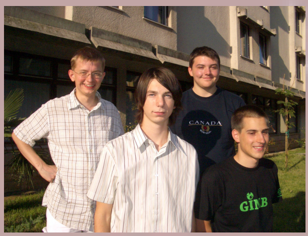
MARSovski projekti

Priprava MARSovskih projektov je glavna naloga MARSovskih raziskovalcev. Dijaki o izbrani temi s pomočjo izhodiščnih vprašanj in literature napišejo krajši članek in izdelajo interaktivni spletni model, ki ga objavijo na spletni strani. Projekte v živo predstavijo na zaključni prireditvi.

2006

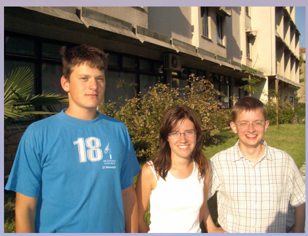


Prvi koraki v sferični geometriji

Miha Čančula, Postojna
Tilen Marc, Vipava
Dejan Širaj, Rakek
Boštjan Kuzman, Ljubljana (mentor)

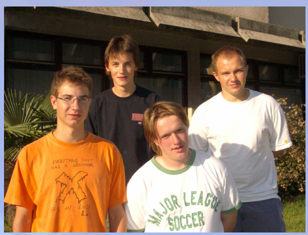
Košarka, zaporniki in teorija iger

Maja Alif, Celje
Nino Bašič, Ljubljana
Maja Poklinek, Vuzenica
Katja Berčič, Ljubljana (mentor)



Finančna perspektiva podjetja Mars

Amela Rakanović, Sežana
Ervin Strmčnik, Velenje
Boštjan Kuzman, Ljubljana (mentor)



Buffonova igla

Primož Koželj, Ljubljana
Nejc Rosenstein, Celje
David Kraljič, Velenje
Uroš Kuzman, Velenje (mentor)

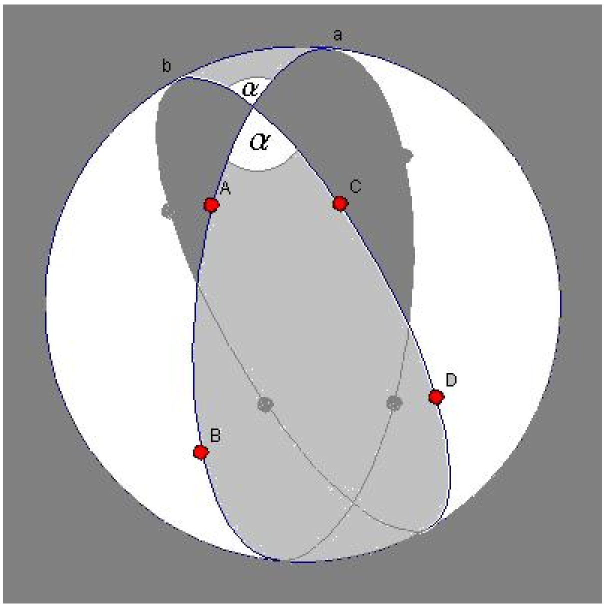
Met košarkarske žoge

Anže Starič, Velike Lašče
Dominik Šurc, Solkan
Tomo Umer, Koper
Uroš Kuzman, Velenje (mentor)

Prvi koraki v sferični geometriji

Miha Čančula, Tilen Marc, Dejan Širaj, Boštjan Kuzman (mentor)

Kadar govorimo o geometriji, najprej pomislimo na ravninsko geometrijo. Zdi se nam povsem naravno, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka 180°. Pogosto pa se zgodi, da nam takšno razmišljanje ne zadostuje, ker se problemi ne pojavljajo na ravnini, temveč na površini krogle – sferi. Takrat potrebujemo drugačno, sferično geometrijo, v kateri je vsota notranjih kotov v trikotniku lahko večja od 180°. Znanje te veje geometrije je nepogrešljivo predvsem v kartografiji, geodeziji, navigaciji in astronomiji. V naslednjih vrsticah bomo skušali predstaviti nekaj najbolj osnovnih pojmov in zvez v sferični geometriji.



