

2007



Najhitrejša pot po Marsu

Maja Alif, Celje
Blaž Peterlin, Škocjan
Nejc Rosenstein, Celje
Boštjan Kuzman, Ljubljana (mentor)



Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula

Miha Čančula, Postojna
Peter Muršič, Ankaran
Maja Poklinek, Vuzenica
Primož Koželj, Ljubljana (mentor)



Marsovi sateliti in cikloidne krivulje

Anja Komatar, Domžale
Tilen Marc, Vipava
Matej Aleksandrov, Ljubljana
Peter Lendero, Velenje (mentor)



Stožnice v taksi razdalji

Amela Rakanović, Sežana
Boris Mitrović, Sevnica
Dominik Šurc, Solkan
Katja Berčič, Ljubljana (mentor)



Bezierjeve krivulje

Polona Durcik, Dutovlje
David Kraljič, Velenje
Aljaž Zalar, Ribnica
Uroš Kuzman, Velenje (mentor)



Optimalna dostava goriva in Fermatova točka

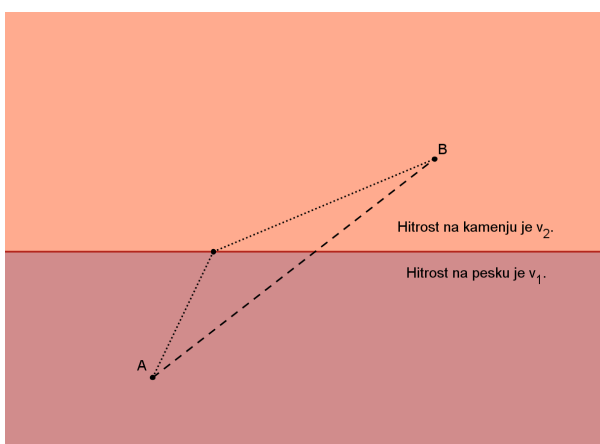
Matej Drame, Šmarje
Peter Koželj, Ljubljana
Nino Bašič, Ljubljana (mentor)

Najhitrejša pot po Marsu

Maja Alif, Blaž Peterlin, Nejc Rosenstein, Boštjan Kuzman (mentor)

Naloga

Neustrašni raziskovalci na Marsu se ubadajo z naslednjim problemom: Vozilo na površju se giblje po peščinem območju s hitrostjo v_1 , po kamniti podlagi pa s hitrostjo v_2 . Denimo, da želimo priti od točke A v peščinem območju do točke B na kamniti podlagi, pri čemer sta območji razmejeni s premico (Slika 1). Kakšno pot naj izberemo, da bomo zanjo porabili čim manj časa?



Slika 1: Točka A leži v peščinem območju, kjer vozilo potuje s hitrostjo v_1 , točka B pa v kamnitem območju, kjer vozilo potuje s hitrostjo v_2 .

Najkrajša pot med točkama A in B je daljica, kar pa še ne pomeni, da bomo zanjo porabili najmanj časa. Če je potovanje po peščinem območju počasnejše od potovanja po kamniti podlagi, bomo pot raje ubrali tako, da se na peščinem območju ne bomo zadržali predolgo. Našo pot bomo zato sestavili iz dveh daljic, ki točki A in B povezujeta s točko H , ki leži na mejni premici. A kako določiti točko H , da bo porabljeni čas res najkrajši?

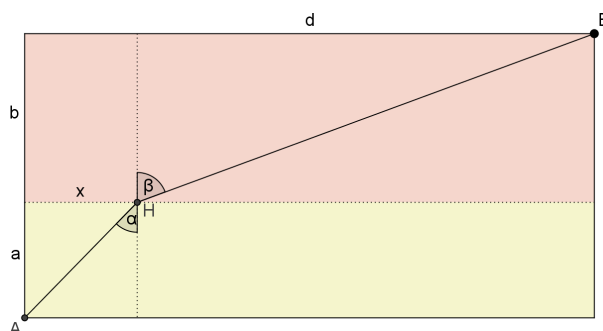
Pot vozila in lom svetlobe

Pot do rešitve naše naloge ni lahka in spotoma bomo morali zaviti celo v fiziko, natančneje v optiko. Dobro desetletje po odkritju daljnogleda je leta 1621 nizozemski matematik Willebrord Snell¹ odkril lomni zakon, ki pravi, da je razmerje med hitrostima svetlobe v različnih snoveh enako razmerju sinusov vpadnega in lomnega kota:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Čeprav zakon v bistvu opisuje lom žarka svetlobe, je veljaven tudi splošneje in ga lahko uporabimo pri reševanju našega problema, ki spada v področje mehanike.

Označimo z a in b širini ustreznih območij, z d njegovo dolžino in z x razdaljo iskane točke H od levega roba območja (Slika 2).



Slika 2: Skica k splošno zastavljenemu problemu

V skladu s Pitagorovim izrekom lahko iz lomnega zakona dobimo enakost:

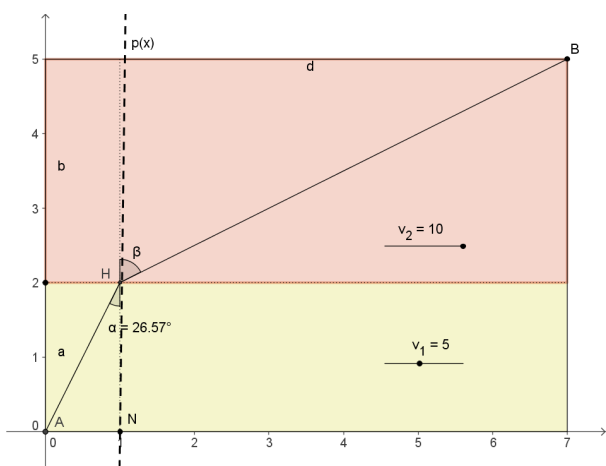
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

¹ Willebrord Snell van Royen (1580-1626), nizozemski matematik, fizik in astronom. Po študiju prava je nasledil svojega očeta kot predavatelj matematike na Univerzi v Leidnu. Med drugim je izmeril poldnevniški lok med Alkmaarom in Bergenom, razvil postopek triangulacije in odkril lomni zakon svetlobe.

Če označimo $\frac{v_1}{v_2} = c$, potem po kvadriranju in preurejanju dobimo enakost

$$x^2(b^2 + (d-x)^2) - c^2(a^2 + x^2)(d-x)^2 = 0.$$

Izraz na levi je polinom četrte stopnje, ki ga lahko označimo s $p(x)$. Vrednost x , ki jo iščemo, je ničla tega polinoma na intervalu $(0, d)$. Da taka ničla gotovo obstaja, lahko ugotovimo po kratkem premisleku. Velja namreč $p(0) = -c^2a^2d^2$, ki je vedno negativno število. Po drugi strani pa je $p(d) = d^2b^2$ v vsakem primeru pozitivno število, torej mora graf polinoma $p(x)$ vsaj enkrat sekati koordinatno os na intervalu $(0, d)$. To pomeni, da imamo na tem intervalu vsaj eno ničlo. Da bi se prepričali, da je ničla le ena sama, bi potrebovali diferencialni račun, a se bomo natančnemu odgovoru na tem mestu izognili.

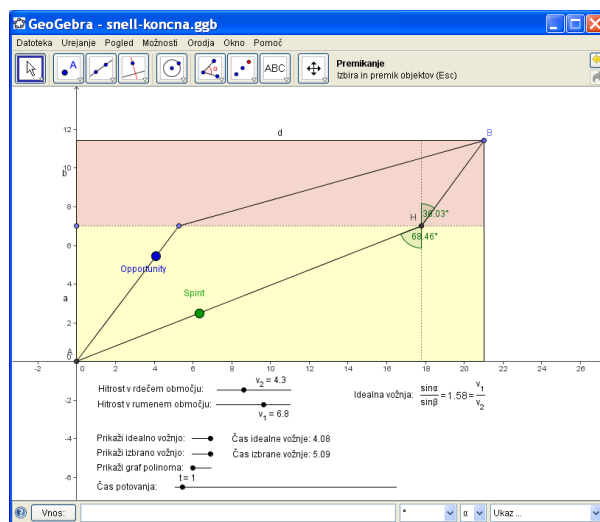


Slika 3: Točka N na sliki je iskana ničla polinoma $p(x)$, ki je hkrati tudi x koordinata iskane točke loma H .

Preizkusimo našo rešitev na konkretnih podatkih. Naj bo $a = 2$, $b = 3$, $d = 7$, hitrost vozila na kamnih pa je dvakrat večja od hitrosti vozila na pesku. V tem primeru iščemo ničlo polinoma $p(x) = 3x^4 - 42x^3 + 179x^2 + 56x - 196$ na intervalu $(0, 7)$. To lahko preuredimo v $(x - 1)(3x^3 - 39x^2 + 140x + 196) = 0$, kar nam že da eno ustrezno rešitev $x = 1$. V tem primeru lahko tudi hitro vidimo, da je ničla ena sama, saj je $p'(x) = 3x^2 - 39x + 140$, kar je večje od 0 za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Računalniški model

Ker je v splošnem težko najti ničle polinoma $p(x)$, smo se nadaljnega reševanja lotili z računalnikom. S pomočjo programa GeoGebra smo izdelali interaktivni model, s katerim lahko pri poljubno izbranih začetnih podatkih (začetna in končna točka potovanja, hitrost na pesku in hitrost na kamenju) izračunamo ničlo prej omenjenega polinoma in ilustriramo položaj iskane točke loma. Izdelali smo tudi animacijo, ki prikazuje gibanje dveh točk, ene po poljubno izbrani lomljeni poti in druge, ki potuje po optimalni lomljeni poti (Slika 4).



Slika 4: Podatki in izračuni v izdelanem modelu se dinamično spreminjajo s premikanjem ustreznih drsnikov. Animacija nas tudi vizualno prepriča, da sonda Spirit, ki se pomika po optimalni poti, točko B doseže prej ali vsaj tako hitro kot sonda Opportunity, ki se premika po poljubni drugi poti.

Narava ubere najkrajšo pot

Ideja o lomnem zakonu se je v prvi polovici 17. stoletja najprej porodila Snellu in nato Descartesu, a je ni nihče od njiju pravilno razložil. Descartes² je celo menil, da svetloba lažje potuje v gostejših kot v redkejših snoveh. Približno 40 let kasneje pa je znameniti francoski matematik Pierre de Fermat³ v pismu markizu De la Chambreu je zapisal: *Da*

² René Descartes (1596-1650), francoski filozof, matematik, fizik, učenjak in častnik. Najbolj znano delo je Razprava o metodi za boljše vodenje razuma in iskanje resnice v znanosti (1637) z dodatki o optiki in geometriji.

³ Pierre S. de Fermat (1601-1665), francoski pravnik, matematik in fizik. Postavil Fermatovo načelo, po katerem svetloba pri lomu ali odboju potuje med dvema točkama tako, da za pot porabi najkrajši čas. Iz načela izpeljemo odbojni in lomni zakon svetlobe.

bi se izognili omenjenim neprijetnostim in poskusili poiskati pravi razlog za lom, sem vam v svojem pismu namignil, da bi z upoštevanjem znanega in utemeljenega načela, da gre narava vedno po najkrajši poti, lahko enostavno prišli do rezultata. Tako je Fermat pravilno razložil ta naravni zakon, njegovo načelo pa je postalo znano pod imenom 'de maximis et minimis'. Očitno podobni naravni zakoni veljajo tudi na Marsu.

