Simetrične funkcije

Ajda Brnot, Martin Gubina, Kiana Petrič
Mentorica: Petra Podlogar

Povzetek

V članku definiramo dve družini simetričnih funkcij, to so monomske simetrične funkcije in Schurove funkcije. Izkaže se, da so prve baza vektorskih prostorov Λ^n in Λ. Drugim pa se posvetimo zaradi povezave z Youngovimi polstandardnimi tabelami, sproti ugotovimo, da so tudi te simetrične.

1 Uvod

Narava permutacij in njihova globoka povezava z različnimi matematičnimi koncepti so že dolgo navdihovale raziskovalce v številnih vejah matematike. V tem članku bomo raziskali osnovne ideje in povezave med permutacijami, simetričnimi polinomi in simetričnimi funkcijami. Spoznali bomo dve družini simetričnih funkcij, monomske simetrične funkcije in Schurove funkcije.

Permutacije predstavljajo razporeditve elementov v določenem vrstnem redu. Te lahko razumemo kot bijektivne preslikave množice same vase. Simetrični polinomi so algebraični izrazi, ki ostanejo nespremenjeni, če zamenjamo vrstni red njihovih spremenljivk. Poglobljeno raziskovanje simetričnih polinomov privede do koncepta simetričnih funkcij, ki so pravzaprav razširitev simetričnih polinomov na neskončne vrste.

Monomske simetrične funkcije so poseben razred simetričnih funkcij, ki igrajo pomembno vlogo pri razvoju teorije simetričnih polinomov. Youngove polstandardne tabele so kombinatorična orodja, ki so povezana s simetričnimi funkcijami in permutacijami ter so bistvene pri raziskovanju simetrične grupe. Schurove funkcije pa so posebne simetrične funkcije, ki so povezane z reprezentacijami simetrične grupe in imajo številne aplikacije v različnih matematičnih kontekstih.

V nadaljevanju članka bomo podrobno preučili vsakega od teh konceptov in raziskali njihove medsebojne povezave.

2 Permutacije

Najprej si oglejmo osnovno matematično strukturo, ki igra ključno vlogo pri razporejanju elementov ter razumevanju simetrije in kombinatorike.

Definicija 1. ***Permutacija*** *$\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijektivna preslikava množice n elementov same vase. Množico vseh permutacij množice n elementov označimo s S_n. Posebna vrsta permutacije je **transpozicija**, pri kateri se zamenjata le dva elementa.*

Permutacijo množice števil $\{1, 2, \ldots, n\}$ lahko zapišemo na tri načine, in sicer dvovrstično kot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

enovrstično kot

$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

ali ciklično. Ciklični zapis permutacije je način predstavitve permutacije s pomočjo ciklov in omogoča bolj pregledno in kompaktno predstavitev permutacij z uporabo ciklov, kjer se elementi, ki so med seboj povezani, združijo v cikle.

Primer 1. *Zapišimo eno izmed permutacij $\{1, 2, \ldots, n\}$ z dvovrstičnim, enovrstičnim in cikličnim zapisom.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (1,\ 4,\ 3)\,(2) \\ &= (1,\ 4,\ 3) \end{aligned}$$

Lahko jo zapišemo tudi kot produkt transpozicij.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,\ 4)\,(4,\ 3)$$

Trditev 1. *Vsako permutacijo je mogoče zapisati kot produkt transpozicij.*

Dokaz. Poljubno permutacijo $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)$ lahko zapišemo kot produkt transpozicij na sledeč način

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n) = (a_1,\ a_2)\,(a_2,\ a_3)\cdots(a_{n-1},\ a_n)\,.$$

Transpozicije, ki jih dobimo na zgornji način, niso nujno oblike $(i,\ i+1)$ za $i \geq 1$. Pri nekaterih dokazih bi nam bolj prav prišlo, če bi znali permutacijo zapisati kot produkt transpozicij te posebne oblike. To lahko naredimo na sledeč način:

$$(k,\ l) = (k,\ k+1)\,(k+1,\ k+2)\cdots(l-1,\ l)\,(l-2,\ l-1)\cdots(k,\ k+1)\,,$$

pri čemer smo predpostavili, da je $k < l$.

