Optimalni vzpon na goro

Gašper Jaklič

MARS 2012

Fara, 19.8.2012

Problem

- konstrukcija ceste preko razgibanega terena
- načrtovanje železnice
- načrtovanje nove planinske poti

Lysebotn

Trollstigen - Trolova cesta

Mulatjera v Zadnji Trenti

Pot na Breginjski Stol

Težave

- kako dobiti podatke o terenu (višinske točke)
- kako modelirati teren (matematični in računalniški zapis ploskve)
- iskanje optimalne krivulje na ploskvi je težak problem
- kako opisati krivuljo
- kako dobiti mrežo primernih krivulj in izbrati optimalno

Kaj je optimalno?

- cesta ali železnica ne sme imeti prevelikih vzponov
- ovinki ne smejo biti kratki in ostri (železnica!)
- cesta/pot se mora izogniti določenim območjem (neprehoden teren,...)
- gradnja tunelov in mostov je zelo draga
- tudi gradnja vkopov in nasipov je draga (problem z materialom)
- pri vzponu na hrib bi radi porabili najmanj energije ali najhitreje prišli na vrh

Opis problema

- študiramo problem iskanja optimalne poti na vrh hriba
- iz GPS podatkov bomo skonstruirali primerno ploskev
- na ploskvi bomo dobili mrežo poti
- poiskali bomo pot, na kateri porabimo najmanj energije
- izračunano pot bomo primerjali s potjo v naravi

Dobra planinska pot

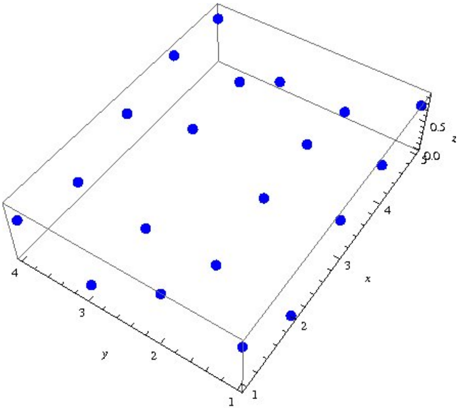
- uporablja naravne prehode
- ni prestrma (nevarnost zdrsa, plezanje)
- ne izgublja višine
- je čim krajša
- strme dele premaga v ključih (cik-cak)

Dani podatki o terenu

Višinske točke (x, y, z):

458141.17	109796.15	522
458153.67	109796.15	523
458166.17	109796.15	524
458178.67	109796.15	523
458191.17	109796.15	520
458203.67	109796.15	517
458216.17	109796.15	511
458228.67	109796.15	505
458241.17	109796.15	501
458253.67	109796.15	496
458266.17	109796.15	493
458278.67	109796.15	491
458291.17	109796.15	490

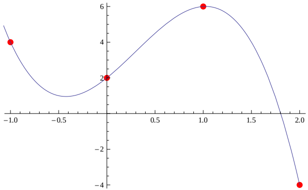
Točke



Interpolacija

- Dane so točke v ravnini (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$
- Poišči polinom, ki gre skozi dane točke
- Obstaja natanko en tak polinom

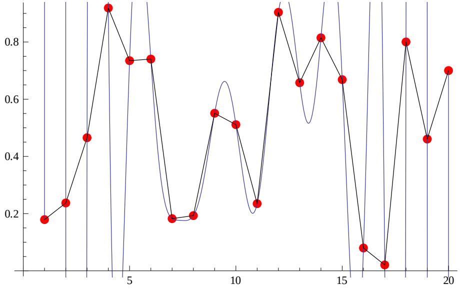
Primer: (-1, 4), (0, 2), (1, 6), (2, -4)



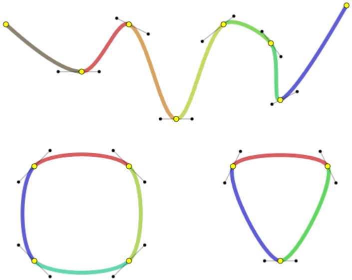
$$p(x) = 2 + \frac{13}{3}x + 3x^2 - \frac{10}{3}x^3$$

