_n)_n \in N$, da velja:
$$(a_n)_n * (b_n)_n = (b_n)_n * (a_n)_n = (e_n)_n.$$
    Vzemimo sedaj zaporedje $(a_n)_n \neq (e_n)_n$. Očitno ne obstaja takšno zaporedje $(b_n)_n$, da bi veljala zgornja enakost, saj če vzamemo b_n-te člene zaporedja $(a_n)_n$, ne moremo dobiti zaporedja vseh naravnih števil. $(a_n)_n * (b_n)_n$ je vedno podzaporedje $(a_n)_n$.

- Distributivnost
  - *leva distributivnost*
$$(a_n)_n * ((b_n)_n + (c_n)_n) = (a_n)_n * (b_n + c_n)_n = (a_{(b_n+c_n)})_n$$
$$(a_n)_n * (b_n)_n + (a_n)_n * (c_n)_n = (a_{b_n})_n + (a_{c_n})_n = (a_{b_n} + a_{c_n})_n,$$
    kar očitno ni enako, če vzamemo za zaporedje $(a_n)_n$ zaporedje lihih števil. Členi v zgornji vrstici so lihi, spodaj pa sodi. Operaciji torej nista povezani z levo distributivnostjo.
  - *desna distributivnost*
$$((a_n)_n + (b_n)_n) * (c_n)_n = (a_n + b_n)_n * (c_n)_n = (a_n + b_n)_{c_n} = (a_{c_n} + b_{c_n})_n$$
$$(a_n)_n * (c_n)_n + (b_n)_n * (c_n)_n = (a_{c_n})_n + (b_{c_n})_n = (a_{c_n} + b_{c_n})_n$$
    Desna distributivnost torej velja.

5 Izreki

Po dokazanih lastnostih množice N smo se lotili preverjanja usklajenosti množic K in D z operacijama in odkrili, da za seštevanje velja:

Izrek 1. *Če $(a_n)_n \in K \wedge (b_n)_n \in N \Rightarrow (a_n + b_n)_n \in K$.*

Dokaz. Naj bo $(a_n)_n \in K$. Potem velja, da vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ konvergira. Vzemimo poljubno zaporedje $b_n \in K$. Velja:
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n + b_n} < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n},$$
pri tem smo uporabili zgoraj definirano seštevanje. Neenakost sledi iz dejstva, da so v zaporedjih $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ zgolj naravna števila, kar pomeni, da je $a_n < a_n + b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, torej je $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_n+b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ker je vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ konvergentna, je po primerjalnem kriteriju konvergentna tudi vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n+b_n}$. □

Izkaže se, da izreka tega tipa ne moremo zapisati za primer, ko seštevamo poljubni zaporedji iz D, saj lahko pri tem dobimo tako zaporedje iz K kot tudi iz D. Konstruirali smo primera za obe možnosti:

- $(a_n)_n \in D \wedge (b_n)_n \in D,\ (a_n + b_n)_n \in D$:
  Naj bosta $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ kar zaporedji vseh naravnih števil. Tvorimo harmonični vrsti $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ in $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}$, ko zaporedji seštejemo pa tvorimo vrsto $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n+b_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\cdot a_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\cdot n} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$, za katero že vemo, da divergira.
- $(a_n)_n \in D \wedge (b_n)_n \in D,\ (a_n + b_n)_n \in K$:
  Vzemimo najprej geometrijsko vrsto $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{c_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$, pri čemer naj bo $a_n + b_n = c_n$ za vsak n. Ta vrsta konvergira. Sedaj po členih konstruirajmo divergentni vrsti $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ in $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}$ na naslednji način. Prvi člen zaporedja $(c_n)_n$ je 2. Za a_1 vzamemo 1 in tako določimo prvi člen zaporedja $(b_n)_n$, ki je enak $c_1 - a_1 = 1$. Člen $c_2 = 4$ in sedaj vzamemo za $a_2 = 2$. Z odštevanjem dobimo $b_2 = 2$. Tretji člen zaporedja $(c_n)_n$ je enak 8, za a_3 vzamemo 3 in določimo $b_3 = 5$. Člene

zaporedja $(c_n)_n$ poznamo, za člene zaporedja $(a_n)_n$ jemljemo zaporedna naravna števila, dokler vsota recipročnih vrednosti zaporedja ne preseže 1 (to se zmeraj zgodi, saj seštevamo zaporedne člene harmonične vrste, ki divergira), člene zaporedja $(b_n)_n$ pa dobimo z odštevanjem. Ko vsota recipročnih vrednosti zaporedja $(a_n)_n$ preseže 1, pogledamo člen zaporedja $(b_n)_n$ in ga označimo z b. Sedaj za člene zaporedja $(b_n)_n$ jemljemo zaporedna naravna števila, večja od b, dokler ne presežemo 1, in člene zaporedja $(a_n)_n$ dobimo z odštevanjem členov zaporedja $(b_n)_n$ od $(c_n)_n$. Nadaljujemo s postopkom. Na koncu dobimo vrsti oblike:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{19} + \frac{1}{50} + \frac{1}{113} + \frac{1}{240} + \frac{1}{241} + \dots$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{271} + \dots$$

Za množenje pa velja:

Izrek 2. *Če* $(a_n)_n \in K \wedge (b_n)_n \in N \Rightarrow (a_n * b_n)_n \in K$.

Dokaz. Če imamo neko konvergentno vrsto in izmed vseh členov te vrste izberemo samo nekatere ter jih seštejemo, je vsota kvečjemu manjša, kot vsota začetne konvergentne vrste, torej je zagotovo končna. Vrsta iz novodobljenega zaporedja torej zagotovo konvergira. □

Izrek 3. *Če* $(a_n)_n \in D \wedge (b_n)_n \in K \Rightarrow (a_n * b_n)_n \in K$.

Dokaz. Naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ harmonična vrsta in naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}$ poljubna konvergentna vrsta. Zmnožimo sedaj $(a_n)_n * (b_n)_n$ in tvorimo vrsto iz členov dobljenega zaporedja. Ker je zaporedje vseh naravnih števil, iz katerega tvorimo harmonično vrsto, enota za množenje, je vrsta tvorjena iz členov dobljenega zaporedja spet konvergentna. Vzemimo sedaj poljubno zaporedje $(c_n)_n$ iz D. Vidimo, da je $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{c_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, iz česar sledi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{c_n * b_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n * b_n}$, torej vrsta konvergira. □

Prav tako ne moremo podobnega izreka zapisati za zaporedij vsebovanih v D. Našli smo primera, kjer je:

- $(a_n)_n \in D \wedge (b_n)_n \in D,\ (a_n * b_n)_n \in D$:
  Naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ harmonična vrsta, torej zaporedje $(a_n)_n$ enota. Če to zaporedje zmnožimo z zaporedjem $(b_n)_n$ in iz dobljenega zmnožka tvorimo vrsto, dobimo $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}$, ki divergira.

- $(a_n)_n \in D \wedge (b_n)_n \in D,\ (a_n * b_n)_n \in K$:
  Spomnimo se spet divergentnih vrst, prikazanih v izreku 2. Z malo razmisleka vidimo, da $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n * b_n} < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} + 1$, kar je geometrijska vrsta, torej konvergira. Natančnejši dokaz prepuščamo bralcu.

6 Zaključek

Ugotovili smo, da je dana množica N za našo operacijo seštevanja komutativna polgrupa, za množenje pa je polgrupa z enoto. Za ti operaciji velja tudi desna distributivnost. Torej je N s tema operacijama seštevanja in množenja desno distributivni skoraj kolobar brez aditivne enote.