Ko združimo oba načina, lahko vidimo, da lahko vsako permutacijo zapišemo kot produkt transpozicij oblike $(i,\ i+1)$ za neke $i \in \mathbb{N}$. □

3 Simetrični polinomi in Vietove formule

Definicija 2. ***Simetrični polinom*** *v spremenljivkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je tak polinom, da za vsako permutacijo $\pi \in S_n$ velja*

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, \ldots x_{\pi(n)}).$$

Primer 2. *Dana sta polinoma*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

in

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 + 3x_3^3 + 2 + x_1x_2$$

ter permutacija $\pi = (1, 2, 3)$. Za polinom f je

$$\begin{aligned} f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) &= f(x_2, x_3, x_1) \\ &= x_2 + x_3 + x_1 \\ &= f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ker to velja tudi za vse ostale permutacije, je polinom f simetričen. Za polinom g pa velja

$$\begin{aligned} g(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) &= g(x_2, x_3, x_1) \\ &= x_2^2 + 2x_3 + 3x_1^3 + 2 + x_2 x_3 \\ &\neq g(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

kar pomeni, da polinom g ni simetričen.

Simetrične polinome lahko opazimo pri Vietovih formulah za iskanje ničel v polinomih. Za poljuben polinom druge stopnje $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kjer sta x_1, x_2 ničli kvadratne funkcije, sta to formuli

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

in

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

kjer na levi strani očitno zagledamo simetričen polinom.

Za poljuben polinom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, ki ga lahko izrazimo kot $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, imamo Vietove formule

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\cdots \\ x_1 x_2 x_3 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Opazimo, da je leva stran enačb simetrična.

4 Simetrične funkcije

Da lahko definiramo simetrične funkcije, najprej poglejmo, kaj so formalne potenčne vrste.

Definicija 3. ***Formalna potenčna vrsta v neskončnem številu spremenljivk s koeficienti v $\mathbb{Q}$*** *je preslikava $f : A \to \mathbb{Q}$, kjer je*

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mid \textit{končno mnogo členov } a_i \textit{ neničelnih}\}.$$

Označimo $f \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \ldots]] = \mathbb{Q}[[x]]$.

V zgornji definiciji smo poenostavili zapis, upoštevali smo $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Primer 3. *Primer formalne potenčne vrste je*

$$\begin{aligned} f : (1, 0, 0, 0, \ldots) &\mapsto 2 \\ (0, 1, 1, 0, \ldots) &\mapsto 5 \\ (1, 0, 2, 0, \ldots) &\mapsto 3 \\ &\ldots, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$2x_1 + 5x_2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + \cdots.$$

Definicija 4. ***Simetrična funkcija s koeficienti v $\mathbb{Q}$*** *je taka $f \in \mathbb{Q}[[x]]$, za katero za vsako permutacijo π množice $\{1, 2, \ldots\}$ velja*

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, \ldots).$$

Simetrična funkcija je torej posebna vrsta formalne potenčne vrste, pri kateri lahko spremenljivke poljubno preurejamo. Poznamo tudi homogene simetrične funkcije.

Definicija 5. ***Homogena simetrična funkcija stopnje*** *n je simetrična funkcija, za katero velja, da so lahko neničelni le koeficienti členov z vsoto potenc enako n.*

Primer 4. *Oglejmo si nekaj primerov homogenih simetričnih funkcij:*

- $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \qquad (n = 1),$
- $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots \qquad (n = 2),$
- $h(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots \qquad (n = 2).$

5 Vektorski prostor

V nadaljevanju bomo definirali bazo simetričnih funkcij, zato moramo poznati definicijo grupe, vektorskega prostora in baze.