Polinomi visoke stopnje in zlepki

- polinomi preveč oscilirajo
- rešitev so odsekoma polinomske funkcije - zlepki



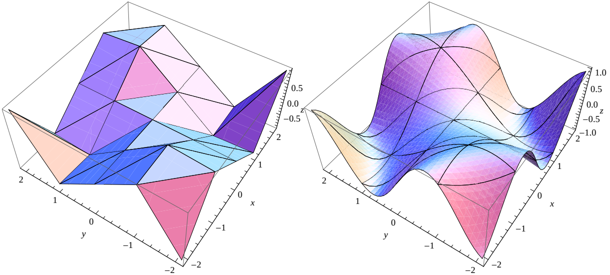
Primeri zlepkov



- interpolacijo s polinomi in zlepki posplošimo na ploskve

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

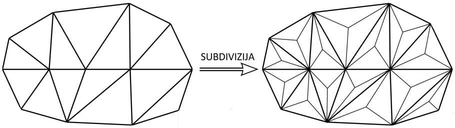
Primer



Slika: Odsekoma linearna ploskev in kubični zlepek.

Prednosti kubičnih zlepkov

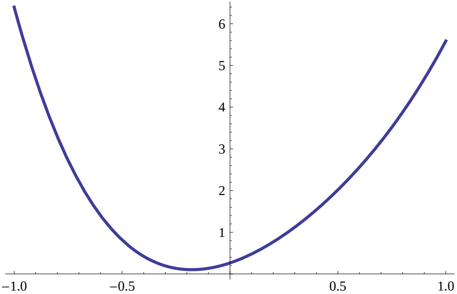
- enostaven opis delov ploskve s polinomi
- ploskev je bolj gladka kot triangulacija
- robovi ploskvic so kubični polinomi
- dobili smo mrežo krivulj, na kateri bomo iskali optimalno pot
- če zahtevamo večjo natančnost, ploskev razdelimo



Poraba energije

- funkcija porabe energije na enoto poti povprečnega pohodnika glede na strmino klanca (poz. del je vzpon, neg. pa spust)

$$M(s) := 0.2635 + 1.737\,s + 4.237\,s^2 - 2.143\,s^3 + 1.493\,s^4$$



- dobljena je iz meritev
- ni simetrična
- najmanj energije potrebujemo za spust po položnem hribu
- po strmem hribu je lažje hoditi gor kot dol

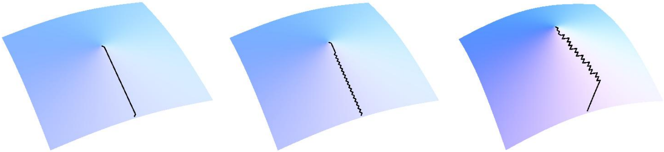
Spremembe smeri

- če je naklon hriba prevelik (15.6° za gor, 12.5° za dol), se splača uporabiti hojo v ključih (cik-cak)
- pot je daljša, poraba energije pa manjša
- v [Llobera-Sluckin-zigzagging-2007] so uporabili energijsko funkcijo

$$I(\delta) := \frac{M(\tan\theta \ \cos\delta)}{\cos\delta}$$

- θ je naklon terena, δ pa kot med trenutno smerjo pohodnika in njegovo smerjo proti cilju
- pri nas cik-cak gibanje nastane zaradi uporabe zlepkov in subdivizije

Hoja v ključih



Slika: Optimalne poti na ploskvah z različnimi konstantnimi nakloni: $\tan\theta = 0.25,\ 0.3,\ 0.5$.

Energijski funkcional

- naša ploskev nima konstantnega naklona
- "sešteti" je treba energijo po poti (upoštevati dolžino in naklon)
- delček poti je krivulja

$$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$$

- energija E na delu poti $d\ell$ je

$$dE(\boldsymbol{r}) = M(s(t))\, d\ell,$$

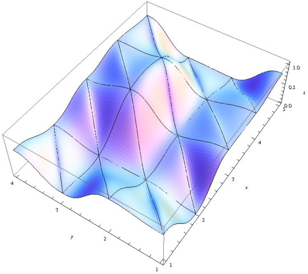
- $$s(t) = \tan\varphi(t) = \frac{\dot{r}_z(t)}{\sqrt{\dot{r}_x^2(t) + \dot{r}_y^2(t)}}.$$