Viri

1. Petković, M. (1988). Zanimljivi matematički problemi. Beograd: Naučna knjiga
2. Michel Guillemon, et. al. (2000.). Zgodovina matematike, zgodbe o problemih. Ljubljana: DMFA - založništvo

3. FERMAT. Online. Citirano 31. avgusta 2007 na naslovu 1; <http://sl.wikipedia.org/wiki/Fermat>
4. DESCARTES. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu <http://sl.wikipedia.org/wiki/Descartes>
5. WILLEBRORD SNELL. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://sl.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snell_van_Royen
6. SNELL'S LAW. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law



Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula

Miha Čančula, Peter Muršič, Maja Poklinek, Primož Koželj (mentor)

Naloga

Področje marsovske gore Olympus Mons znanstveniki raziskujejo s tremi daljinsko vodenimi vozili. Vsako od njih je preko žic povezano s tremi statičnimi raziskovalnimi postajami. Ker morebitno prekrivanje žic povzroča motnje v signalu, bi radi vozila, postaje in žice razporedili tako, da se ne bi nobeni dve žici križali. Ali je taka razporeditev mogoča?

Pri iskanju odgovora na to vprašanje si lahko nekoliko nepričakovano pomagamo z Eulerjevo formulo, ki povezuje število robov, ploskev in oglišč konveksnega poliedra. Kot je bralec najverjetneje že uganil, Eulerjeva formula ne velja le za poliedre, njena splošna veljavnost pa je vredna še toliko več zaradi njene uporabnosti. Oglejmo si torej preprost dokaz in nekaj primerov uporabe.

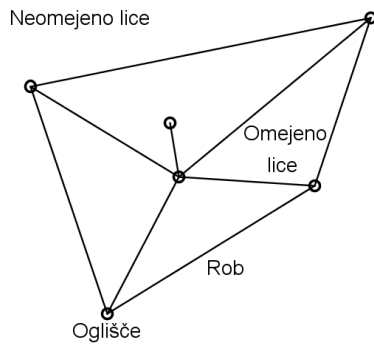
Ravninski grafi in Eulerjeva formula

V matematični teoriji grafov je *graf* neki objekt, ki ga sestavlja množica točk in množica povezav med njimi. Povedano zelo preprosto, graf dobimo, če v ravnini označimo nekaj točk in nekatere izmed njih povežemo. Točke bomo imenovali *oglišča grafa*, povezave pa *robovi grafa*. Graf imenujemo *povezan*, če se lahko od poljubnega oglišča po nekem zaporedju robov sprehodimo do poljubnega drugega oglišča v grafu.

Grafe, ki jih lahko narišemo tako, da se robovi med sabo ne sekajo (razen morda v ogliščih), imenujemo *ravninski grafi*. Robovi ravninskega grafa razdelijo ravnino na več delov, ki jih imenujemo *lice*. Eno lice je vedno neskončno, ostala pa so omejena.

Število lic, robov in oglišč povezanega ravnin-

⁴ Leonhard Euler (1707-1783), izjemni švicarski matematik in fizik, po katerem je poimenovanih mnogo pojmov v matematiki (npr. Eulerjeva konstanta, Eulerjev sprehod). Pod izrazom Eulerjeva formula poznamo tudi Eulerjevo formulo za kompleksna števila $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, zato formulo $O - R - P = 2$ za konveksne poliedre včasih raje imenujemo Eulerjev izrek za poliedre.



Slika 1: Primer povezanega ravninskega grafa

skega grafa povezuje *Eulerjeva formula*⁴, ki se s slovenskimi oznakami glasi $O - R + P = 2$, kjer je O število oglišč, R število robov in P število lic grafa (oznako P smo izbrali zaradi uporabe istih oznak pri poliedrih - P kot ploskve).

Eulerjevo formulo bomo dokazali tako, da si bomo najprej ogledali graf z enim samim ogliščem in mu nato dodajali oglišča in robove. Začetni graf z enim ogliščem (glej sliko 2) ima 1 oglišče, 1 lice (neskončno namreč) in 0 robov, zato je $O - R + P = 1 - 0 + 1 = 2$ in za ta graf Eulerjeva formula velja.

V vsakem naslednjem koraku pa se odločimo za eno izmed naslednjih dveh možnosti:

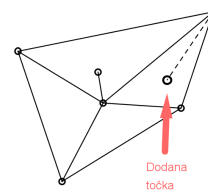
- Dodamo novo oglišče in rob od tega oglišča do nekega obstoječega oglišča (primer na sliki 3). Pri tem se število robov in število oglišč povečata za 1, število lic pa se ne spremeni, zato tudi vrednost izraza $O - R + P$ ostane nespremenjena.
- Dodamo rob med dvema različnima obstoječima ogliščima (slika 4, levo) ali pa zanko - povezavo nekega oglišča s samim seboj (slika 4, desno). Pri tem se povečata število robov in lic za 1, število oglišč se pa ne spremeni. Zato vrednost $O - R + P$ ponovno ostane nespremenjena.

Neravninska grafa K_5 in $K_{3,3}$

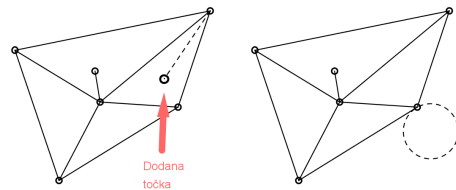
Sedaj, ko poznamo Eulerjevo formulo, vemo dovolj, da se spopademo z začetnim problemom in drugim problemom, ki mu je precej podoben. Preden pa začnemo z obravnavo, problema še enkrat predstavimo.



Slika 2: Ena sama točka; $O = 1$, ker je oglišče eno samo; velja tudi $P = 1$, ker štejemo tudi neskončno ploskev, ki obdaja točko



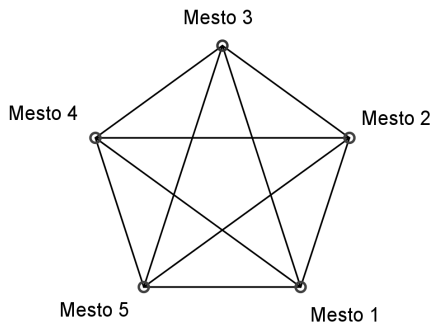
Slika 3: Dodajanje oglišča in povezave do njega



Slika 4: Levo - Dodajanje povezave med obstoječima točkama; Desno - V posebnem primeru je to kar dodajanje zanke

Graf z oznako K_5 imenujemo *poln graf na petih točkah*. To je graf s petimi oglišči, pri katerem je vsako oglišče povezano z vsemi ostalimi. Primer takega grafa dobimo, če bi želeli pet mest povezati s cestami tako, da bi bilo vsako mesto povezano z vsakim od ostalih s svojo cesto. Vprašanje, ali se da ceste zgraditi na takšen način, da ni potreben nadvoz, podvoz ali križišče, je enakovredno vprašanju, ali je graf K_5 ravninski.

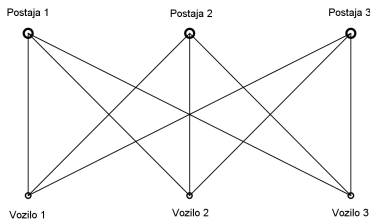
Graf z oznako $K_{3,3}$ pa imenujemo *poln dvodelni graf* z dvema skupinama po tri oglišča. Oglišča v njem so povezana tako, da je vsako oglišče iz posamezne skupine povezano z vsemi oglišči v drugi skupini in z nobenim ogliščem iz svoje skupine. Tudi v naši uvodni nalogi z vozili imamo dve skupini predmetov (vozila in postaje), predmete vsake skupine pa želimo povezati z vsemi predmeti iz



Slika 5: Pet mest in ceste med njimi so primer grafa K_5

druge skupine. Če vozila in postaje interpretiramo kot oglišča grafa, je naša naloga tako evivalentna vprašanju, ali je graf $K_{3,3}$ ravninski.

S pomočjo Eulerjeve formule bomo pokazali, da nobeden izmed dveh omenjenih grafov ni ravninski. To pomeni, da sta obe zastavljeni nalogi nerešljivi.



Slika 6: Naš primer grafa $K_{3,3}$

Dokaz za graf K_5

Dokazovali bomo s pomočjo protislovja. Predpostavili bomo namreč, da je graf K_5 ravninski, nato z logičnim sklepanjem prišli do protislovja in od tod sklepali, da je bila napačna začetna predpostavka, torej, da preučevani graf ni ravninski.

Definirajmo torej *stopnjo lica* kot število robov tega lica. Vsota stopenj vseh lic enostavnega grafa je enaka dvakratniku števila robov ($2R$), saj vsak rob pripada dvema licema. Zdaj poiščimo še eno oceno za vsoto stopenj lic in primerjajmo ti dve oceni. V grafu K_5 ni ne dveh robov med posameznim parom točk ne zank (povezav oglišča s samim seboj), zato moramo pri vsakem prehodu, po katerem spet pridemo v začetno točko, prehoditi vsaj tri robove (po istem robu pri prehodu ne smemo iti večkrat). Ko se na ta način sprehodimo okoli lica, vidimo, da ima vsako lice vsaj tri robove, zato je vsota stopenj

lic večja ali enaka $3P$. Upoštevamo še ugotovitev od prej in imamo torej neenakost $3P \leq 2R$.

Preučimo razmerje med $3P$ in $2R$ še iz drugega zornega kota. Graf K_5 ima 5 oglišč in $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ robov (lahko jih tudi preštejemo na sliki 5). Ker smo predpostavili, da je ta graf ravninski, mora zanj veljati Eulerjeva formula, iz katere lahko izračunamo število ploskev $P = R - O + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$. Potem je $3P = 21 > 20 = 2R$ in tako $3P > 2R$. Dobljeno protislovje pomeni, da graf ni ravninski.

Dokaz za graf $K_{3,3}$

Za graf $K_{3,3}$ moramo neenakost, ki vključuje število lic in robov nekoliko spremeniti. Še vedno velja, da graf nima ne dvojnih povezav ne zank, zato ne obstajajo lica s stopnjo strogo manjšo od tri. Ta ugotovitev pa v primeru grafa $K_{3,3}$ še ne pripelje do protislovja. Na srečo pa jo lahko še izboljšamo - pri grafu $K_{3,3}$ namreč celo velja, da nobeno lice nima stopnje tri.

Sprehodimo se okoli lica grafa. Vsaka točka je povezana zgolj s točkami iz druge skupine, zato pri prehodu dolžine 3 nikoli ne končamo v začetni skupini - prehodimo npr. skupina $A \rightarrow$ skupina $B \rightarrow$ skupina $A \rightarrow$ skupina B ; začeli smo v A , končali v B . Ker ne končamo v začetni skupini, ne moremo končati v začetni točki. To je možno šele po prehodu dolžine 4 ali več, zato je najmanjša možna stopnja lica 4.

Vsak rob v vsakem grafu pripada dvema licema, zato zopet velja, da je vsota stopenj lic $2R$. Stopnja posameznega lica je večja ali enaka 4, zato je vsota stopenj večja ali enaka $4P$. Torej velja neenakost $4P \leq 2R$ oziroma $2P \leq R$.