Definicija 6. ***Grupa*** *je par $(V, +)$, sestavljen iz množice V in operacije*

$$+ : G \times G \to G,$$

ki zadošča pogojem:

1. *operacija $+$ je asociativna:*
$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{za vsak } a, b, c \in V,$$
2. *obstaja nevtralni element:*
$$0 + x = x + 0 = x \quad \text{za vsak } x \in V,$$
3. *vsak element $a \in V$ je obrnljiv:*
$$\text{za vsak } a \text{ obstaja } -a, \text{ tako da je } a + (-a) = -a + a = 0.$$

Grupa $(V, +)$ je komutativna, če za vsaka elementa $u, v \in V$ velja

$$u + v = v + u.$$

Poznavanje definicije grupe je potrebno za uvedbo vektorskega prostora.

Definicija 7. ***Vektorski prostor*** *V* ***nad*** *$\mathbb{Q}$ je množica V z notranjo operacijo*

$$+ : V \times V \to V$$

in zunanjo operacijo

$$\cdot : \mathbb{Q} \times V \to V,$$

za kateri za poljubne $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ in $u, v \in V$ velja:

1. *$(V, +)$ je komutativna grupa,*
2. *asociativnost:*
$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u),$$
3. *distributivnost:*
$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u,$$
$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,$$
4. *$1 \cdot v = v$, kjer je $1 \in \mathbb{Q}$ nevtralni element za množenje.*

Vsak vektorski prostor ima bazo. V nadaljevanju bomo iskali bazo simetričnih funkcij.

Definicija 8. *Množica $B \subseteq V$ je* ***baza vektorskega prostora*** *V, če zanjo velja, da:*

1. *je ogrodje:*

   vsak $v \in V$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo elementov množice B,

2. *so elementi množice B linearno neodvisni:*
   za vsako končno podmnožico $B' \subseteq B$ je

$$\sum_{v_i \in B'} a_i v_i = 0 \iff \text{vsi koeficienti } a_i \text{ so enaki } 0.$$

6 Množici Λ^n in Λ

V kontekstu simetričnih funkcij se bomo v tem poglavju osredotočili na množici Λ^n in Λ, v katerih so združene simetrične funkcije z nekimi lastnostmi.

Definicija 9. ***Množico vseh homogenih simetričnih funkcij stopnje*** *n za $n \geq 0$ označimo z Λ^n.*

V množici Λ želimo končne vsote homogenih simetričnih funkcij. Z množicami Λ^i za $i \geq 0$ definiramo

$$\Lambda := \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \cdots,$$

elementi Λ pa so enaki

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots,$$

kjer je $f_i \in \Lambda^i$, neničelnih f_i pa je končno mnogo.

Za Λ^n in Λ definiramo seštevanje kot seštevanje po členih ter množenje s skalarjem na očiten način.

Razmislimo, da sta Λ^n in Λ vektorska prostora. Ni težko videti, da večino računskih pogojev izpolnjujeta; asociativnost seštevanja in množenja s skalarjem ter distributivnost sta očitni. Očitno je tudi, da je $1 \in \mathbb{Q}$ nevtralni element za množenje, saj formalna potenčna vrsta po množenju z 1 ostane nespremenjena. Prav tako hitro opazimo, da ima vsak element v Λ in Λ^n nasprotno vrednost, saj so koeficienti simetričnih funkcij iz Λ in Λ^n elementi $\mathbb{Q}$ in imajo zato vsak svojo nasprotno vrednost. Edini pogoj, ki ni najbolj očiten, je pogoj za nevtralni element. Če si še enkrat pogledamo definicijo homogene simetrične funkcije, vidimo, da dopušča, da je koeficient člena, katerega vsota potenc je n, lahko enak 0, torej so lahko koeficienti vseh členov neke funkcije $f_n \in \Lambda^n$ enaki 0. Tako lahko dobimo $f_n = 0 \in \Lambda^n$ za vsak n. Poljubna Λ^n torej vsebuje element 0. Razmisliti moramo še, da je 0 tudi element Λ. Ker je vsak element iz Λ je sestavljen iz elementov iz poljubnega končnega števila množic Λ^n, vsaka množica Λ^n pa vsebuje element 0, je tudi $0 \in \Lambda$.