Energijski funkcional

- poraba energije na krivulji je

$$E(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 M(s(t))\,\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|\,dt.$$

- energijo izračunamo na vsakem delu mreže krivulj



Dijkstrov algoritem

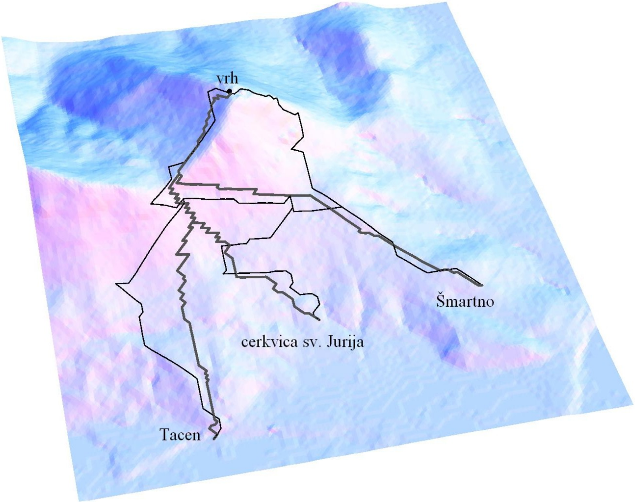
- imamo omrežje poti (V, E) med točkami, vsaka povezava e ima ceno $w_e \geq 0$ (cena = energija, dolžina,...)
- cena poti je vsota cen vseh povezav na poti
- algoritem določi najcenejšo pot od ene točke s do vseh drugih
- raziskani del omrežja: množica S točk u, za katere smo že določili dolžino najcenejše poti od točke s
- za vsako točko $v \in V - S$ določimo najcenejšo pot, ki jo lahko dobimo tako, da potujemo po raziskanem delu S do neke točke u in po povezavi od u do v.
- opazujemo količino

$$c'(v) = \min_{\substack{e=uv:\\ u\in S}} \left(c(u) + w_e\right).$$

- izberemo točko $v \in V - S$, za katero je ta količina najmanjša, in dodamo v v množico S.
- zapomnimo si povezavo uv, na kateri je bil dosežen minimum

Šmarna gora

Šmarna gora



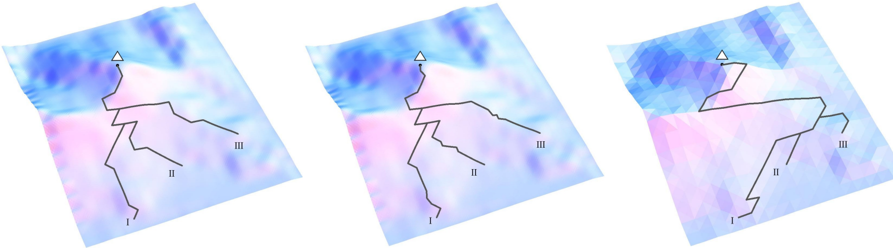
Slika: Šmarna gora s priljubljenimi potmi (črno, tanko) in izračunanimi potmi (sivo, krepko).

Poraba energije

Izhodišče	Pot	Poraba (kJ)	Prihranek (kJ)	Razlika (%)
Tacen (čez Sp. kuhinjo)	prava optim.	1589 1403	186	11.7
c. sv. Jurija (Romarska pot)	prava optim.	1484 1252	232	15.6
Šmartno (Šmarska pot)	prava optim.	1403 1250	153	10.9
Šmartno (Partizanska pot)	prava optim.	1456 1250	206	14.1

Tabela: Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro.

Optimalne poti



Slika: Optimalne poti na grobi mreži, po enem koraku subdivizije in na odsekoma linearnem terenu.

Poraba energije

	P. energije (kJ)		
Start	Groba	Razdeljena	O. linearna
I	1373	1371	1935
II	1281	1279	1699
III	1194	1191	1632

Tabela: Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro na grobi mreži, po uporabi subdivizije in na odsekoma linearni ploskvi.

Šmarna gora