Na sfero lahko narišemo krožnice različnih velikosti, njihov polmer pa je navzgor omejen s polmerom sfere. Največjim krožnicam, ki jih lahko narišemo na sfero, pravimo glavne krožnice. Dobimo jih tako, da sfero presekamo z ravnino, ki gre skozi središče sfere.

Trikotniku na sferi, katerega stranice potekajo po glavnih krožnicah, pravimo sferični trikotnik. Stranice sferičnega trikotnika so zato krožni loki. Kot med dvema stranicama takšnega trikotnika je kot med tangentama na ti dve stranici skozi njuno presečišče (oglišče trikotnika). Za lažje računanje bomo vse kote podajali v radianih.

Med vsoto notranjih kotov in ploščino sferičnega trikotnika velja prav presenetljiva odvisnost, o kateri v ravninski geometriji ni niti sledu. Velja namreč izrek:

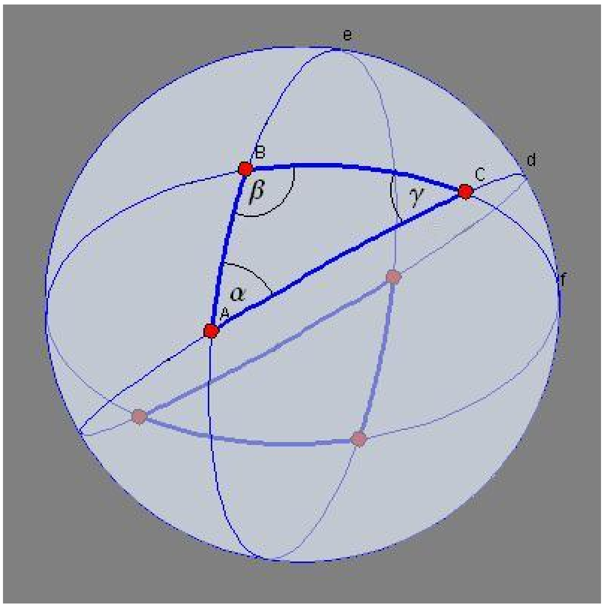
Izrek. *Ploščina sferičnega trikotnika je odvisna le od vsote velikosti njegovih kotov in radija sfere. Natančneje:*

$$P = r^2(S - \pi),$$

kjer je r radij sfere in $S = \alpha + \beta + \gamma$ vsota kotov v trikotniku.

Za izpeljavo te zveze moramo najprej izračunati površino dvojnega krajca. Dvojni krajec je del sfere, omejen z dvema glavnima krožnicama.

Kot α med tema dvema krožnicama je lahko največ π, takrat je površina dvojnega krajca enaka površini sfere, torej $4\pi r^2$. Ko pa je kot manjši, je tudi površina krajca sorazmerno manjša; recimo, ko je $\alpha = \pi/5$, je površina krajca $(1/5)\,4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{5}$. Sklepamo lahko, da je pri kotu α površina dvojnega krajca enaka $(\alpha/\pi)\,4\pi r^2 = 4\alpha r^2$.



Stranice trikotnika ABC z notranjimi koti α, β in γ podaljšamo okrog in okrog sfere. Na nasprotni strani sfere nastane trikotnik, ki je skladen s prvotnim. Dobimo tri dvojne krajce, ki vsebujejo oba trikotnika. Tem trem krajcem pripadajo koti α, β in γ, zato njihove površine merijo $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ in $4\gamma r^2$.

Če jih pobarvamo, je pobarvana celotna sfera, oba trikotnika pa celo trikrat. Zato lahko rečemo, da je vsota površin vseh treh dvojnih krajcev enaka površini celotne sfere, dvakratni ploščini trikotnika ABC in še dvakratni ploščini skladnega trikotnika.

Zapišemo lahko enačbo:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 2P + 2P.$$

Po kratkem preurejanju dobimo želeno zvezo:

$$P = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

oziroma $P = r^2(S - \pi)$. $\square$

Očitno je v primeru enotske sfere vsota notranjih kotov v trikotniku ravno za π večja od njegove ploščine. Sicer pa ima pravkar dokazana zveza še več zanimivih posledic. Ena izmed njih je dejstvo, da podobnost trikotnikov, kot jo poznamo v ravninski geometriji, v sferični geometriji nima pomena. Vsi trikotniki na isti sferi s skladnimi koti so namreč skladni.