Premislili smo, da sta Λ in Λ^n vektorska prostora, saj zadostujeta vsem pogojem zanj. Ker sta vektorska prostora, je smiselno zanju iskati baze – dve predstavimo v nadaljevanju.

7 Particije in šibke kompozicije

Preden se poglobimo v raziskovanje družin simetričnih funkcij, je ključno razumeti koncept particij – razdelitev števila na pozitivne celoštevilske komponente.

Definicija 10. ***Particija števila*** *n je padajoče zaporedje naravnih števil, katerih vsota je enaka n. Da je λ particija števila n, označimo z $\lambda \vdash n$, da je λ particija, pa z $\lambda \in Par$, kjer je Par množica vseh particij.*

Particije lahko med seboj primerjamo z relacijo dominance.

Definicija 11. *Naj bosta $\lambda, \mu \in Par$. Rečemo, da je λ manjša ali enaka kot μ v* ***relaciji dominance****, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

To označimo z $\lambda \leq \mu$.

Upoštevali smo, da je λ_i i-ti element v particiji λ. Za $\lambda \vdash n$ definiramo oznaki $l(\lambda)$, ki je enak številu elementov v particiji, in $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{l(\lambda)} = n$.

Primer 5. *Za* $n = 4$ *so tako* 4, 31, 22, 211 *in* 1111 *vse možne particije,* $l(31) = 2$ *in* $|31| = 4$*. Vidimo, da je* $1111 \leq 31$.

Šibka kompozicija $\alpha \vDash n$ je podobno kot particija sestavljena iz števil, katerih vsota je enaka n, vendar pa so tokrat števila izbrana iz $\mathbb{N} \cup \{0\}$ in niso nujno urejena v padajočem vrstnem redu.

Primer 6. *Za* $n = 4$ *je ena od šibkih kompozicij enaka* $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, \ldots)$.

8 Monomske simetrične funkcije

Ena izmed osnovnih družin simetričnih funkcij so monomske simetrične funkcije.

Definicija 12. *Naj bo* $n \geq 0$*. Za* $\lambda \vdash n$ *definiramo* ***monomske simetrične funkcije*** *kot*

$$m_\lambda(x) = \sum_{\substack{\omega:\{1,2,\ldots,l(\lambda)\}\to\{1,2,3,\ldots\} \\ \omega \text{ injektivna preslikava}}} x_{\omega(1)}^{\lambda_1} x_{\omega(2)}^{\lambda_2} \cdots x_{\omega(l(\lambda))}^{\lambda_{l(\lambda)}}.$$

Primer 7. *Poglejmo prvih nekaj primerov monomskih simetričnih funkcij:*

- $m_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots,$
- $m_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots,$
- $m_{11}(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots,$
- $m_{21}(x) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + \cdots.$

V prejšnjem razdelku smo razmislili, da sta Λ^n in Λ vektorska prostora. Pokažimo zdaj, da lahko v družini monomskih simetričnih funkcij zanju najdemo bazi.

Trditev 2. *Za monomske simetrične funkcije velja:*

1. $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ *je baza za* Λ^n*,*
2. $\{m_\lambda \mid \lambda \in Par\}$ *je baza za* Λ.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ baza za Λ^n, saj si bomo s tem pomagali tudi pri dokazu, da je $\{m_\lambda \mid \lambda \in Par\}$ baza za Λ.

1. Najprej dokažimo, da je $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ ogrodje. Očitno je, da poljuben $f \in \Lambda^n$ lahko zapišemo kot

$$f = \sum_{\alpha \vDash n} c_\alpha x^\alpha,$$

kjer je $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, saj lahko s šibkimi kompozicijami predstavimo poljuben člen, ki se poja

kjer smo pri zadnjem enačaju uporabili definicijo monomske simetrične funkcije. S tem smo dokazali, da množica monomskih simetričnih funkcij tvori ogrodje za vektorski prostor Λ^n.