Še na drug način: Graf $K_{3,3}$ ima 6 oglišč in 9 robov (glej sliko 6). Če spet privzamemo, da je graf ravninski, po Eulerjevi formuli dobimo $P = 9 - 6 + 2 = 5$. Spet smo v protislovju z prej ugotovljenim, saj je $2P = 10 > 9 = R$ oziroma $2P > R$, od prej pa imamo oceno $2R \leq P$. Predpostavka, da je $K_{3,3}$ ravninski, nas je tako privedla do protislovja, zato je napačna.

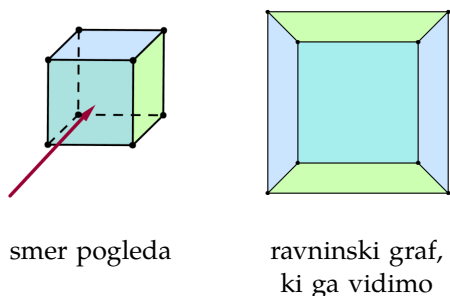
S tem smo dokazali, da niti grafa K_5 niti grafa $K_{3,3}$ ne moremo narisati v ravnini, ne da bi se vsaj dva robova križala. Ko to uporabimo na prej navedenih primerih iz resničnega življenja, ugotovimo, da ne moremo medsebojno povezati petih

mest brez nadvozov, podvozov ali križišč ter da raziskovalnih vozil ne moremo povezati z antenami brez križanja kablov. Nemogoče je torej, da bi našli takšno razporeditev predmetov in povezav, ne glede na to koliko zvijamo žice ali preusmerjamo ceste.

Od grafov v ravnini do poliedrov

Preden se lotimo poliedrov, se domenimo, da se bomo ukvarjali le s *konveksnimi poliedri*, to je tistimi, ki nimajo votlin ali vdrtin.

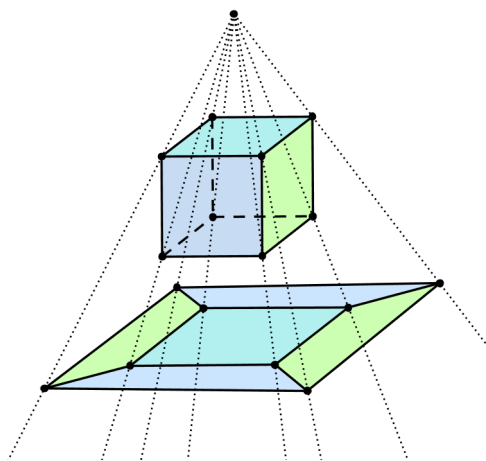
Ravninski graf, ki ustreza konveksnemu poliedru, dobimo tako, da naš pogled počasi približamo enemu izmed lic poliedra (glej sliko 7). Polieder si pri tem predstavljamo kot žičnat model - vsa snov, iz katere je polieder, je prozorna, vidni pa so le žičnati robovi. Ko smo torej dovolj blizu, vidimo celoten polieder znotraj robov tistega lica, ki smo se mu približali, robovi pa se ne sekajo drugje kot v ogliščih - vidimo torej ravninski graf (slika 7, desno).



Slika 7: Približevanje kocki s pogledom.

Druga možnost, da poiščemo ustrezen ravninski graf pa je, da za polieder postavimo ravnino, pred njega pa svetilo. Na naš zaslon oziroma ravnino tako projeciramo sence robov poliedra. Svetilo neki ploskvi približujemo toliko časa, da se sence robov na ravnini ne križajo več. Senca celotnega poliedra, ki smo jo dobili na ravnini, je ustrezen ravninski graf (glej sliko 8). Takšno projekcijo imenujemo *stereografska projekcija*.

Dobljeni ravninski graf ima podobne lastnosti kot prvotni polieder - ima enako število robov, oglišč in lic oziroma ploskev kot prvotni polieder, če štejemo tudi neskončno lice grafa. Enako število oglišč nam zagotovi dejstvo, da se oglišče poliedra projicira v oglišče grafa. Enako velja za robove in vse ploskve poliedra razen tisto, ki je najbližje sve-



Slika 8: Stereografska projekcija kocke

tilu oziroma gledalcu. Ta najbližja ploskev se preslika v lik, ki pokriva celotno območje grafa, to pa praviloma ne ustreza nobenemu posameznemu licu grafa. To težavo odpravimo tako, da štejemo, da se najbližja ploskev preslika v zunanje, neskončno lice.

Zaradi podobnih lastnosti velja enaka povezava med številom ploskev, robov in oglišč poliedra kot med številom lic, robov in oglišč povezanega ravninskega grafa - enostavneje povedano, s pomočjo projekcije smo pokazali, da velja Eulerjeva formula tudi za poliedre.

O pravih poliedrih

Pravilni poliedri so tisti konveksni poliedri, katerih ploskve so skladni pravilni mnogokotniki in pri katerih se v vsakem oglišču stika enako število robov (in s tem enako št. ploskev). Med njimi sta denimo vsem znana tetraeder in kocka, pa morda manj znani oktaeder, ikozaeder in dodekaeder (glej sliko 9), ki so jih poznali že stari Grki. Ob naštetih petih primerih platonskih teles, kot jih tudi imenujemo, se nam zagotovo porodi zanimivo vprašanje, ali obstaja še kakšen drug pravilni polieder in koliko je vseh takih teles.

Naj bo neki pravilen polieder sestavljen iz b kotnikov, od katerih se jih a stika v vsakem oglišču. Poleg Eulerjeve formule $P - O + R = 2$ za njegova oglišča, robove in ploskve velja še

$$R = \frac{bP}{2} \text{ in } O = \frac{bP}{a}.$$

Prva zveza velja, ker imamo P lic, vsako ima b ro-

bov, vsak rob pa pripada dvema licema (z dva moramo torej deliti, da robov ne štejejo prevečkrat). Druga velja, ker imamo spet P lic s po b oglišči, vsako oglišče pa pripada a licem. Če ti dve zvezi vstavimo v Eulerjevo formulo, dobimo

$$O - R + P = P \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{2} + 1 \right) = 2,$$

kar lahko preoblikujemo v

$$P = \frac{4a}{2a - ab + 2b}.$$

Števili P in a sta pozitivni, zato mora veljati $2a - ab + 2b > 0$ oziroma $2(a+b) > ab$, iz česar po deljenju z $2ab$ sledi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Vemo pa tudi, da je število b večje ali enako 3, saj imajo vsi mnogokotniki vsaj 3 oglišča. Tudi a je večji ali enak 3, ker se v vsakem oglišču stikajo vsaj trije robovi. Ker je a večji ali enak 3, je $\frac{1}{a}$ največ $\frac{1}{3}$. Vidimo, da mora biti b manjši ali enak 5, če naj še velja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Podobno lahko sklepamo še za zamenjana a in b . Po krajšem premisleku nam tako ostane le 5 parov naravnih števil (a, b) , ki zadoščajo pogoju

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}.$$

Ti pari so $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$.

Iz zgornjih formul lahko za vsak par (a, b) izračunamo P, O in R , saj velja

$$P = \frac{4a}{2a - ab + 2b}, \quad O = \frac{bP}{a}, \quad R = \frac{bP}{2}.$$

Tako dobimo podatke za pet možnih pravih poliedrov, ki so zbrani v tabeli ???. Vsa ta telesa obstajajo, kar dokazujejo modeli - glej sliko 9. Drugih pravih poliedrov pa ni, sicer pridemo v protislovje z Eulerjevo formulo.

Ploščine in Pickova formula

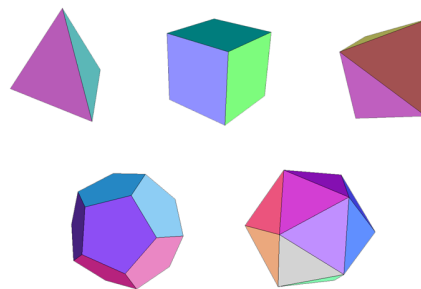
S pomočjo Eulerjeve formule se lahko lotimo še

⁵ George Alexander Pick je formulo prvi opisal leta 1899. Velja tudi posplošitev formule na večkotnike z luknjami $S = L + O_{znotraj} + \frac{1}{2} O_{rob} - 1$, kjer je L število lukenj v večkotniku; luknje se ne dotikajo med sabo ali z robom večkotnika, tudi točke, ki so na robu lukenj štejemo kot robne točke.

a	b	P	O	R	polieder
3	3	4	4	6	tetraeder
3	4	6	8	12	kocka
3	5	12	20	30	dodekaeder
4	3	8	6	12	oktaeder
5	3	20	12	30	ikozaeder

Tabela 1: Vrednosti P, O in R za vseh 5 parov (a, b)

enega zanimivega matematičnega problema. Kadar se ukvarjamo z večkotniki, katerih oglišča imajo celoštevilске koordinate, imamo na izbiro preprosto formulo za izračun ploščine. Ta formula se imenuje Pickova formula⁵ in se glasi:

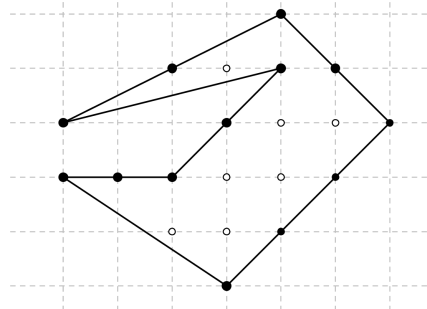


Slika 9: Pet pravih poliedrov: tetraeder, kocka (heksaeder), oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. (Slike narejene s pomočjo programa JavaView, ki omogoča vizualizacijo 3D objektov. Modeli teles so vzeti iz primerov programa. Glej: <http://www.javaview.de/>)

$$S = O_{znotraj} + \frac{1}{2} O_{rob} - 1,$$

kjer je $O_{znotraj}$ število točk v notranosti lika, O_{rob} pa število točk na robu. Najbolj zanimivo pri tej formuli je, da je ploščina lika odvisna le od števila točk s celoštevilskimi koordinatami v notranosti in na robovih večkotnika, ni pa neposredno odvisna od oblike lika.

Pokažimo, kako z nekaj koraki iz Eulerjeve formule izpeljemo Pickovo. Točke s celoštevilskimi koordinatami, na primer $(4, 3)$, imenujmo kar celo-

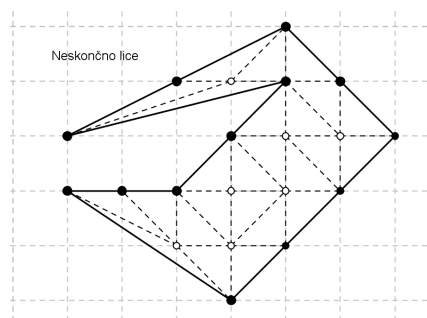


Slika 10: V notranjosti je 7 točk, na robu pa 13. Ploščina večkotnika je torej $S = O_{znotraj} + \frac{1}{2}O_{rob} - 1 = 7 + \frac{13}{2} - 1 = 12,5$

številске točke. Trikotnik z oglišči v celoštevilskih točkah, ki ne vsebuje nobene celoštevilске točke razen oglišč, pa imenujmo *enostaven trikotnik*. V naši izpeljavi bomo uporabili naslednji ugotovitvi o enostavnih trikotnikih, katerih dokaza pa bomo tukaj izpustili:

- Vsak enostaven trikotnik ima ploščino $\frac{1}{2}$.
- Vsak poljubno večkotnik lahko razrežemo na same enostavne trikotnike.