Viri

[1] Jeffrey R. Weeks, *Oblika prostora*, str. 90-97. DMFA Slovenije, Ljubljana, 1999

Košarka, zaporniki in teorija iger

Maja Alif, Nino Bašić, Maja Poklinek, Katja Berčič (mentor)

Igre lahko postanejo zelo resna zadeva, če se jih lotijo matematiki. Ker pa je teorija iger danes že izjemno razvejana samostojna znanstvena disciplina, smo se mi lotili le dveh majhnih problemčkov. Najprej smo se seznanili s tako imenovano zapornikovo dilemo, nato pa smo poskusili na podoben način obravnavati še končnico košarkarske tekme.

Zapornikova dilema

Dveh zapornikov zaradi pomanjkanja dokazov ne morejo obtožiti na dolgo zaporno kazen, lahko pa bi ju, če bi eden pričal proti drugemu. Hkrati pa je tisti, ki zatoži drugega, izpuščen ali pa mu kazen zaradi sodelovanja znižajo.

Zapornikova dilema je znan problem iz teorije iger, pri kateri lahko igralca (zapornika) drug drugemu koristita oz. škodita z molkom ali obtožbo. Pri zapornikovi dilemi se odločamo samo med dvema možnostima: okoriščanje ali sodelovanje, pri čemer ne moremo natanko vedeti namena drugega zapornika. Obstaja več različic te dileme, pri klasični so izidi lahko sledeči:

Vsak želi čim bolj zmanjšati svojo kazen. S stališča posameznika se je bolje okoriščatii, ker je kazen manjša, ne glede na odločitev drugega. Ker pa je tako najbrž razmišljal tudi drugi igralec, se zgodi, da drug drugega obtožita, za kar dobita 2 leti zapora, če pa bi molčala, bi dobila le pol leta.

Za oba skupaj bi bilo najugodneje, če bi se dogovorila in molčala, vendar je to lahko tudi nevarno, če kateri od zapornikov ne drži besede in spregovori.

	B molči	**B izda**
A molči	oba dobita 6 mesecev	A dobi 10 let B je prost
A izda	A je prost B dobi 10 let	oba dobita 2 leti

Tabela 1: Zapornikova dilema

Košarkarska tekma

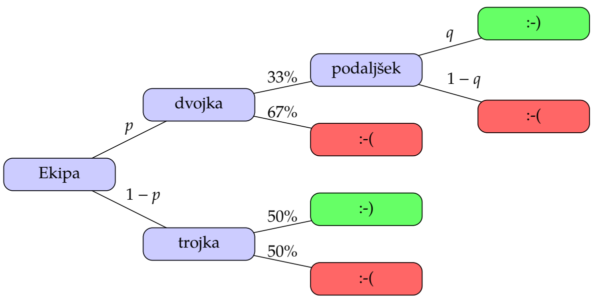
Košarkarska tekma se končuje. Žoga je v rokah domače ekipe, do konca pa je časa le za en napad. Gostje vodijo za dve točki. Domači so v dilemi: vreči dvojko, ter v primeru zadetka igrati podaljšek, v katerem zmaga ni zagotovljena, ali pa streljati trojko, pri kateri v primeru zadetka sledi takojšnja zmaga. Ker pa je treba upoštevati dejstvo, da je trojko teže zadeti kot dvojko, se znajdejo v dilemi.

V dilemi pa so tudi nasprotniki. Gostje morajo vnaprej predvideti, kakšno taktiko bodo najverjetneje uporabili gostitelji. Trener si ne sme privoščiti, da bi v igrah uporabljal vedno isto taktiko, saj ima v tem primeru nasprotnik prelahko nalogo pri izbiranju strategije za obrambo.