Pokazati moramo še linearno neodvisnost, dokazujemo torej

$$\sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda m_\lambda = 0 \iff c_\lambda = 0$$

za vsak $\lambda \vdash n$. Naj bosta λ in μ različni particiji števila n. Zaradi različnih elementov v particiji in posledično različnih potenc se člen, ki se pojavi v m_λ, ne more pojaviti v m_μ. Iz tega sledi, da bo vsota enaka 0 natanko tedaj, ko bodo vsi koeficienti enaki 0.

Dokažimo še, da je $\{m_\lambda \mid \lambda \in Par\}$ baza za Λ. Ker je $f \in \Lambda$, lahko f zapišemo kot

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots ,$$

kjer so $f_i \in \Lambda^i$ za vsak $i \geq 0$. Da je ogrodje, je očitno, saj lahko vsako funkcijo $f_n \in \Lambda^n$ zapišemo z elementi množice $\{m_\lambda \mid \lambda \in Par\}$. Za particije različnih števil spet ne moremo dobiti enakih členov in res je $\sum_{\lambda \in Par} a_\lambda m_\lambda = 0$ natanko takrat, ko so vsi koeficienti a_λ enaki 0.

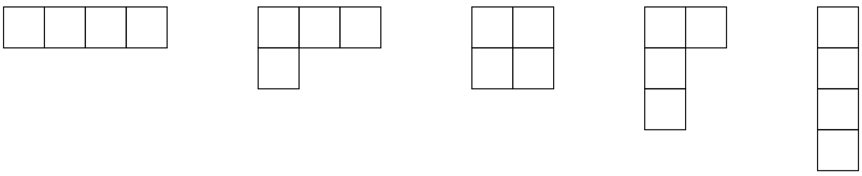
□

9 Youngove polstandardne tabele

Youngovi diagrami in polstandardne tabele so ime dobile po britanskemu matematiku Alfredu Youngu. V nadaljevanju bomo s pomočjo pojmov, ki jih bomo spoznali v tem poglavju, definirali naslednjo družino simetričnih funkcij.

Definicija 13. ***Youngov diagram*** *je nabor celic, zbranih v levo poravnanih vrsticah, ki se proti dnu diagrama krajšajo. Število vrstic in celic v posamezni vrstici je določeno s particijo* λ *nenegativnega števila* n*. Število vrstic je določeno z* $l(\lambda)$*, število celic v* i*-ti vrstici pa z* λ_i*.*

Primer 8. *Za* $\lambda \vdash 4$ *so vse možne oblike Youngovih diagramov prikazane na sliki 1.*



Slika 1: Youngovi diagrami oblik 4, 31, 22, 211 in 1111.

Definicija 14. ***Youngova polstandardna tabela*** *je Youngov diagram z vstavljenimi pozitivnimi naravnimi števili, ki po vrstici šibko, po stolpcu pa strogo naraščajo. Vsaka izmed števil se lahko v tabeli pojavi več kot enkrat. Tabeli, v kateri se števila ne ponavljajo, rečemo* ***Youngova standardna tabela****.*

Youngovi polstandardni tabeli T lahko določimo obliko in tip. Oblika $sh(T)$ je enaka $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$, kjer je λ particija in λ_i število celic v vrstici i. Tip $type(T)$ je enak $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, kjer je α_i število pojavitev i v T.

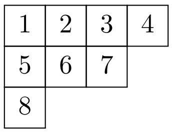
Primer 9. *Oglejmo si nekaj primerov Youngovih polstandardnih tabel. Na sliki 2 je prikazana ena izmed Youngovih polstandardnih tabel oblike* 431 *in tipa* $(4, 3, 1)$*, na sliki 3 pa ena izmed Youngovih standardnih tabel oblike* 431 *in tipa* $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$*.*

1	1	1	1
2	2	2	
3			

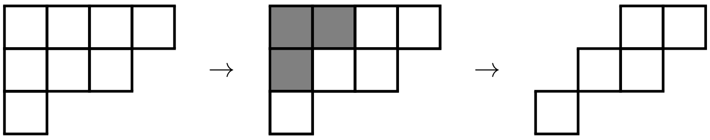
Slika 2: Youngova polstandardna tabela oblike 431 in tipa $(4, 3, 1)$.