Bralec ju lahko poskuša dokazati sam, mi pa se lotimo kar dokazovanja izreka. Najprej razrežimo naš poljubno izbran večkotnik na enostavne trikotnike (glej sliko 11). Nato si ta razrez večkotnika (z vsemi novimi robovi in oglišči) ogledamo še kot ravninski graf. Imamo pravzaprav ravninski graf s P lici. Število trikotnikov, na katere smo razrezali večkotnik, je enako $P - 1$. To število je za ena manjše od P , ker razrez vsebuje poleg $P - 1$ trikotnikov še neskončno lice, ki obkroža večkotnik (glej sliko 11).



Slika 11: Razrez večkotnika na enostavne trikotnike. Dobljeni graf ima 26 lic, in sicer 25 enostavnih trikotnikov in eno neskončno lice.

Vsak trikotnik ima natanko tri stranice. Torej je

skupno število stranic trikotnikov v grafu $3(P - 1)$. Po drugi strani lahko skupno število stranic preštejemo, tako da številu stranic trikotnikov na robu večkotnika prištejemo število stranic trikotnikov v notranjosti večkotnika. Vsak notranji rob pripada kot stranica dvema enostavnima trikotnikoma, vsak zunanji rob pa je stranica samo enemu enostavnemu trikotniku. Zato lahko zapišemo, da je

$$3(P - 1) = 2R_{notranji} + R_{zunanji}.$$

Vsak rob je bodisi notranji bodisi zunanji, zato velja $R = R_{notranji} + R_{zunanji}$. To vstavimo in dobimo:

$$3(P - 1) = 2R - R_{zunanji}$$

Prenesemo vse razen P na desno stran:

$$P = -2P + 3 + 2R - R_{zunanji} = 2(R - P) + 3 - R_{zunanji}.$$

Po Eulerjevi formuli vemo da velja $O + P - R = 2$, kar lahko preoblikujemo v $R - P = O - 2$. Opazimo še, da je število zunanjih robov večkotnika enako številu robnih točk, torej $R_{zunanji} = O_{rob}$ in dobimo

$$P = 2(O - 2) + 3 - O_{rob}.$$

Zdaj pa zares izrazimo še ploščino. Vemo, da je ploščina večkotnika enaka vsoti ploščin enostavnih trikotnikov. Enostavnih trikotnikov je $P - 1$, njihova ploščina pa je $\frac{1}{2}$, zato velja $S = \frac{1}{2}(P - 1)$. Vstavimo prej dobljeni izraz za P :

$$S = \frac{1}{2}(2(O - 2) + 3 - O_{rob} - 1) = O - \frac{1}{2}O_{rob} - 1.$$

Vemo, da je število vseh oglišč enako vsoti števil oglišč v notranjosti i n oglišč na robu večkotnika, $O = O_{znotraj} + O_{rob}$, od tod pa:

$$S = O_{znotraj} + O_{rob} - \frac{1}{2}O_{rob} - 1 = O_{znotraj} + \frac{1}{2}O_{rob} - 1.$$

S tem smo izpeljali in dokazali Pickovo formulo.

Zaključek

Videli smo, da Eulerjeva formula ni uporabna le pri ravninskih grafih, ampak lahko z njeno uporabo elegantno rešimo številne zanimive in na prvi pogled nesorodne probleme. Naši raziskovalci Marsa pa bodo morali drugače načrtovati svoja raziskovalna vozila in postaje, saj lahko z Eulerjevo formulo le dokažemo, da pri trenutni zasnovi vozil in postaj željena razporeditev ne obstaja.

Viri

1. Coxeter, H. S. M. (cop. 1989). Introduction to Geometry. New York [etc.]: J. Wiley & Sons.
2. Wilson, Robin J. (1997). Uvod v teorijo grafov. Ljubljana: DMFA Slovenije.
3. Aigner, Martin (1998). Proofs from the book. Berlin [etc.]: Springer.
4. Berele, Allan (cop. 2001). Geometry: theorems and constructions. Upper Saddle River: Prentice Hall.
5. Lavrič, Boris. Večkotniki na kvadratni mreži. Presek, letnik 32 (2004/2005), št. 2-3.
6. Bronštejn, Il'ja Nikolaevič (1997). Matematični priročnik. Ljubljana : Tehniška založba Slovenije.
7. JavaView Homepage. Online. Citirano 16. septembra 2007 na naslovu <http://www.javaview.de/>



Marsovi sateliti in cikloidne krivulje

Anja Komatar, Tilen Marc, Matej Aleksandrov, Peter Lendero (mentor)

Uvod

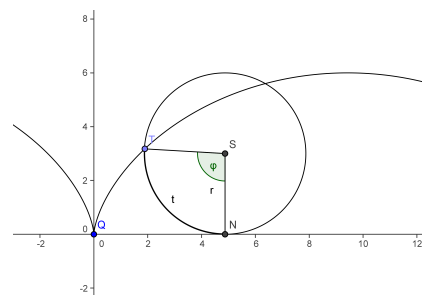
Na področju Aurorae Sinus se znanstveniki ukvarjamo s sateliti. Še posebej nas zanima najdražji satelit Talcum, ki kroži okoli Marsove lune Fobos. Ker želimo vsak trenutek vedeti, kje se satelit nahaja, bomo skušali poiskati njegov tir in v matematičnem jeziku opisati ustrezno krivuljo.

Definicije in enačbe

Krivuljo, ki jo točka na krožnici opiše pri kotaljenju po nekem objektu (ravnini, krožnici, drugi cikloidi, ...), imenujemo *cikloidna krivulja*. Nekatere zanimive vrste cikloid imajo svoja imena. Našo pozornost so pritegnile cikloida, epicikloida, hipocikloida in asteroida. *Cikloida* je krivulja, ki jo opiše točka na krožnici pri kotaljenju po ravnini, epicikloida in hipocikloida pa nastaneta, če eno krožnico kotalimo po drugi. Pri tem *epicikloido* dobimo s kotaljenjem na zunanji strani, *hipocikloido* pa s kotaljenjem po notranji strani druge krožnice.

Enačbe cikloid se najlepše napišejo v parametrični obliki. To pomeni, da vrednosti na ordinatni osi y ne izrazimo kot funkcijo vrednosti na abscisi x , temveč tako x kot y izrazimo kot funkciji neke druge spremenljivke. Oglejmo si izpeljavo ustreznih enačb.

Cikloida



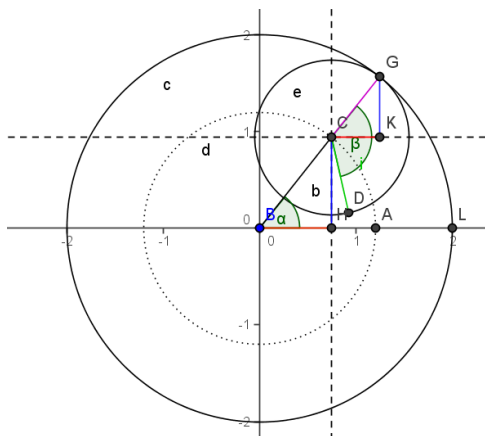
Slika 1: Skica nastanka cikloide

Krožnica s polmerom r in središčem S se kotali po zgornji strani osi x v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy . Na začetku je točka $Q(0,0)$ stičišče krožnice in osi x . Ko se krožnica zakotali za kot φ , ki ga merimo v radianih, točka Q preide v točko $T(x,y)$, novo dotikališče pa nastane v točki $N(r\varphi, 0)$. Tedaj dobimo, da ima točka T koordinate:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y = r(1 - \cos \varphi)$$

Pri opisu hipocikloide bomo uporabili oznake s skice 2. Postavimo koordinatno izhodišče v središče krožnic s polmerom R . To bo krožnica, po kateri se bo kotalila druga s polmerom r . Na drugi krožnici smo izbrali točko D in opisali njeno gibanje. Za začetek naj C leži na pozitivnem poltraku realne osi, D pa naj bo dotikališče obeh krožnic, ki sovпада z L . Po kratkem premisleku ugotovimo, da se bo središče druge krožnice gibalo po



Slika 2: Skica nastanka hipocikloide

krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom $(R - r)$. Ker imamo opravka s krožnicami, bomo vse opisovali s polarnimi koordinatami. Enačba točke C je torej

$$c = (R - r)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Opazimo, da bi nam koristilo, če bi prestavili koordinatno izhodišče v točko C. S premislekom ugotovimo, da se točka G, ki je dotikališče obeh krožnic v dani poziciji, giblje po krožnici s središčem v C in polmerom r . Ker sta osi novega koordinatnega središča vzporedni originalnima, je tudi kot med premico CG in osjo x enak α . Torej je njena enačba

$$g = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Ker se druga krožnica kotali po prvi, sta loka GD in GL enako dolga. Po formuli za krožni lok $l = r\alpha$ (če označujemo kote v radianih) izračunamo kot β med polmeroma CG in CD in dobimo $\beta = \frac{R\alpha}{r}$. Ker bomo razmerje $\frac{r}{R}$ potrebovali še kasneje, ga označimo z m .

Opazimo, da lahko D dobimo tako, da zavrtimo G okoli C za kot $-\beta$. To naredimo tako, da pomnožimo vektor G z vektorjem s kotom $-\beta$ in dolžino 1 in po Moirovi formuli dobimo:

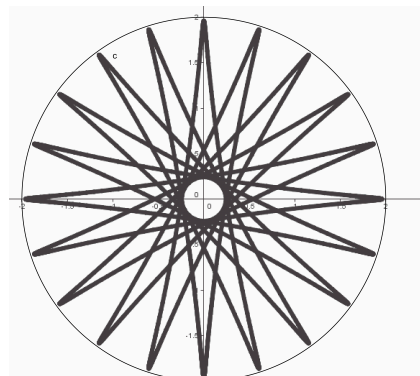
$$\begin{aligned} d &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos -\beta + i \sin -\beta) \\ &= r\left(\cos \alpha \left(1 - \frac{1}{m}\right) + i \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

Sedaj ugotovimo, da lahko seštejemo vektorja C glede na izhodišče in D glede na izhodišče v C in tako dobimo parametrično enačbo za D :

$$x = Rm \cos \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right) + R(1 - m) \cos \alpha$$

$$y = Rm \sin \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right) + R(1 - m) \sin \alpha$$

V tem izrazu nastopa parameter m , ki je enak razmerju med polmerom notranje in polmerom zunanje krožnice, torej je vedno manjši ali enak 1. Z izbiranjem različnih vrednosti tega parametra dobimo različne oblike hipocikloid.



Slika 3: Primer hipocikloide

Ko smo z računalniškim programom GeoGebra narisali nekaj hipocikloid pri različnih vrednostih parametra m , smo opazili, da je hipocikloida pri izbrani vrednosti m enaka hipocikloidi pri vrednosti $1 - m$. Ker se nam je to zdelo zelo zanimivo, smo se o stvari pozanimali in odkrili, da je ta ugotovitev že znana in se imenuje Izrek o dvojnem generiranju, katerega dokaz prepuščamo nadebudnemu bralcu.