Poglejmo torej, kako pogosto naj se domači odločijo za neko taktiko napada in kolikokrat naj nasprotnik uporabi določeno taktiko obrambe.

napad \ **obramba**	**dvojka**	**trojka**
dvojka	33%	70%
trojka	50%	15%

Tabela 2: Verjetnost uspeha domačih glede na odigrano obrambo



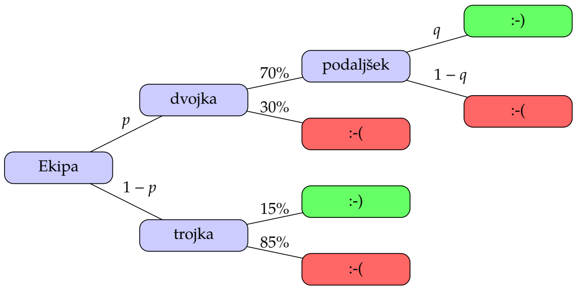
Slika 1: Obramba za dvojko

Naj bo p verjetnost, da bomo metali dvojko, $1-p$ pa verjetnost, da bomo metali trojko. Bodi q verjetnost, da bomo podaljšek dobili, če se seveda tja sploh uvrstimo (pri nas velja $q = 0.5$). Če naši nasprotniki branijo dvojko, potem je možnost za zmago:

$$v_2(p) = 0.33 \cdot q \cdot p + 0.50 \cdot (1 - p) \tag{4.1}$$

Če pa branijo trojko, potem je možnost za zmago:

$$v_3(p) = 0.70 \cdot q \cdot p + 0.15 \cdot (1 - p) \tag{4.2}$$



Slika 2: Obramba za trojko

Sedaj pri vsakem p upoštevamo za nas najmanj ugoden izkupiček:

$$min(v_2(p), v_3(p)). \tag{4.3}$$

Sedaj pa poiščimo tak p, pri katerem bo najneugodnejša rešitev čimboljša. Iščemo maksimum funkcije (4.3), ta pa je pri $p = 0.654206$. Ta rezultat pove trenerju, naj se v 65% primerih odloči za dvojko, v 35% primerih pa za trojko.

Če tak izračun naredimo še za trenerja ekipe v prednosti, ugotovimo, da je najbolje v 63% primerih odigrati obrambo dvojke, v 37% primerih pa obrambo trojke.

Viri

[1] L. E. Sadovski and A. L. Sadovski, *Matematika in šport*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1990

[2] *Game Theory*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://faculty.haas.berkeley.edu/rjmorgan

Finančna perspektiva podjetja Mars

Amela Rakanović, Ervin Strmčnik, Boštjan Kuzman (mentor)

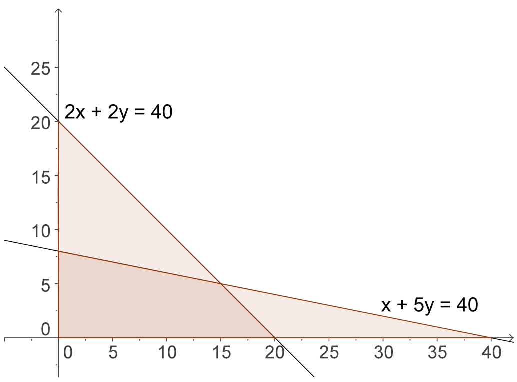
V podjetju MARS d.o.o. izdelujejo marsovce in marsovke. Pri izdelavi uporabljajo vilice in žlice. Za obdelavo enega marsovca je potrebno eno uro dela z vilico in dve uri dela z žlico, za marsovko pa pet ur dela z vilico in dve uri dela z žlico. Njihovi kupci so pripravljeni plačati 1¢ za vsakega marsovca in 3¢ za vsako marsovko. Žal imajo v podjetju samo eno vilico in žlico, njihov delovni čas pa je omejen na 40 delovnih ur tedensko. Koliko marsovk in marsovcev naj izdelajo vsak teden, da bo njihov zaslužek največji?

Nalogo lahko prevedemo iz marsovskega v matematični jezik. S spremenljivko x označimo število v enem tednu izdelanih marsovcev, s spremenljivko y pa število izdelanih marsovk. Za čas obdelave z vilico mora veljati $x + 5y \leq 40$, za čas obdelave z žlico pa $2x + 2y \leq 40$. Tedenski iztržek pri navedenih cenah bo enak $i = x + 3y$.

