Inverzija in Möbiusove transformacije

Matej Aleksandrov, David Kraljić, Nejc Rosenstein, Aleksander Simonič
Gašper Zadnik (mentor)

Uvod

August Ferdinand P. J. Möbius (1790 - 1868), nemški matematik in astronom je znan po rešitvi mnogih matematičnih problemov. Med njegovimi najbolj znanimi odkritji so delo Težiščni račun, Möbiusov trak, Möbiusova funkcija, ničelni sistem ter Möbiusove transformacije.

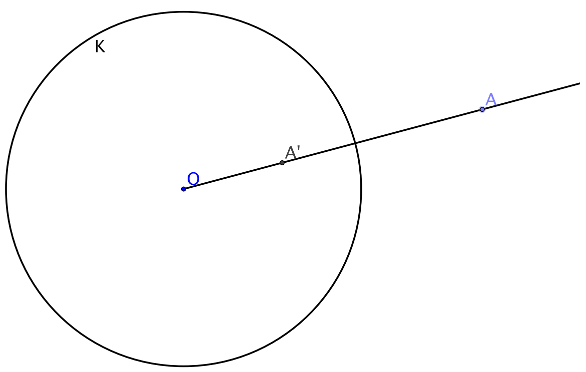
Osnovni pojmi

Med elementarne Möbiusove transformacije prištevamo:

1. Translacije τ_a
2. Rotacije ρ_ϕ
3. Razteg r_k
4. Inverzijo i

Izmed teh štirih transformacij je malo manj splošno znana inverzija. To je preslikava ravnine nase, ki jo določa enotska krožnica K, s središčem O. Pri točki A, ki ni središče prej omenjene krožnice je A' točka na poltraku OA, pri čemer velja:

$$|OA| \cdot |OA'| = 1$$



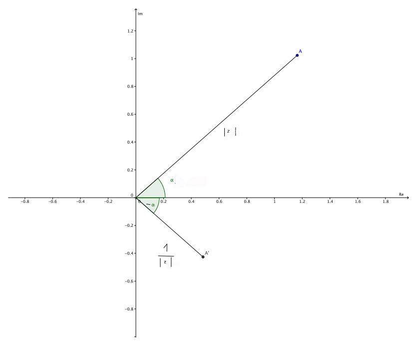
Slika 1

Inverzija se od ostalih transformacij razlikuje tudi po tem, da pri preslikavi lahko zamenja krožnico (v tem primeru L) in premico (p), glede na to, ali vsebujeta središče O enotske krožnice K ali ne.

objekt	slika z inverzijo
$O \in L$	premica
$O \notin L$	krožnica
$O \in p$	premica p
$O \notin p$	krožnica

Te štiri transformacije se v kompleksni ravnini izražajo na naslednji način:

1. $z \to z + a; a \in \mathbb{C}$
2. $z \to z(\cos\phi + i \sin\phi) = z \cdot \lambda_\phi$
3. $z \to z \cdot k; k \in \mathbb{R}$
4. $z \to \frac{1}{z}$ (glej sliko 2)



Slika 2 Kompleksna inverzija se od geometrijske razlikuje po tem, da je argument slike nasproten argumentu originala.

Operacije z osnovnimi transformacijami

1. $z \xrightarrow{r_k} k \cdot z \xrightarrow{\rho_\phi} \lambda_\phi k \cdot z$

2. $z \xrightarrow{\rho_\phi} \lambda_\phi \cdot z \xrightarrow{r_k} k \cdot \lambda_\phi \cdot z$

Iz tega je razvidno, da:

$$\rho_\phi \circ r_k = r_k \circ \rho_\phi$$

3. $z \xrightarrow{\tau_a} z + a \xrightarrow{r_k} k \cdot z + k \cdot a$

4. $z \xrightarrow{r_k} k \cdot z \xrightarrow{\tau_{ka}} k \cdot z + k \cdot a$

Opazimo da:

$r_k \circ \tau_a = \tau_{ka} \circ r_k$

S podobnimi metodami ugotovimo še:

$$\rho_\phi \circ \tau_a = \tau_{\lambda_\phi, a} \circ \rho_\phi$$

Uvedemo novo operacijo σ:

$$z \xrightarrow{\sigma} s \cdot z; \quad s \in \mathbb{C}$$

S tem pokažemo:

$$z \xrightarrow{\sigma} s \cdot z \xrightarrow{i} \frac{1}{s \cdot z}$$

$$z \xrightarrow{i} \frac{1}{z} \xrightarrow{\sigma_{\frac{1}{s}}} \frac{1}{s \cdot z}$$

ter

$$i \circ \sigma = \sigma_{\frac{1}{s}} \circ i$$

Za izpeljavo Möbiusove transformacije uporabimo kompozitume vseh zgornjih transformacij.