Epicikloida

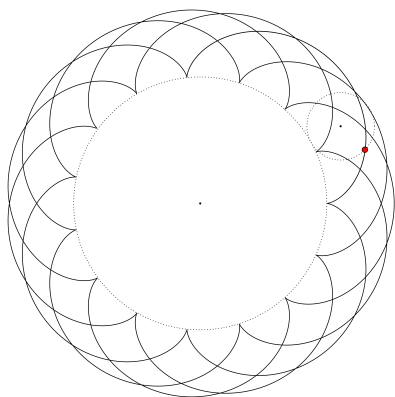
Izpeljava enačbe za epicikloido je zelo podobna, zato zapišimo le njeno končno parametrično obliko. Od enačbe za hipocikloido se razlikuje le v tem, da parameter m v njej nastopa z nasprotnim predznakom: $-m$.

$$x = -Rm \cos \left(\alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right) + R(1 + m) \cos \alpha$$

$$y = -Rm \sin \left(\alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right) + R(1 + m) \sin \alpha$$

Primeri

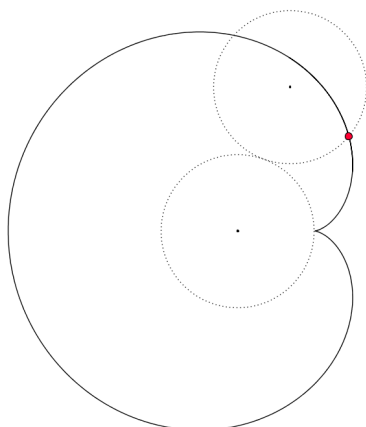
Nekatere vrednosti parametra m dajo še posebej znane in zanimive krivulje z značilnimi imeni. Omenimo samo dve:



Slika 4: Primer epicikloide

Kardioida

Kardioida ali srčnica je epicikloida z vrednostjo $m = 1$. To pomeni, da kardioida nastane kot pot točke na krožnici, ki jo kotalimo po zunanji strani druge krožnice z enakim radijem.



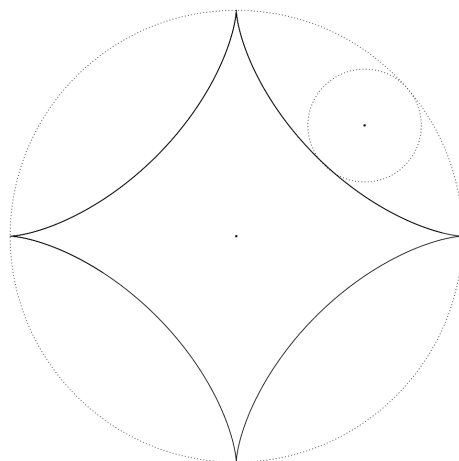
Slika 5: Kardioida

Asteroida

Asteroida je hipocikloida, ki jo dobimo pri vrednosti $m = \frac{1}{4}$ (ali $m = \frac{3}{4}$, kot pove Izrek o dvojnem generiranju). To krivuljo opiše točka na krožnici z radijem 1, ki se kotali po notranjosti krožnice z radijem 4. Zanja je med drugim značilno, da je dolžina medosnega odseka tangente na katerokoli točko krivulje enaka radiju večje krožnice.

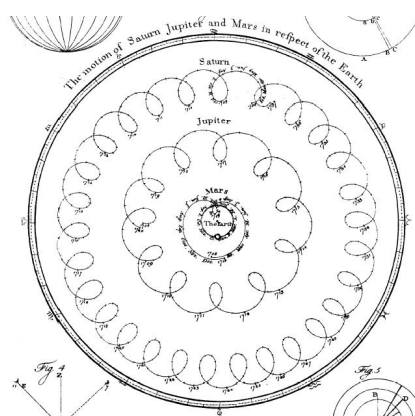
Zaključek

Mars je že v antiki pritegnil Grke, ki so opazili, da se ne giblje po ustaljenem krožnem tiru kakor so menili o gibanju zvezd. Z veliko truda so ugotovili,



Slika 6: Asteroida

da bi tiru Marsa utegnila ustrezati epicikloida.



Slika 7: Domnevne epicikloide planetov

Čeprav je trditev napačna, saj Zemlja ni središče vesolja, je bila ugotovitev vseeno velik dosežek za tedanje razmere, saj je gibanje zelo natančno opisala. Anton Pannekoek jo je v svoji knjigi History of Astronomy (Zgodovina astronomije) pripisal Ptolemeju in jo razglasil za največji dosežek antične astronomije.

Ko je stoletja kasneje postala splošno sprejeta in priznana Kopernikova domneva o heliocentričnem sistemu, se je potreba za opisovanje tirov planetov z epicikloidami zmanjšala, saj je bila na voljo boljša razlaga njihovega gibanja. Kmalu potem pa je danski astronom Olaus Roemer opazil, da so cikloidne krivulje uporabne tudi v mehaničnih napravah, zato so iznašli številne mehanske priprave za risanje cikloid, ki so jih s pridom uporabljali pri načrtovanju mehanskih konstrukcij.

Dandanes tovrstne krivulje hitro narišemo s ka-

terim od računalniških programov in mehanske priprave za risanje več zanimive za praktično uporabo. Čeprav se tega ponavadi ne zavedamo, pa nas cikloidne krivulje pogosto spremljajo v vsakdanjem življenju. Pomislimo samo na pot ventila na zračnici med vožnjo iz Ljubljane v Koper.

Nam pa je spoznavanje cikloidnih krivulj še posebej pomagalo. Ponoči lahko zdaj končno dobro spimo, čeprav naš dragi satelit kroži okoli Fobosa, saj vsak trenutek vemo, kje je. No, vsaj približno toliko natančno kot stari Grki ...

Stožnice v taksi razdalji

Amela Rakanović, Boris Mitrović, Dominik Šurc, Katja Berčič (mentor)

Izhodiščni problem

Sonda na površju Marsa ima omejeno zalogo goriva. Zaradi pokvarjenega krmiljenja se lahko premika le v smereh sever-jug ali vzhod-zahod. Katere točke na zemljevidu lahko doseže, če se mora nato vrniti v bazo?

Ideja za rešitev

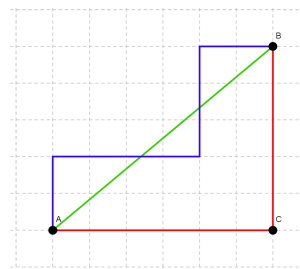
V geometriji pri merjenju razdalj ponavadi uporabljamo evklidsko razdaljo, vendar v vsakdanjem življenju pogosto razmišljamo tudi o takoimenovani *taksi razdalji*. Predstavljajmo si veliko mesto, v katerem so vse ulice ravne in se sekajo le pravokotno. Dva prijatelja, bogat in malo manj premožen, morata priti na nasprotni konec mesta. Bogataš se bo usedel v helikopter, navaden smrtnik pa se bo moral s taksijem peljati po ulicah. Razdalja med izbranimi točkama je zanj različna. Bogataš bo po zračni črti prepotoval evklidsko razdaljo med dvema točkama, *taksi razdalja* pa je tista, ki meri dolžino najkrajše poti, kot jo bo prepotoval njegov prijatelj. Slednja pot bo seveda daljša, zanimivo pa je, da je zanj na voljo več enako dobrih možnosti.

Na sliki po zeleni črti potuje helikopter. Očitno je, da so vse modre in rdeče poti enako dolge, v nadaljevanju pa bomo dokazali, da je rdeča pot res najkrajša možna.

Oglejmo si poljubno pot našega taksija med točkama. Vsota dolžin vseh vodoravnih daljic gotovo ni manjša od dolžine daljice AC. Prav tako ugotovimo, da vsota vseh navpičnih daljic ni manjša od

Viri

1. Marko Razpet: *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma, DMFA, Ljubljana, 1998.
2. Eli Maor: *Trigonometric delights*, Princeton University press, 1998.



Slika 1: Pot helikopterja in možne poti taksija

dolžine daljice CB. Dolžina najkrajše poti za taksi med točkama A in B je torej enaka $|AC| + |CB|$.

Aktualizirajmo problem: na začetku omenjena naloga je nekoliko drugačna, saj imamo omejen prostor (zaradi goriva). Zato hočemo poiskati vse točke, ki so enako oddaljene od mesta, kjer je pristala sonda. V evklidski geometriji vemo, da je to krožnica, v taksi geometriji pa oblika množice točk, ki jih sonda lahko doseže, ni tako očitna.

Rešitev

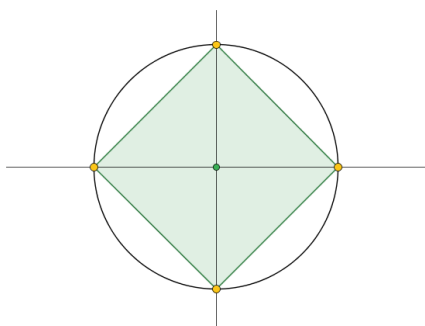
Če se hoče sonda vrniti na prvotno točko, ne sme izstopiti iz določenega območja. Vzemimo, da je začetna točka koordinatno izhodišče. Glede na to, da ima sonda goriva za 10 kilometrov, se od baze lahko oddalji za največ 5 kilometrov.

Najprej narišimo štiri točke, ki jih lahko dosežemo, če se premikamo samo naravnost. Dve ležita na abscisi, dve na ordinati, vse pa so od izhodišča oddaljene za 5 kilometrov (tu se evklidska in taksi

razdalja ujemata). Poskusimo najti še ostale točke. Premaknimo se za razdaljo x po abscisi. Zanima nas, kako daleč se lahko premaknemo navzgor ali navzdol. Goriva za eno smer imamo za 5 km, kar pomeni, da je $|x|+|y| = 5$. Rešimo enačbo in dobimo:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{za } x, y > 0, \\ x - 5 & \text{za } x > 0, y \leq 0, \\ -x - 5 & \text{za } x, y \leq 0, \\ x + 5 & \text{za } x \leq 0, y > 0. \end{cases}$$

Ko vse štiri daljice narišemo, je pred nami rob kvadrata. To je končna slika naše taksi krožnice – krožnice v *taksi razdalji*.



Slika 2: Krožnica v taksi razdalji

Kaj sploh je taksi razdalja?

V ravnini izberimo točki A s koordinatama (x_1, y_1) in B s koordinatama (x_2, y_2) . Taksi razdaljo med njima definiramo z izrazom

$$d_T(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Ta izraz opiše dolžino najkrajše poti med dvema točkama v ravnini, če lahko od ene do druge točke potujemo le kot taksist po pravokotnih ulicah: le v vodoravni in navpični smeri, ne pa poševno.

Hitro se lahko prepričamo, da ima taksi razdalja naslednje lastnosti:

- Taksi razdalja med poljubnima različnima točkama je vedno pozitivna.
- Taksi razdalja med točkama je enaka nič natančno tedaj, ko točki sovpadata.
- Taksi razdalja je simetrična: $d_T(A, B) = d_T(B, A)$,
- Taksi razdalja zadošča trikotniški neenakosti: $d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$.