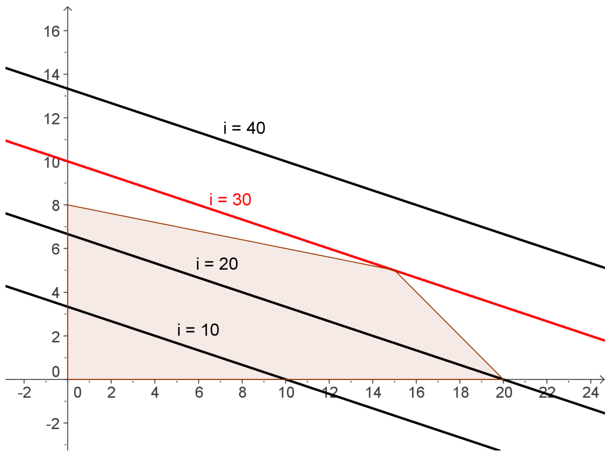
Iščemo torej maksimum funkcije $i = x + 3y$ pri pogojih

$$x + 5y \leq 40, \qquad 2x + 2y \leq 40, \qquad x, y \leq 0.$$

Vsaka od naštetih neenačb predstavlja neko polravnino, ki si jo lahko predstavljamo kot območje nad ali pod ustrezno premico. Območje, ki ustreza vsem neenačbam, je na naslednji sliki najtemneje osenčeno.



Funkcija $i = x + 3y$, ki predstavlja izkupiček, lahko v splošnem zavzame različne vrednosti. Območje, kjer je njena vrednost konstantna, pa si lahko predstavljamo kot premico z enačbo $x + 3y = i$ in jo narišemo za nekaj vrednosti i, na primer $i = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ \ldots$



Na ta način lahko iz slike razberemo, da največja vrednost za i, pri kateri ustrezna premica še seka osenčeno območje, nastopi v točki, kjer se sekata premici $x + 5y = 40$ in $2x + 2y = 40$. To se zgodi v točki $(15, 5)$, kjer je vrednost i enaka 30. Podjetju MARS se torej najbolj splača izdelati 15 marsovcev in 5 marsovk na teden; z njimi bodo zaslužili 30¢.

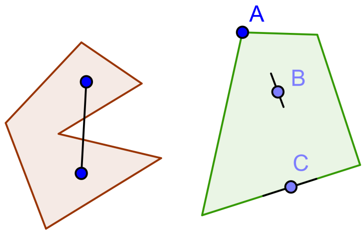
Bistvo naloge, ki smo jo pravkar rešili, je bilo poiskati maksimum neke *linearne* funkcije na območju, ki ga določa sistem linearnih neenačb. Reševanje tovrstnih problemov spada v skupino matematičnih metod, ki jih imenujemo *linearno programiranje*. V našem problemu sta nastopali le dve neznanki, zato smo problem zlahka ugnali z geometrijskim razmislekom. Že pri treh neznankah pa postane podobna naloga zelo zahtevna.

Eno prvih učinkovitih metod za reševanje tovrstnih problemov s poljubnim številom neznank in neenačb je razvil George Dantzig in je znana pod imenom *metoda simpleksov*. Kasneje so razvili še druge hitrejše in učinkovitejše algoritme, še danes pa v zvezi z linearnim programiranjem obstaja nekaj nerešenih vprašanj.

Seveda so omenjene metode za našo obravnavo tukaj prezahtevne, zato si oglejmo le nekaj preprostejših matematičnih konceptov, ki so potrebni za njihovo razumevanje.

Množico točk M v ravnini $\mathbb{R}^2$ imenujemo *konveksna*, če za poljubni točki iz te množice velja, da celotna daljica, ki ju povezuje, leži znotraj množice. Točko v konveksni množici M imenujemo *vogalna točka*, če ne leži na nobeni odprti daljici, vsebovani v M.

Od obeh množic na spodnji sliki je konveksna le desna. Označena točka A je njena vogalna točka, točki B in C pa nista vogalni, saj ležita v notranjosti neke daljice, vsebovane v M.



Očitno velja, da je presek dveh konveksnih množic zopet konveksna množica, saj za poljubni točki iz preseka velja, da daljica, ki ju povezuje, leži tako v prvi kot v drugi množici. Ker je vsaka polravnina konveksna množica, bo območje možnih rešitev sistema neenačb v nalogah linearnega programiranja z dvema neznankama vedno konveksna množica. Dokazati je mogoče, da v primeru, ko opazovana linearna funkcija zavzame ekstrem znotraj neke konveksne množice, ta ekstrem zavzame tudi v eni od njenih vogalnih točk. Zato bi bilo v takem primeru dovolj določiti vogalne točke in preveriti, v kateri od njih je vrednost funkcije največja oziroma najmanjša.