Obliko Youngovega diagrama lahko določata tudi dve particiji (npr. λ in μ), kjer nam druga (μ) pove, katere izmed celic v diagramu izbrišemo. Obliko Youngovega diagrama, ki jo določimo s particijama λ in μ, zapišemo kot λ/μ.

Primer 10. *Na sliki 4 je prikazan Youngov diagram oblike* λ/μ *za* $\lambda = 431$ *in* $\mu = 21$*.*



Slika 3: Youngova standardna tabela oblike 431 in tipa $(1,1,1,1,1,1,1,1)$.



Slika 4: Youngov diagram oblike 431/21.

10 Schurove funkcije

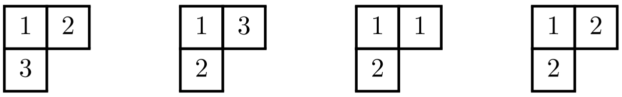
Oglejmo si še drugo družino simetričnih funkcij, ki so ime dobile po ruskemu matematiku Issaiu Schuru. Schurove funkcije definiramo s pomočjo Youngovih polstandardnih tabel.

Definicija 15. *Za $\lambda \in Par$ definiramo* ***Schurove funkcije*** *kot*

$$s_\lambda(x) = \sum_{sh(T)=\lambda} x^T,$$

kjer je T Youngova polstandardna tabela in $x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} x_3^{\alpha_3(T)} \cdots$.

Primer 11. *Za lažjo predstavo narišimo Youngove polstandardne tabele oblike 21 in tipov $(1,1,1)$, $(2,1)$ in $(1,2)$. Youngova polstandardna tabela oblike 21 in tipa (3) ne obstaja, prav tako ne obstaja Youngova polstandardna tabela oblike 21 in tipa $(1,1,1)$.*



Slika 5: Youngove polstandardne tabele oblike 21 in tipov $(1,1,1)$, $(2,1)$ in $(1,2)$.

Schurova funkcija za $\lambda = 21$ je tako enaka

$$\begin{aligned} s_{21}(x) &= x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots \\ &+ x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots \\ &+ x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots \\ &+ x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + \cdots \\ &= 2x_1x_2x_3 + 2x_1x_3x_4 + \cdots \\ &+ x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots \\ &+ x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Nekateri produkti z enakimi stopnjami in indeksi se pojavijo večkrat, zato jih lahko združimo, kot vidimo pri zadnji enakosti. Koeficiente, ki jih na ta način dobimo, imenujemo **Kostkova števila** in jih označimo s $K_{\lambda\alpha}$, kjer je $\lambda \in Par$ in $\alpha \vDash |\lambda|$. Na zgornjem primeru smo tako videli, da je $K_{21,111} = 2$.

Ko Schurove funkcije zapišemo s Kostkovimi števili, dobimo

$$s_\lambda(x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots) \\ \alpha\vDash|\lambda|}} K_{\lambda\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots .$$

Oglejmo si dve lepi lastnosti Kostkovih števil.

Trditev 3. *Za $\lambda, \mu \in Par$ imajo Kostkova števila naslednji lastnosti:*

1. $K_{\lambda\lambda} = 1$,
2. $K_{\lambda\mu} = 0$, *razen če je $\mu \leq \lambda$, kjer je $\leq$ relacija dominance.*

Dokaz. Naj bosta $\lambda, \mu \in Par$ poljubni particiji.