Stožnice v taksi razdalji

Stožnice so krivulje, ki jih dobimo kot množico rešitev kvadratne enačbe z dvema neznankama. Lahko jih definiramo geometrijsko z uporabo pojma razdalja: krožnica je naprimer množica vseh točk v ravnini, ki so od izbranega središča enako oddaljene. Če razdaljo merimo evklidsko, lahko vsako krožnico opišemo z znano enačbo $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

Stožnice pa lahko definiramo tudi kot dvorazsežne presečne krivulje, ki nastanejo, če preseka mo krožni stožec z ravnino. V evklidski geometriji sta obe definiciji ekvivalentni, v taksi geometriji pa se definiciji razlikujeta, zato bomo uporabljali prvo definicijo.

Elipsa

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere velja, da je vsota njihovih razdalj do dveh izbranih točk – gorišč enaka izbrani konstanti. Običajno elipso seveda poznamo. Kakšna pa je ta množica v taksi geometriji? Odgovor na to vprašanje bo hkrati tudi odgovor na našo začetno nalogo o točkah, ki ji lahko obišče sonda, če začne v gorišču G in konča v gorišču H .

Premislimo najprej za točke, ki ležijo levo od gorišča G , in pogledajmo, kakšna je skupna razdalja s . Če je A najbolj skrajna točka, do katere lahko pridemo, bo sonda prepotovala razdaljo $d_T(G, A) + d_T(A, H)$. Opazimo, da je

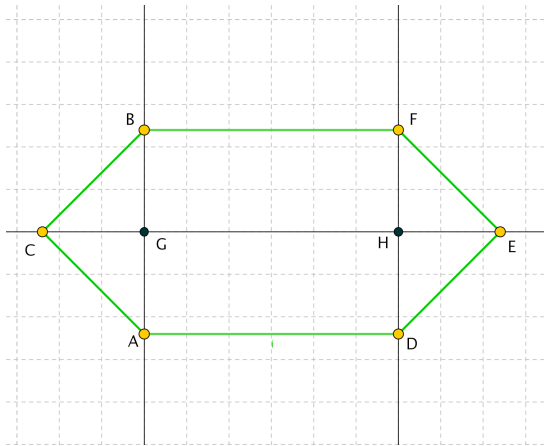
$$d_T(H, A) = d_T(G, H) + d_T(G, A),$$

pri čemer je $d_T(G, H)$ kar $|GH|$. Skupna razdalja s je torej enaka $2d_T(G, A) + |GH|$ in za tako točko A velja $d_T(G, A) = \frac{s-|GH|}{2}$. Levo od gorišča G zato vse skrajne točke ležijo na taksi polkrožnici (dveh pravokotnih daljicah) s polmerom $\frac{s-|GH|}{2}$. Na desni strani velja podobno.

Za točke med G in H mora sonda prepotovati razdaljo $|GH|$, lahko pa se premakne tudi največ za razdaljo $\frac{s-|GH|}{2}$ navzgor ali navzdol. Tako sestavimo končno sliko taksi elipse.

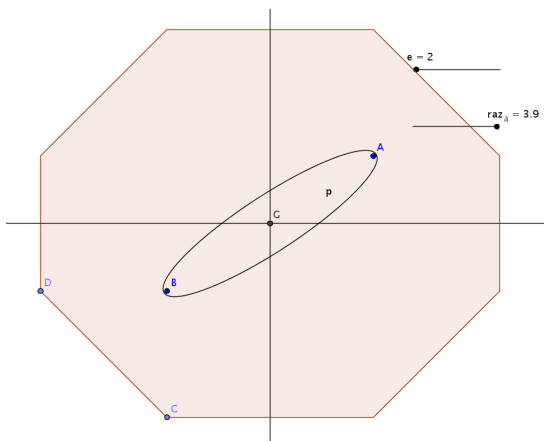
Splošen primer elipse

Gorišči ležita na premici, ki ni vzporedna nobeni od koordinatnih osi, zato je taksi razdalja med go-



Slika 3: Taksi elipsa z goriščema na vodoravni premici

riščema $d_T(G, H) = |GA| + |AH|$. Ločimo primere, ko so točke po x ali y osi med goriščema in ko so točke v kotih. Z enakim sklepom kot pri posebnem primeru pridemo do končne slike elipse.



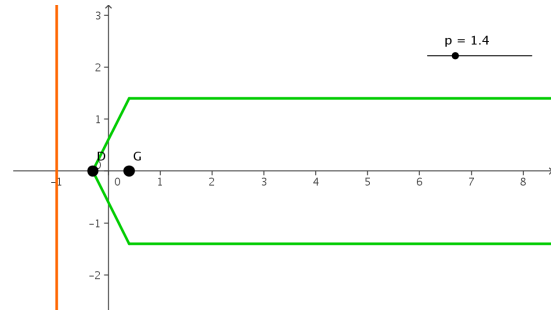
Slika 4: Taksi elipsa s splošno lego gorišč

Parabola

Parabola je množica točk v ravnini, za katere velja, da so enako oddaljene od gorišča in premice vodnice. V tej definiciji lahko namesto evklidske zopet uporabimo taksi razdaljo. Za enostavnejši razmislek vzemimo, da je vodnica vzporedna ordinati. Razdaljo med premico in goriščem označimo s p . Najprej poiščemo točko, ki leži na razpolovišču daljice med premico in goriščem. Nato določimo točki, ki sta za p oddaljeni od premice in gorišča. Za točke levo od gorišča velja enačba $x = p - x + |y|$. Če izrazimo y , dobimo enačbi dveh premic

$$\begin{aligned} y &= 2x - p, \\ y &= -2x + p. \end{aligned}$$

Za točke desno od gorišča velja enačba $x = x - p + |y|$, če izrazimo y , pa dobimo enačbo $|y| = p$. Če vodnica ni vzporedna nobeni od koordinatnih osi, je računanje razdalje med premico in goriščem odvisno od naklona premice.



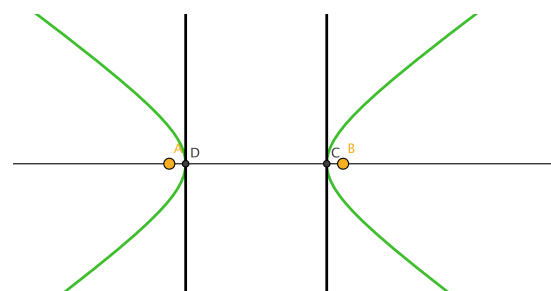
Slika 5: Primer taksi parabole

Hiperbola

Hiperbola z goriščema G in H in veliko polosjo a je množica točk v ravnini, za katere je razlika razdalj do gorišč (vedno odštevamo manjšo razdaljo od večje) enaka $2a$. Če izberemo gorišči na abscisni osi, ki sta za e oddaljeni od izhodišča, za točke na taksi hiperboli med gorišči velja enačba

$$(|e + x| + |y|) - (|e - x| + |y|) = 2a$$

Ko enačbo poenostavimo, dobimo $|x| = a$, kar pomeni, da ta del hiperbole sestavljata dve navpični premici. Za točke na preostalem območju pa se lahko hitro prepričamo, da ustrezna enačbanima rešitev.



Slika 6: Enostaven primer taksi hiperbole

Splošen primer hiperbole

Denimo, da gorišči ne ležita na skupni vodoravni premici: $A(-e, -f)$, $B(e, f)$. Podobno kot v prejšnjih primerih obravnavamo rešitve enakosti

$$|d_T(T, A) - d_T(T, B)| = 2a.$$

Za točke med goriščema na naši sliki denimo velja enačba

$$|(e + x + f + y) - (e - x + f - y)| = 2a,$$

kar se poenostavi v $y = a - x$ in $y = -x - a$. Na osnovi zgornjih primerov lahko bralec zlahka premisli, da je spodaj res slika hiperbole v taksi razdalji. Skozi točko T potegnemo vzporednico abscisi. Da točke desno od gorišč na tej premici ustrezajo pogojem preverimo z računom:

$$d_T(G, A) = d_T(G, T) + d_T(T, A)$$

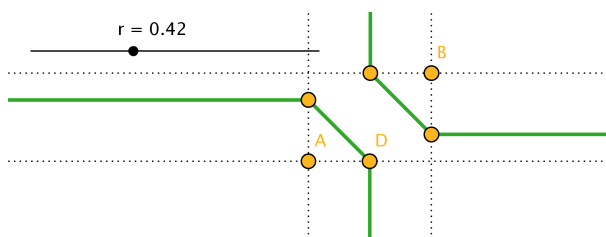
$$d_T(H, A) = d_T(H, T) + d_T(T, A)$$

Razlika je torej kar

$$d_T(G, A) - d_T(H, A) = d_T(G, T) + d_T(T, A) - d_T(H, T) - d_T(T, A)$$

$$d_T(G, T) - d_T(H, T) = 2a$$

Bralec lahko brez težav preveri, da so to tudi vse take točke. Podobno sklepamo na ostalih straneh.



Slika 7: Splošen primer taksi hiperbole

Zaključek

Pojem razdalje ni vedno tisto, kar si človek predstavlja. Tako mora ob besedni zvezi taksi razdalja spremeniti način razmišljanja, saj znani geometrijski pojmi z drugačno definicijo spremenijo svojo obliko. Določili smo vse stožnice in računsko dokazali, da naše domneve držijo. Ob tem se hitro pojavijo ideje za nadaljnje raziskovanje. Denimo, da stožec prenesemo v taksi geometrijo; dobimo štiri-strano piramido. Kakšne so potem njene presečne ravnine? Ali pa vzemimo krivulje višjih redov in poiščimo njihove ustreznice v taksi geometriji. Prostora za raziskovanje je veliko, zato se zavedamo, da smo s tem projektom raziskali zgolj osnove taksi geometrije.

Viri

1. Taxicab geometry. Online na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry
2. Richard Laatsch: Pyramidal sections in Taxicab Geometry, Mathematics Magazine, vol. 55. no. 4, september 1982

Bezierjeve krivulje

Polona Durcik, David Kraljič, Aljaž Zalar, Uroš Kuzman (mentor)

Uvod

Sonda na Marsu raziskuje površje prekrito s kraterji. Želimo, da se jim sonda na svoji poti izogne, zato iščemo elegantno pot med njimi, predstavljeno s čim manj podatki.

Običajno podajamo krivulje v parametrični obliki ali kot graf funkcije, francoska avtomobilska inženirja Bezier in Casteljau pa sta se sredi dvajsetega stoletja lotila ponazoritve krivulj s podajanjem kontrolnih točk.

Tako dobljene krivulje se imenujejo Bezierjeve krivulje, algoritem za njihov izračun pa se imenuje Casteljaujev algoritem.

Bezierjeve krivulje

Kvadratne Bezierjeve krivulje

Konstruirajmo krivuljo, ki se začne in konča v izbranih točkah A in C , pri konstrukciji pa bomo uporabili še vmesno kontrolno točko B . Na daljico AB postavimo točko A' in na daljico BC točko B' tako, da bo

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = t.$$

Točka A' je torej podana z

$$A'(t) = A + t(B - A),$$

točka B' pa z

$$B'(t) = B + t(C - B),$$

pri nekem t , $0 \leq t \leq 1$. Nato na daljici $A'B'$ določimo točko T , tako da bo

$$\frac{A'T}{A'B'} = t,$$

pri istem izboru parametra t .