Tovrstno razmišljanje je osnova tudi za reševanje nalog s tremi ali več neznankami, ki pa so v praksi le redkokdaj rešljive brez uporabe zahtevnejših metod in računalnika.

Viri

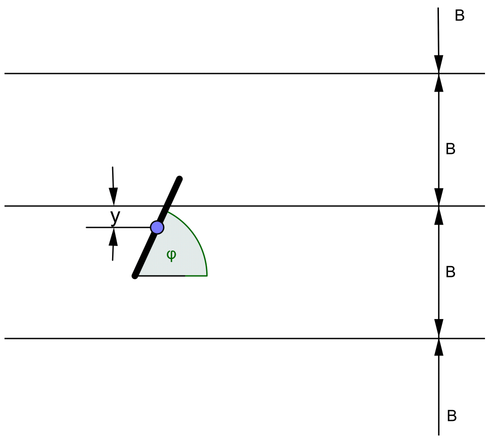
[1] Dušan Hvalica, *Linearno programiranje in njegova uporaba*. Založba Ekonomska Fakulteta, Ljubljana, 2002

[2] *Linear programming*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_Programming

Buffonova igla

Primož Koželj, Nejc Rosenstein, David Kraljič, Uroš Kuzman (mentor)

Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1701-1788) je bil francoski matematik, biolog, kozmolog in pisatelj. V sredini 18. stoletja je opisal in rešil problem, ki ga danes poznamo kot problem Buffonove igle. Problem je zastavljen takole: na ravnino, na kateri se nahaja neskončno število vzporednic, ki so med seboj oddaljene za razdaljo B, naključno vržemo iglo dolžine L ≤ B. Kolikšna je verjetnost, da se bo igla dotikala katere od vzporednic?



Na sliki y označuje razdaljo med središčem igle in med najbližjo črto. Kot, ki ga igla oklepa s črto, pa je označen s φ. Ker mečemo na slepo, to seveda pomeni, da vsaka razdalja y ter vsak kot φ nastopata z enako verjetnostjo ter da sta drug od drugega neodvisna.

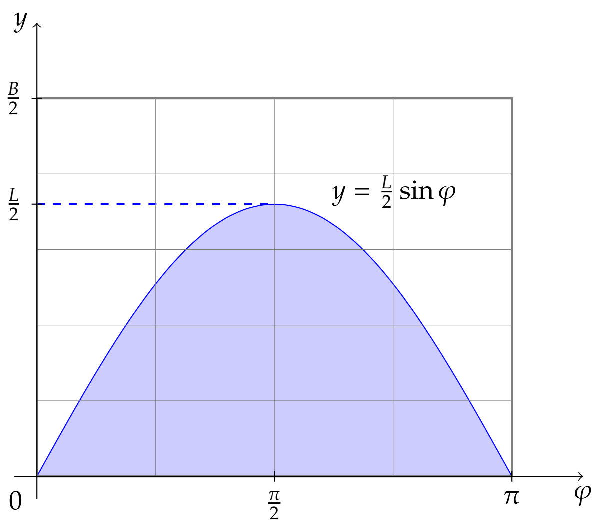
Če si pri reševanju pomagamo z grafičnim prikazom, ugotovimo, da se bo igla dotaknila črte, ko bo

$$y < \frac{L}{2}\sin\varphi.$$

Parameter y lahko zavzame katerokoli vrednost med 0 in $L/2$, kot φ pa lahko meri med 0° in 180° oziroma med 0 in π radianov:

$$0 < y < \frac{L}{2}, \qquad 0 < \varphi < \pi.$$

Oglejmo si pravokotnik na naslednji sliki. Pri vsakem metu neodvisni spremenljivki y in φ določata neko točko znotraj pravokotnika s stranicama π in $B/2$.



Kot smo že ugotovili, se bo igla dotaknila črte, ko bo veljalo $y < \frac{L}{2}\sin\varphi$, zato je na sliki narisana krivulja $y = \frac{L}{2}\sin\varphi$. Za vse točke pod krivuljo se je igla dotaknila črte, kar označimo za uspešen poskus, točke nad krivuljo pa predstavljajo zgrešen poskus.