$\tau_b \circ \sigma \circ i \circ \tau_a$

$z \xrightarrow{\tau_b} z + a \xrightarrow{i} \frac{1}{z+a} \xrightarrow{\sigma} \frac{s}{z+a} \xrightarrow{\tau_b} \frac{s}{z+a} + b = \frac{s+bz+ab}{z+a} = \frac{bz+c}{z+a}$

Pri pogoju $s \neq 0; a, b, c \in \mathbb{C}$

$\tau_a \circ \sigma$

$z \xrightarrow{\sigma} s \cdot z \xrightarrow{\tau_a} s \cdot z + a$

Na podlagi tega zapišemo definicijo Möbiusove transformacije:

$$M = \left\{ f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \middle| \begin{array}{l} g : z \to \frac{bz+c}{z+a} \\ f : z \to s \cdot z + a \end{array} a, b, c, s \in \mathbb{C} \right\}$$

Dokazovanje grupne strukture

Za dokaz, da so Möbiusove transformacije grupa, je treba preveriti 4 kriterije.

Na začetku smo preverili, če v njih velja asociativnost. To pomeni, da mora za vsak element a, b in c iz grupe veljati:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

V našem primeru dokaz za asociativnost sledi že iz asociativnosti kompozituma splošnih preslikav $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Naslednji pogoj je, da mora operacija biti notranja. To pomeni, da za vsak element a in b iz množice transformacij mora veljati

$$a \circ b = c$$

kjer je tudi c iz te množice.

S preprostim računom tako preverimo 4 različne kombinacije med obema vrstama formul transformacij $f(z)$ in $g(z)$.

Za grupo transformacij je nujno potreben obstoj identitete, torej mora obstajati taka enota e, da za vsak a iz te grupe velja:

$$a \circ e = e \circ a = a$$

V našem primeru velja, da je $e(z) = z$.

Vsaka transformacija (a) mora imeti svoj inverz, oziroma mora obstajati tak element b iz množice transformacij, da je:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Z uporabo obeh osnovnih formul za transformacije izpeljemo:

$$f(z) \circ f^{-1}(z) = e(z)$$

$$(s_1 z + a_1) \circ (s_2 z + a_2) = s_1(s_2 z + a_2) + a_1 = z$$

$$z(s_1 s_2 - 1) + (s_1 a_2 + a_1) = 0$$

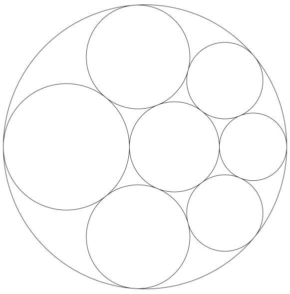
Dobimo:

$$s_2 = \frac{1}{s_1} \qquad \text{in} \qquad a_2 = -\frac{a_1}{s_1}$$

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{s_1} z - \frac{a_1}{s_1}$$

Za $g(z) = \frac{bz+c}{z+a}$ dobimo inverz: $g^{-1}(z) = \frac{-az+c}{z-b}$.

Primer uporabe inverzije



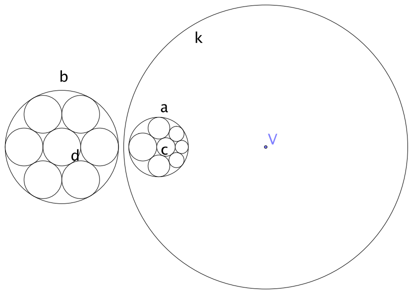
Slika 3

Imamo dano krožnico c s polmerom r_2, ki leži znotraj krožnice a (polmer r_1) in se da v kolobar med krožnicama včrtati zaporedje večih krožnic, ki se vse dotikajo tako krožnice a kot tudi krožnice c ter se medsebojno dotikajo. Tedaj se to da narediti neodvisno od izbire začetne krožnice v kolobarju.

Poiskati hočemo središče inverzije, ki krožnici a in c preslika v koncentrični krožnici. Razdaljo med središčema krožnic označimo z v, med središčem enotske krožnice z oznako k in krožnice c pa z $x + r_2$. Središče enotske krožnice je na premici, ki povezuje središči a in c, x pa se izraža kot rešitev kvadratne enačbe:

$$(2v) \cdot x^2 + (2r_1^2 - 2r_2^2 - 2v^2 + 4vr_2) \cdot x + (2r_2r_1^2 + 4r_2^2v - 2r_2v^2 - 2r_2^3) = 0$$

Zdaj, ko smo ugotovili koordinate središča enotske krožnice, je preostanek naloge povsem enostaven. Vse kar preostane, je namreč le preslikava krožnic iz kolobarja med a in c v kolobar med b in d. Ker sta b in d koncentrični, je vseeno, kje izberemo prvo krožnico v kolobarju med njima.



Slika 4 Rešitev

Viri

1. Tristan Needham (1997). Visual Complex Analysis. Oxford.