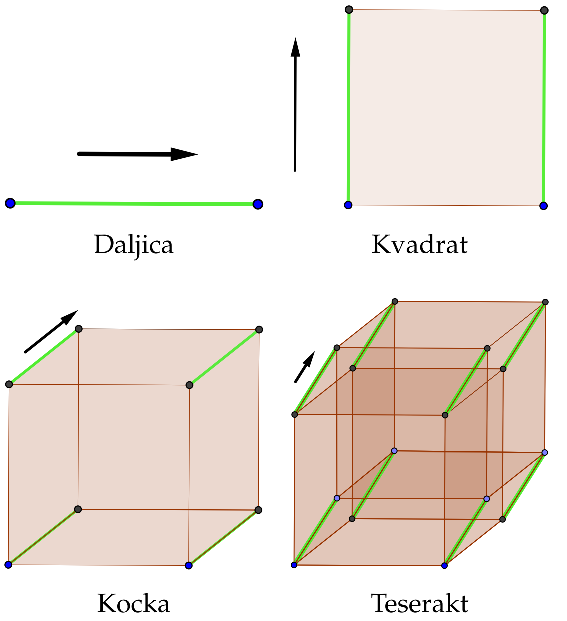
Hiperkocka

Maja Alif, Boris Mitrović
Peter Lendero (mentor)



Naloga

Si lahko zamislite pravokotnico na tri koordinate prostora? Ker živimo v tridimenzionalnem prostoru, se nam ta naloga zdi prezahtevna. Analitični geometriji to ne povzroča nobenih težav, saj lahko računamo v več dimenzijah, dasiravno si jih ne moremo predstavljati. Za predstavo pa ostanejo triki: projekcije, sence in sklepanje z manj na več dimenzij.

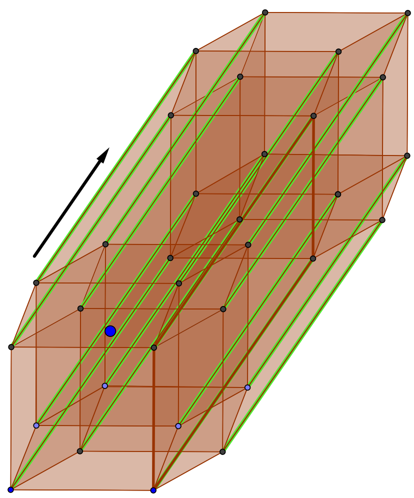
Hiperkocke

Hiperkocke so kocke, posplošene na različne dimenzije. V dimneziji 0 jo predstavlja točka. Enodimenzionalno hiperkocko dobimo tako, da to točko premaknemo za razdaljo ene enote. Njena pot opiše daljico, katere oglišča označimo z 0 in 1. Daljico nato ponovno premaknemo za eno enoto v smeri, pravokotni na samo daljico. Tako dobimo kvadrat - hiperkocko v dveh dimenzijah. Novonastali lik "dvignemo" za eno enoto pravokotno nad ravnino, kot prikazuje slika. Nastane običajna (3 D) kocka.
Naslednji korak je podoben prejšnjim, a abstraktnejši, saj kocko premaknemo pravokotno na vse tri koordinatne osi. Prostor, ki je s tem premikom opisan, je 4-dimenzionalna hiperkocka, imenovana teserakt. V vsakem njenem oglišču se stikajo štirje pravokotni robovi. Oglišča označimo s koordinatno četverico, na primer (0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0) ... Z njimi lahko računamo enako kot s trojicami v 3 D prostoru ali s pari koordinat v ravnini (2 D). Objekte lahko po tem postopku raztegujemo v neskončnost. Nastajajo novi evklidski prostori s poljubno mnogo dimenzijami.

n-dimenzij

Prvi zanimivi takonastali objekt je torej teserakt. Ker ima le 4 dimenzije, lahko mnoge njegove lastnosti spoznamo intuitivno. Z nadaljnjim premikanjem se pojavijo nove daljice, kvadrati, kocke ... Čeprav se njihovo število povečuje po določenih zakonitostih, si pri penteraktu (5 D) in hiperkockah višjih dimenzij z domišljijo ne moremo več pomagati.

N-prostor	oglišča	robovi	kvadrati	kocke	teserakti	5D hiperkocke	6D hiperkocke
0	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0
6	64	192	240	160	60	12	1
7	128	448	672	560	280	84	14
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360



Slika 1 Penterakt

Pri premiku, potrebnemu za konstrukijo kocke v

Število objektov za različne hiperkocke

N-prostor	oglišča	robovi	kvadrati	kocke	teserakti	5D hiperkocke	6D hiperkocke
0	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0
6	64	192	240	160	60	12	1
7	128	448	672	560	280	84	14
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360

Page 1

Slika 2 Tabela števila objektov hiperkock

dimenzijo više, dobimo torej začetno in končno sliko, ki ju povezujejo daljice, ploskve ... Število oglišč se tako podvojuje. Točke začetne slike pri premiku opišejo nove daljice. Število robov je zato enako vsoti robov začetne in končne slike ter številu točk ene izmed slik. (glej tabelo) Podobno premik kvadratov opiše novo kocko in je zato število kvadratov hiperkocke v dimenziji višje vsota števila kvadratov začetne in končne slike ter števila daljic začetne slike. Enako velja za 3 D kocko, teserakt in vse hiperkocke višjih dimenzij. Zdi se, da so dobljena števila točk, daljic, kvadratov ... koeficienti potenc polinoma $2x+1$. Primer:

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$
$$(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

Kocka ima 8 oglišč, 12 robov, 6 ploskev in je sama 1 kocka. Teserakt ima dvakrat toliko oglišč, 32 robov, ploskev je 24, sestavlja pa jo še 8 kock.
Dokažimo to domnevo z indukcijo.
Baza indukcije za $n = 1$: to je 1 daljica, ki ima seveda 2 oglišči. Predpostavimo, da koeficienti polinoma $(2x+1)^n$ predstavljajo število oglišč, daljic, kvadratov, kock ... n-dimenzionalne kocke. Zdaj naredimo premik kocke v $(n+1)$-dimenzijo. S tem se število vsakega izmed objektov (oglišč ...) podvoji, nato pa se mu prišteje število objektov ene manjše dimenzije od n-hiperkocke (torej vsako število tabele dobimo kot vsoto števila v kvadratku predhodnje vrstice in stolpca ter dvakratnika števila nad prvotnim kvadratkom).

$$(2x+1)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^k\right)(2x+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^k$$

Pri prvem enačaju smo uporabili indukcijsko predpostavko in dobili, da je število objektov $(n+1)$-hiperkocke pri neki potenci x-a dvakratnik istega objekta pri n-hiperkocki (stopnja x-a se poveča, ker ima prostor zdaj eno dimenzijo več), zraven pa je potrebno prišteti nove objekte, ki jih dobimo s premikom objektov z eno dimenzijo manj (sedaj imajo isto stopnjo x-a zaradi enakega razloga kot prej). ■

Hanojski stolpi

Obstaja legenda o indijskem templju, v katerem je velika soba s tremi obrabljenimi drogovi, ki jih obkroža 64 zlatih ploščic. Brahmani premikajo te ploščice glede na pravila igre. Po legendi bo po zadnjem premiku ploščice konec sveta. Ta zgodba je bila povod za matematično igro. Podane imamo tri palice. Na prvi palici so na začetku nataknjeni obroči različnih velikosti po vrsti od največjega do najmanjšega. Obroče lahko premikamo med palicami. Pri potezi lahko naenkrat z ene palice na drugo preložimo le zgornji obroč, pri čemer morajo biti po koncu poteze na ciljni palici diski urejeni po velikosti od najmanjšega zgoraj do največjega spodaj.

Slika 3 Hanojski stolpi

Problem za n-obročev je izomorfen (enak) iskanju hamiltonske poti po n-hiperkocki. Hamiltonska pot je sprehod po povezavah (robovih) grafa hiperkocke, ki obišče vsako točko natanko enkrat. Postavimo hiperkocko v središče koordinatnega sistema tako, da eno oglišče sovpada z $(0,0,0,...)$ in da vsi robovi iz tega oglišča ležijo na koordinatnih oseh (teh je n, enako mnogo kot je dimenzija hiperkocke). Torej dobimo koordinate 2^n različnih koordinatnih n-teric oglišč $(1,0,0,...,1)$,

$(0, 1, 1, ..., 0)$,... kjer n-ta koordinata predstavlja n-ti največji obroč. Ko prehodimo eno povezavo na hiperkocki, se prestavimo iz enega oglišča v sosednje, pri tem pa se zamenja natanko ena koordinata oglišča (na primer iz $(0, 0, 1, 0)$ na $(0, 1, 1, 0)$). To pomeni, da smo nataknili obroč na neko drugo palico. Dokažimo zdaj, da nam hamiltonska pot prinese željeni rezultat. Poskusimo spet z indukcijo. Ko imamo en obroč, lahko problemu priredimo enodimenzionalno hiperkocko, to je daljico. Hamiltonska pot daljice je kar $0 \to 1$, torej enostavno prestavimo obroč iz ene palice na drugo. S tem je igra končana.
Predpostavimo zdaj, da nam hamiltonska pot po n-hiperkocki reši problem za n obročev in imamo pred sabo problem z $n + 1$ obroči. Temu problemu priredimo graf $(n + 1)$-dimenzionalne hiperkocke. Ker je njen graf pravzaprav graf dveh n-hiperkock, kjer paroma povežemo istoležeča vozlišča lahko uporabimo indukcijsko predpostavko za prvih n obročev in se sprehodimo po prvi hiperkocki. Ti obroči so potem na drugi, zadnji, največji pa še zmeraj na prvi palici. Prestavimo prvi obroč na tretjo palico in s tem skočimo iz prve n-hiperkocke na drugo. Znova uporabimo indukcijsko predpostavko za prvih n obročev in jih prestavimo iz druge palice na tretjo. Tako lahko naredimo hamiltonsko pot tudi po drugi n-hiperkocki. Uspelo se nam je sprehoditi po celi hiperkocki $(n + 1)$-dimenzije. ■

Viri

1. Gardner, M. (1978). Mathematical Carnival. Great Britain: Pelican Books.

2. TOWER OF HANOI. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Hanoi_towers

3. HYPERCUBES. Online. Citirano 29. avgusta 2008 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Hypercubes