Verjetnost uspeha P je torej kvocient med ploščino področja pod krivuljo, ki ga določajo uspešni izidi, in ploščino celotnega pravokotnika. Ploščina področja uspešnih poskusov meri

$$A_s = \int_0^\pi \frac{L}{2}\sin\varphi\, d\varphi = L,$$

ploščina pravokotnika pa je $A = \pi\frac{B}{2}$. Od tod sledi, da je verjetnost, da zadenemo črto, enaka

$$P = \frac{A_s}{A} = \frac{L}{\pi\frac{B}{2}} = \frac{2L}{\pi B}.$$

V posebnem primeru, ko je $L = B$, je

$$P = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}63662.$$

Vedoželjni bralec lahko ta rezultat sam preveri tudi eksperimentalno, če le ima dovolj časa.

V babičini skrinji poiščite šivanko in na veliko polo papirja narišite vzporedne črte. Razmak med njimi naj bo enak dolžini šivanke. Nato na polo mečite šivanko ter si zapisujte število uspešnih in vseh poskusov. Po približno 10.000 ponovitvah boste dobili že kar dober približek za zgoraj izračunani rezultat.

Še bolj zabavno pa je, da lahko na ta način izračunamo približek števila π, saj iz prej izpeljane formule sledi

$$\pi = \frac{2L}{B}\frac{1}{P}.$$

Uporabno natančnost sicer dosežemo šele z izredno veliko poskusi. Lahko pa imamo srečo kot italijanski matematik Mario Lazzarini, ki je izvedel poskus z iglo leta 1901. Iglo naj bi vrgel 3408-krat ter dobil znan in zelo dober približek $\pi = 355/113$.

V praksi lahko danes take eksperimente zamenjamo z računalniško simulacijo in jih tako pospešimo. Problem Buffonove igle je preprost primer simulacije tipa Monte Carlo, s kakršnimi se simulira obnašanje številnih fizikalnih in matematičnih sistemov.

Viri

[1] Robert. B. Banks, *Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike*. DMFA Slovenije, Ljubljana, 2004

[2] *Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_Comte_de_Buffon

[3] *Monte Carlo method*. Online. Citirano 31.8.2006 na naslovu http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method

Met košarkarske žoge

Anže Starič, Dominik Šurc, Tomo Umer, Uroš Kuzman (mentor)

Fiziko in matematiko je človek uporabljal že od prazgodovine. Žal se pri preprostem lučanju kamenja in sulic ni zavedal, kaj vse se skriva za preprostim gibom. Iz preučevanja tega giba se je skozi tisočletja razvila balistika. Že v rimskem času so morali vedeti, kakšen domet imajo katapulti. V večini primerov je torej balistika povezana z orožjem. V našem projektu pa se bomo osredotočili na šport, ki ga je leta 1891 izumil James Naismith. Zastavili smo si problem meta na koš. Imamo košarkaša, ki stoji na črti za izvajanje prostih metov. Znana je njegova višina, začetna hitrost, s katero mora vreči žogo, višina koša in razdalja, s katere se izvajajo prosti meti. Naš cilj je določiti kot, pod katerim je potrebno vreči žogo.

Navpični met

Za reševanje težjega problema si bomo najprej ogledali model navpičnega meta, pri katerem se naš objekt giblje premočrtno. Denimo, da žogo zalučamo navpično navzgor. Edina sila, ki deluje na naš objekt, je gravitacijska sila. Uporabimo drugi Newtonov zakon o gibanju in dobimo enačbo $-F_g = ma$. Ugotovimo, da je pospešek žoge a konstantno enak $-g$ (negativen predznak dodamo zato, ker je pospešek v nasprotni smeri gibanja), torej gre za enakomerno pospešeno gibanje. Znani sta nam enačbi:

$$v = v_0 + at \tag{7.1}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{7.2}$$

v pomeni hitrost, v_0 začetno hitrost, t čas, s pot, in s_0 začetno pot. S pomočjo enačb izračunamo maksimalno višino $H = {v_0}^2/2g$.