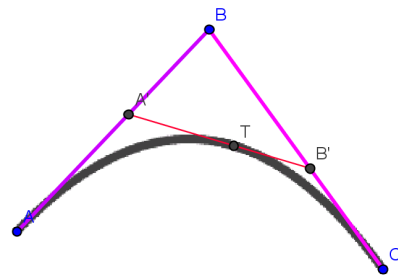
Točka T sedaj zarisuje krivuljo v odvisnosti od parametra t . Ugotovimo

$$T(t) = A' + t(B' - A').$$

Če torej $T(t)$ izrazimo z začetnimi točkami dobimo

$$\begin{aligned} T(t) &= A + t(B - A) + t((B + t(C - B)) - (A + t(B - A))) \\ &= A + t(2B - 2A) + t^2(C - 2B + A), \end{aligned}$$

kar je parametrizacija **kvadratne Bezierjeve krivulje**.



Slika 1: Konstrukcija kvadratne Bezierjeve krivulje

Očitno je, da pri vrednosti parametra $t = 0$ dobimo točko A , pri vrednosti parametra $t = 1$ pa točko C , kar pomeni, da se krivulja začne oziroma konča v omenjenih točkah. Če **odvajamo** parametrizacijo dobljene krivulje, dobimo

$$T'(t) = B - 2A + 2t(C - 2B + A).$$

Pri robnih vrednostih parametra t dobimo

$$T'(0) = 2(B - A),$$

$$T'(1) = 2(C - B).$$

Opazimo torej, da je smer tangente na krivuljo v začetni oziroma končni točki, odvisna le od sosednje kontrolne točke.

Kubične Bezierjeve krivulje

Sedaj izberimo začetno točko A , končno točko D in še dve vmesni kontrolni točki B in C . Na daljicah AB , BC in CD zaporedoma izberemo točke A' , B' in C' , tako da je

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CD} = t,$$

pri nekem t , $0 \leq t \leq 1$. Nato na daljicah $A'B'$ in $B'C'$ izberemo točki A'' in B'' , da velja

$$\frac{A'A''}{A'B'} = \frac{B'B''}{B'C'} = t,$$

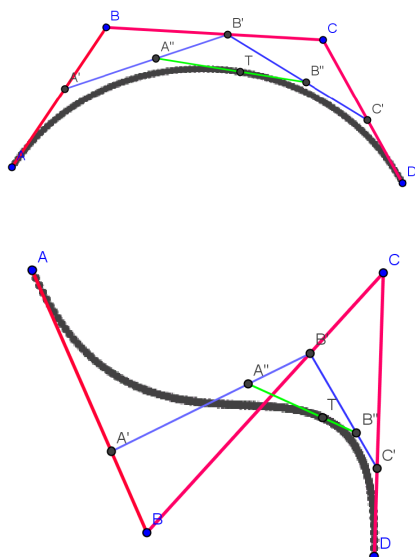
pri isti vrednosti parametra t . Sedaj na daljici $A''B''$ izberemo še točko T , za katero naj velja

$$\frac{A''T}{A''B''} = t,$$

pri izbrani vrednosti t . S podobnim izračunom kot v prejšnjem razdelku dobimo parametrično izrazitev krivulje v odvisnosti od štirih izbranih točk

$$T(t) = A + t(3B - 3A) + t^2(3C - 6B + 3A) + t^3(D - 3C + 3B - A),$$

kar je parametrizacija **kubične Bezierjeve krivulje**.



Slika 2: Konstrukcija kubične Bezierjeve krivulje

Spet opazimo, da velja

$$T'(0) = 3(B - A)$$

$$T'(1) = 3(D - C),$$

kar nam potrdi podobno lastnost kot pri kvadratnih krivuljah.

Bernsteinovi polinomi in Bezierjeve krivulje višjega reda

Zapis Bezierjevih krivulj višjega reda

V primerih prejšnjih razdelkov smo opazili, da je

število kontrolnih točk za eno večje od reda Bezierjeve krivulje, ki jo dobimo s Casteljaujevim algoritmom. Sedaj bi želeli parametrično obliko Bezierjeve krivulje reda n , v odvisnosti od $n + 1$ izbranih točk, zapisati za splošno naravno število $n \geq 2$.

Razvijmo izraz

$$(t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}.$$

Posamezne člene tega razvoja imenujemo Bernsteinovi polinomi, ki jih označimo z $J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$. Za njih veljajo naslednje lastnosti:

Lastnost vsote:

$$J_{n,0}(t) + J_{n,1}(t) + J_{n,2}(t) + \dots + J_{n,n-1}(t) + J_{n,n}(t) = 1.$$

Nenegativnost:

$$J_{n,i}(t) \geq 0 \text{ za } 0 \leq t \leq 1.$$

Baza:

$J_{n,0}(t), J_{n,1}(t), \dots, J_{n,n-1}(t), J_{n,n}(t)$ tvorijo bazo polinomov stopnje največ n . (Standardna baza je $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$.)

Zapis Bezierjeve krivulje, podane z $n + 1$ kontrolnimi točkami P_0, P_1, \dots, P_n , lahko razvijemo po bazi Bernsteinovih polinomov in dobimo splošen zapis parametrizacije v odvisnosti od kontrolnih točk

$$P(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i} P_i; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sedaj si oglejmo dokaz zgornje domneve o predstavitvi krivulj reda n , ki jih dobimo z Casteljaujevim algoritmom, z Bernsteinovimi polinomi. Pri dokazovanju bomo uporabili indukcijo, zato si najprej oglejmo primer, ko je $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + (1 - t)^2 P_2 \\ &= P_2 + t(2P_1 + 2P_2) + t^2(P_0 - 2P_1 + P_2), \end{aligned}$$

kar je ravno kvadratna Bezierjeva krivulja iz prvega razdelka s kontrolnimi točkami P_2, P_1 in P_0 .

Sedaj predpostavimo, da zapis velja za krivuljo podano z n kontrolnimi točkami. Ali lahko sklepamo, da je zapis analogen tudi pri krivuljah določenih z $n + 1$ točkami. Izberimo $n + 1$ kontrolnih točk in jih označimo s P_0, P_1, \dots, P_n . Z enim korakom al-

goritma dobimo n točk $P'_0(t), P'_1(t), \dots, P'_n(t)$. Zanje veljajo enakosti

$$P'_i(t) = (1-t)P_i + tP_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Po indukcijski predpostavki lahko uporabimo zapis Bezierjeve krivulje na novih n točkah

$$P(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i} P'_i = (1-t)^n P'_0 + \binom{n}{1} t(1-t)^{n-1} P'_1 + \dots + t^n P'_n.$$

Če sedaj točke P'_0, P'_1, \dots, P'_n izrazimo z originalnimi kontrolnimi točkami in upoštevamo, da je

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1},$$

lahko zaključimo, da velja

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n+1} J_{n+1,i} P_i.$$

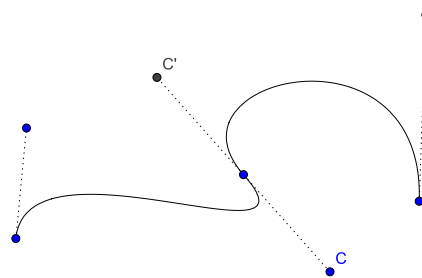
Zlepki Bezierjevih krivulj

V praksi pogosto želimo najti krivulje zelo zapletenih oblik. Opazno je, da je število zavojev posamezne krivulje povezano z njenim redom. Vendar pa je krivulje visokega reda težko nadzorovati s kontrolnimi točkami, saj je odvisnost med obliko krivulje in njenimi kontrolnimi točkami zelo nestabilna. To pomeni, da lahko majhna sprememba pozicije kontrolne točke povzroči zelo opazno spremembo oblike krivulje. Zato v praksi krivulje zapletenih oblik zlepimo iz večih krivulj nižjih redov, predvsem kubičnih.

Dve krivulji združimo tako, da je končno točko prve krivulje ponovimo kot začetno točko druge krivulje. Vendar pa želimo, da je zlepek med dvema krivuljama gladek, kar pomeni, da se tangenti krivulj v končni točki prve krivulje in začetni točki druge krivulje ujemata. Ugotovili smo, da je smeri vektor tangente v končni in začetni točki krivulje enak vektorju razlike med robno točko in sosednjo kontrolno točko. Torej moramo na podlagi končne

točke in njej sosedne kontrolne točke prve krivulje izbrati še prvo prosto kontrolno točko druge krivulje. To storimo tako, da predzadnjo točko prve krivulje prezrcalimo preko stičišča in njeno sliko uporabimo kot drugo kontrolno točko druge krivulje. Tako bo dobljeni zlepek gladek.

Zaključek



Slika 3: Konstrukcija zleпка z »gladkim prehodom«.

Bezierjeve krivulje se dandanes največ uporabljajo v računalniški grafiki. Namesto da krivuljo, ki naj se zariše na enkranu, opišemo z vsako točko posebej, enostavno izberemo poljubne točke, med katerimi se izriše krivulja. To je uporabno predvsem v programih za vektorsko grafiko in tudi računalniške pisave so oblikovane po principu Bezierjevih krivulj.

Viri

1. Michael Hvidsten: *Geometry with geometry explorer*. McGraw-Hill, New York, first edition, 2005, ISBN 0-07-294863-9.
2. Kirby A. Baker: *Cubic Bezier Curves*. [online] http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.02w/handouts/bb_bezier.pdf

Optimalna dostava goriva in Fermatova točka

Peter Koželj, Matej Drame, Nino Bašič (mentor)

Problem

Sonde so pristale na Marsu. Uporabljajo predelan hiper-antimaterijski pogon, ki pa kljub izredni zmogljivosti potrebuje polnjenje vsakih nekaj mesecev zaradi sondine energijske požrešnosti. Ker se sonde pri svojem delovanju zelo razpršijo po površju Marsa, je potrebno vedno znova poiskati lokacijo za pristanek posebne polnilne postaje. S stališča učinkovitosti mora biti ta lokacija postavljena tako, da bodo sonde skupno prevozile najkrajšo pot, da pridejo do polnilne postaje. V članku predstavljamo geometrijske rešitve tega problema za tri in za štiri sonde.

Uvod

Problema se bomo lotili geometrijsko. Vsako sondo bomo predstavili s po eno točko (velikost sond je zanemarljiva v primerjavi z njihovo medsebojno razdaljo). Rešitev naloge je točka, pri kateri je vsota vseh razdalj od sond do te točke minimalna. Če imamo opraviti s samo eno ali dvema sondama je rešitev očitna. Najbolj zanimiva je situacija, ko so sonde tri ali pa štiri. Če jih je več, geometrijska konstrukcija take točke ni več mogoča. V tem primeru si moramo pomagati z numeričnimi metodami, s katerimi lahko izračunamo poljubno dober približek.

Tri sonde

Če imamo v ravnini tri točke, so lahko te kolinearne (tu je rešitev očitna), lahko so oglišča trikotnika v katerem so vsi koti manjši od 120° , ali pa so oglišča trikotnika v katerem eden kot meri 120° ali več. Pokazali bomo, da je v trikotniku, kjer so vsi koti manjši od 120° rešitev Fermatova točka. Če kateri od kotov meri več kot 120° , potem je iskana točka oglišče trikotnika pri tem kotu. (Bralec naj s premislekom sam ugotovi, zakaj to drži.)