1. Ker sta oblika in tip enaka, lahko števila razporedimo na en sam način, da bo Youngova polstandardna tabela veljavna. Enka se bo pojavljala po celotni prvi vrstici, dvojka po drugi in podobno tudi ostale.
2. Enka ne more biti hkrati v prvi in drugi vrstici zaradi pogoja strogega naraščanja po vrsticah Youngove polstandardne tabele. Število enic μ_1 je torej manjše ali enako številu celic v prvi vrstici, torej λ_1. Po podobnem razmisleku se enke in dvojke lahko pojavijo le v prvi in drugi vrstici, torej je $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Za poljuben $k \in \mathbb{N}$ je torej

   $$\sum_{1\leq i\leq k} \mu_i \leq \sum_{1\leq i\leq k} \lambda_i,$$

   sledi $\mu \leq \lambda$. V nasprotnem primeru Youngova polstandardna tabela ne obstaja in je Kostkovo število enako 0.

□

Ker lahko Youngovo polstandardno tabelo določimo tudi z dvema particijama, je smiselno gledati tudi Schurove funkcije za λ/μ, kjer sta $\lambda, \mu \in Par$. Zapišemo lahko

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{sh(T)=\lambda/\mu} x^T.$$

Trditev 4. *Za $\lambda, \mu \in Par$ je $s_{\lambda/\mu}$ simetrična funkcija.*

Dokaz. Vemo že, da lahko poljubno permutacijo π zapišemo kot produkt transpozicij oblike $(i,\ i+1)$, kjer je $i \in \mathbb{N}$, torej lahko trditev dokažemo le za transpozicije te oblike.

Naj bosta $\lambda, \mu \in Par$. Dokazujemo, da je $s_{\lambda/\mu}$ simetrična funkcija, torej mora po definiciji veljati

$$s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, x_3, \dots) = s_{\lambda/\mu}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, \dots).$$

Da bo to res, morajo biti koeficienti pri x^α enaki koeficientom pri $x^{\tau(\alpha)}$, kjer je τ poljubna transpozicija oblike $(i,\ i+1)$ za $i \in \mathbb{N}$.

Iščemo bijekcijo, ki bo Youngovo polstandardno tabelo T oblike λ/μ in tipa $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)$ preslikala v Youngovo polstandardno tabelo T' oblike λ/μ in tipa $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots)$. Bijekcija v tabeli T pusti števila, različna od i in $i+1$, na istih mestih. Prav tako ne spreminja tistih i, ki imajo pod seboj $i+1$ ter tistih $i+1$, ki imajo nad seboj i. Ostala števila i in $i+1$ zamenja, kot je predstavljeno na slikah 6 in 7.

Hitro se lahko prepričamo, da smo z bijekcijo ohranili veljavno Youngovo polstandardno tabelo, saj števila po vrsticah še vedno šibko naraščajo, strogo naraščanje po stolpcih pa sledi iz dejstva, da so nad členi, ki se zamenjajo, strogo manjše vrednosti od i, pod njimi pa strogo večje vrednosti od $i+1$. To pomeni, da teh stolpcev z menjavo nismo mogli "pokvariti". Prav tako lahko vidimo, da je število pojavitev i v T' enako številu pojavitev $i+1$ v T, število pojavitev $i+1$ v T' pa enako številu pojavitev i v T. Ostala števila se v obeh tabelah pojavljajo enakokrat. □

							i	i	i
i	i	i	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$
$i+1$									

Slika 6: Youngova polstandardna tabela T.

							i	i	i
i	i	i	i	i	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$	$i+1$
$i+1$									

Slika 7: Youngova polstandardna tabela T', ki jo dobimo, ko z bijekcijo preslikamo Youngovo polstandardno tabelo T.

11 Zaključek

V članku smo predstavili pojem simetrične funkcije in nato z znanjem o permutacijah, particijah in Youngovih polstandardnih tabelah razumeli monomske simetrične funkcije in Schurove funkcije.

Literatura

[1] Zapiski predavanj predmeta Kombinatorika prof. dr. Matjaža Konvalinke (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2018/2019).

[2] E. S. Egge, *An introduction to symmetric functions and their combinatorics*, American Mathematical Soc., 2019.

[3] *Permutacija*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 3. 8. 2023], dostopno na `https://sl.wikipedia.org/wiki/Permutacija`.