Poševni met

Sedaj bomo problem zastavili tako, da žogo vržemo v poševni smeri pod kotom α z začetno hitrostjo. Hitrost razstavimo na navpično in vodoravno komponento. S pomočjo enačbe (7.2) in enačbe za premo enakomerno gibanje $s = vt$ dobimo pozicijo središča žoge

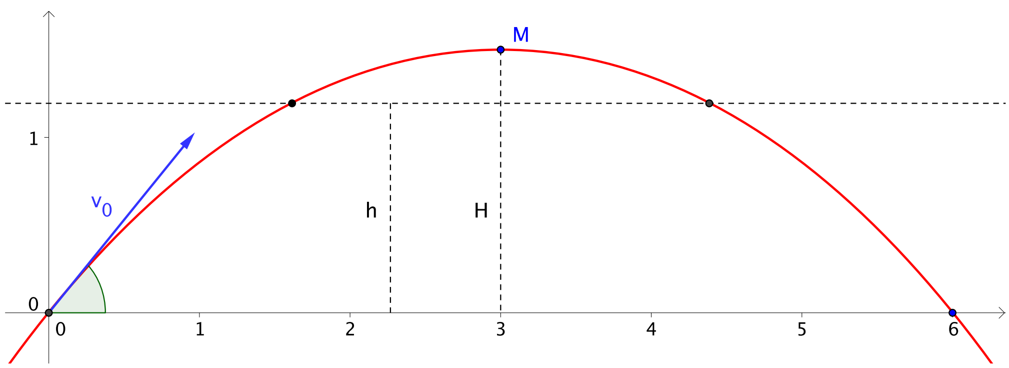
$$T\left(v_0 t\cos\alpha, v_0 t\sin\alpha - \tfrac{gt^2}{2}\right) \tag{7.3}$$

v odvisnosti od časa. Če iz abscise izrazimo čas in ga vstavimo v ordinato, dobimo zvezo:

$$y = (\tan\alpha)\,x - \left(\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}\right)x^2 \tag{7.4}$$

Iz enačbe je razvidno, da se telo giblje po paraboli. Najvišjo točko leta izračunamo s pomočjo enačbe za absciso temena parabole in ugotovitve iz razdelka 7.1:

$$M\left(\frac{{v_0}^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, {v_0}^2\sin^2\alpha\right) \tag{7.5}$$



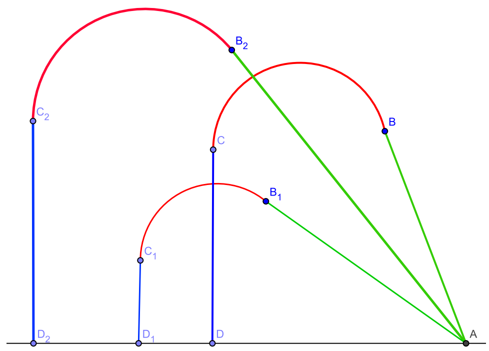
Slika 1: Skica tirnice žoge pri poševnem metu

Pri metu košarkarske žoge je cilj praviloma višje od točke izmeta.

Iz slike je razvidno, da parabola seka vodoravno premico višine koša v dveh točkah. Če se torej vrnemo k prvotnemu problemu meta na koš, sta ob začetnih podatkih možni dve krivulji leta in s tem dva kota. Ena rešitev ne pride v poštev, saj bi se žoga približala obroču s spodnje strani. Želimo, da žoga prileti skozi koš, ko je že dosegla maksimalno višino. Z uporabo zveze in enačbe 7.4 dobimo končno formulo za izračun kota:

$$\tan\alpha = \frac{{v_0}^2}{gl}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g}{{v_0}^2}(2h - \frac{gl^2}{{v_0}^2})}\right)$$

Ker je tangens naraščajoča funkcija in mi želimo večjega izmed kotov, izberemo seštevanje.



Slika 2: Tartaglieve tirnice

Zanimivost

Niccolo Tartaglia je še leta 1550 v knjigi Nova znanost zagotavljal, da se telo pri poševnem metu giblje po nagnjeni premici, po delu kroga in po navpični premici. Leta 1638 je G. Gallilei pokazal, da se pri vodoravnem metu telo giblje po paraboli.

Viri

[1] Robert. B. Banks, *Ledene gore, padajoče domine – 2. del*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 2005

[2] Janez Strnad, *Razvoj fizike*. DZS, Ljubljana, 1996