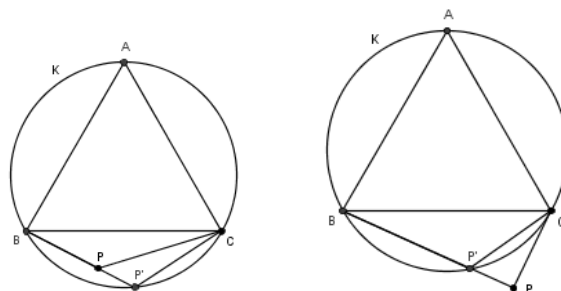
Fermatova točka

Izrek 1 Naj bo $\sphericalangle ABC$ enakostranični trikotnik in \mathcal{K} njemu očrtana krožnica. Naj leži točka P na nasprotni strani premice skozi B in C kot točka A . Potem je

$\sphericalangle BPC = 120^\circ$ natanko takrat, ko P leži na \mathcal{K} .

Dokaz. Naj bo $P \in \mathcal{K}$. Ker je $ABPC$ tetivni štirikotnik, je $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CPB = 180^\circ$ in ker je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, je $\sphericalangle CPB = 120^\circ$. Dokažimo izrek še v drugo smer. Predpostavimo, da $\sphericalangle CPB = 120^\circ$. S protislovjem bomo dokazali, da mora P v tem primeru ležati na krožnici.

Če P ne leži na krožnici \mathcal{K} , potem nosilka daljice BP seka krožnico \mathcal{K} v točki P' . Ker P' leži na krožnici, sledi, da je $\sphericalangle CP'B = 120^\circ$ in da je nosilka daljice $P'C$ vzporedna s PC , kar pa očitno ne more držati.

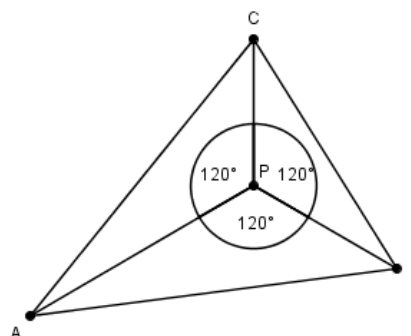


Slika 1: K dokazu izreka 1

Definicija. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik, v katerem so vsi notranji koti manjši od 120° . Točko P , za katero velja

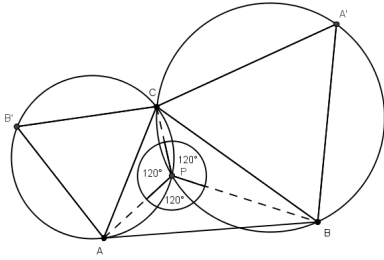
$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$$

imenujemo **Fermatova točka**.



Slika 2: Definicija Fermatove točke

Izrek 2 Fermatova točka obstaja in je ena sama.



Slika 3: K dokazu izreka 2

Dokaz. Nad stranicami $\triangle ABC$ konstruirajmo enakostranične trikotnike $\triangle AC'B$, $\triangle BA'C$ in $\triangle ACB'$, ki ležijo zunaj $\triangle ABC$. Naj bo P od C različno presečišče trikotnikoma $\triangle ACB'$ in $\triangle BA'C$ očiščenih krožnic. Ker je $APCB'$ tetivni štirikotnik, velja $\sphericalangle AB'C + \sphericalangle CPA = 180^\circ$. Vemo, da je $\sphericalangle AB'C = 60^\circ$ (enakostranični trikotnik), torej je $\sphericalangle CPA = 120^\circ$. Podobno dobimo še $\sphericalangle BPC = 120^\circ$. Ker je $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA = 360^\circ$ sledi $\sphericalangle APB = 120^\circ$. Pokazali smo, da Fermatova točka obstaja in kako jo skonstruiramo.

Sedaj bomo pokazali, da obstaja natanko ena Fermatova točka. Denimo, da poleg P obstaja še Q , ki je tudi Fermatova točka. Po izreku [tetivni] mora ležati na trikotniku $\triangle ACB'$ očiščeni krožnici in hkrati na trikotniku $\triangle BA'C$ očiščeni krožnici. Iz tega sledi, da Q leži na presečišču teh dveh krožnic, ki ni enako C . Torej je $Q = P$.

Izrek 3 Dan naj bo trikotnik $\triangle ABC$, v katerem so vsi koti manjši od 120° . Fermatova točka ima najmanjšo vsoto razdalj do oglišč $\triangle ABC$.

Dokaz. V trikotniku $\triangle ABC$ so vsi koti manjši od 120° . Izberemo si poljubno točko Q in jo povežemo z vsemi oglišči trikotnika $\triangle ABC$. Na stranici AB skonstruiramo enakostranični trikotnik $\triangle A'BA$. Nato trikotnik $\triangle ABQ$ zavrtimo za 60° v pozitivni smeri okoli točke B . Pri tem se A preslika v A' in Q v Q' . Vrtež ohranja razdalje, torej je $|AQ| = |A'Q'|$ in $|QB| = |Q'B|$. Dokažimo še, da je $|QB| = |QQ'|$.

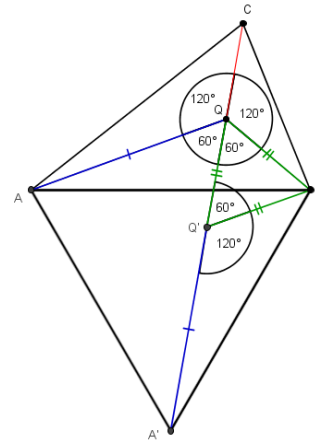
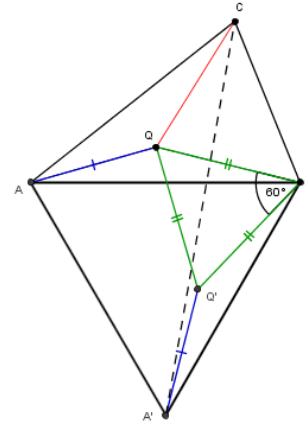
$$\sphericalangle ABQ' = \sphericalangle ABA' - \sphericalangle Q'BA'$$

Izrazimo:

$$\sphericalangle Q'BA' = \sphericalangle ABA' - \sphericalangle ABQ' = 60^\circ - \sphericalangle ABQ'$$

Ugotovimo še:

$$\sphericalangle QBQ' = \sphericalangle QBA + \sphericalangle ABQ'$$



Slika 4: K dokazu izreka 3

Ker je $\sphericalangle QBA = \sphericalangle Q'BA'$, lahko $\sphericalangle QBA$ nadomestimo z $60^\circ - \sphericalangle ABQ'$:

$$\sphericalangle QBQ' = 60^\circ - \sphericalangle ABQ' + \sphericalangle ABQ' = 60^\circ$$

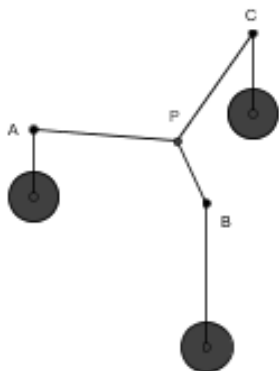
Ker kot $\sphericalangle QBQ' = 60^\circ$ oklepata skladni daljici QB in $Q'B$, sledi da je $\triangle Q'BQ$ enakostraničen in $|QB| = |QQ'|$.

Iz tega sledi $|CQ| + |AQ| + |BQ| = |CQ| + |A'Q'| + |QQ'|$. Vsota teh razdalj je najmanjša, kadar točki Q in Q' ležita na daljici CA' .

Dokažimo, da se to zgodi, če za Q vzamemo Fermatovo točko. Takrat so koti $\sphericalangle CQA = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQB = 120^\circ$. Sledi $\sphericalangle A'Q'B = 120^\circ$. Prej smo dokazali, da sta $\sphericalangle BQ'Q$ in $\sphericalangle Q'QB$ velika 60° . Sledi $\sphericalangle Q'QC = \sphericalangle A'Q'Q = 180^\circ$, torej ležita točki Q in Q' na daljici CA' .

S tem smo dokazali, da ima Fermatova točka najmanjšo vsoto razdalj do oglišč trikotnika.

Fizikalni pristop



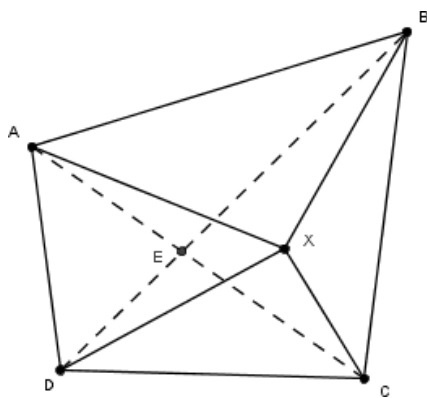
Slika 5: Fizikalna rešitev

Slika 5 prikazuje fizikalno napravo s tremi škripci, ki predstavljajo točke trikotnika. Preko njih so napeljane vrvice s tremi enako težkimi utežmi, vse vrvice pa so spete v vozle na sredini. Ker sistem uteži teži k temu, da bi imel čim manjšo potencialno energijo, se uteži postavijo tako, da je vsota dolžin vrvic med škripci in utežmi čim večja. Torej je dolžina preostale vrvi najkrajša možna. Vozel se tako postavi v Fermatovo točko.

Štiri ali več sond

Primeri, kjer tri ali pa vse štiri sonde ležijo na isti premici so očitni. Razmisliti je treba le še primer, ko tvorijo točke konveksni štirikotnik in pa primer, ko ena od točk leži v notranjosti trikotnika ki ga tvorijo ostale tri točke. (Slednji primer puščamo v razmislek bralcu.)

Izrek 4 *Točka z najmanjšo vsoto razdalj do oglišč štirikotnika leži na presečišču diagonal tega štirikotnika.*



Slika 6: K dokazu izreka 4

Dokaz. Vzemimo poljuben štirikotnik ABCD in poljubno točko X. Povežimo točko X z vsemi oglišči štirikotnika ABCD. Iz trikotniške neenakosti sledi

$$|BX| + |XD| \geq |BD| \quad \text{in} \quad |AX| + |XC| \geq |AC|$$

Seštejmo neenačbi:

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geq |BD| + |AC|$$

Zanima nas torej najmanjša vrednost izraza $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$. Iz prejšnje neenačbe sledi, da je najmanjša vrednost tega izraza ravno $|BD| + |AC|$. Torej točka z najmanjšo vsoto razdalj leži na presečišču diagonal.

Pri večjem številu točk eksaktna rešitev problema v splošnem ni znana, lahko pa jo konstruiramo iterativno. Naj bodo x_1, x_2, \dots, x_m točke v ravnini, kjer je $x_i \in \mathbb{R}^2$. S pomočjo enačbe

$$y_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{x_j}{|x_j - y_i|} \right) / \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{|x_j - y_i|} \right)$$

dobimo vedno boljši približek prave rešitve.

Viri

1. Petković, M. (1988). Zanimljivi matematički problemi. Beograd: Naučna knjiga
2. Geometric median. Online. Citirano 30. avgusta 2007 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_median