Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$

Katarina Grilj, Ema Hojan, Matija Skrt
Mentor: Jan Genc

Povzetek

V članku sta definirani topologija in kompaktnost ter predstavljene lastnosti kompaktnih prostorov. Definirana je produktna topologija in dokazana ekvivalenca med kompaktnostjo množice in zaprtostjo ter omejenostjo množice v $\mathbb{R}^n$.

1 Uvod

Moj narod je že od nekdaj gojil borbenost. Borbenost ni lastnost množic, kompaktnost pa je. Zelo zagnani, da bi se naučili uporabljati lastnosti kompaktnih množic in končno razumeli slavno šalo o fizikih, smo se podali na pot odkrivanja MaRSovskega sveta topologije.

V matematiki se pri dokazovanju nečesa specifičnega pogosto splača ogledati si posplošitev določenih akcidenc strukture, ki nas zanima. Ko se osredotočimo na bistveno lastnost objekta in iz njega odstranimo vse odvečno in manj pomembno, postanejo naš miselni tok in logične kreacije, ki iz njega sledijo, veliko jasnejše, preprostejše in lepše, kot smo si lahko predstavljali

na začetku, ko smo kot noj tiščali glavo v zemljo ter poskušali tam odkriti nekaj, kar sedaj dojamemo za veliko večje, pomembnejše in bolj estetsko. Ko se, tako rekoč, povzpnemo visoko na goro in ugledamo bistrejše pojmovanje zanimanega, pa se nam odpre pogled tudi na specifične primere, ki so sprožili našo radovednost in interes.
A od kod motivacija za preučevanje kompaktnosti? Od kod sploh definicija kompaktnosti? Za zainteresiranega bralca smo med literaturo vključili povezavo do **spletnega članka**, ki poskuša odgovoriti na prav to vprašanje in ga priporočamo vsem, ki jih zanima motivacija za tem nenavadnim konceptom. Kot primer motivacije, ki se nam zdi posebej močan, navajamo naslednjo lemo, ki jo je dokazal francoski matematik Émile Borel leta 1894 in jo tudi mi dokažemo v članku:

Lema 1. *Če zaprt interval $[a, b]$ povsem prekrijemo s poljubno neskončno množico A odprtih intervalov, ki imajo lahko med seboj tudi neprazne preseke, lahko vedno najdemo končno podmnožico množice A, ki prav tako pokrije celoten interval $[a, b]$.*

Iz te izredno zanimive in elegantne lastnosti zaprtih intervalov pa lahko, kot bomo videli kasneje, ustvarimo splošno lastnost topološkega prostora, ki jo imenujemo kompaktnost. Vprašamo se, ali morda pod to lastnostjo specifičnega objekta v $\mathbb{R}$ leži nekaj zares lepega tudi v splošnem? V ta namen si bomo najprej pogledali nekatere splošne lastnosti topoloških prostorov in se šele nato spustili v intuitivni prostor $\mathbb{R}^n$, kjer bomo spoznali, kako se obča lepota topologije prenese v vsakdanji evklidski prostor, katerega globlje skrivnosti si tako zelo želimo odkriti.

2 Topologija

V tem poglavju bomo navedli in na kratko raziskali osnove topologije, z namenom, da bralca seznanimo s strukturami, ki jih bomo pozneje potrebovali. Za začetek si oglejmo definicijo topologije.

Definicija 1. *Naj bo X neprazna množica in τ družina množic, tako da $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, za katero velja:*

- *množici $\emptyset$ in X sta v τ,*
- *kadarkoli sta dve ali več množici v τ, potem je tudi njuna/njihova unija v τ,*
- *analogno velja za končen presek množic v τ.*

*Z oznako (X, τ) označujemo **topološki prostor** X **s topologijo** τ. Množice v τ imenujemo **odprte množice**, elemente množice X pa **točke** topološkega prostora. Komplementom odprtih množic pravimo **zaprte množice**.*

Oglejmo si nekaj zgledov, ki nam bodo nekoliko razsvetlili to zapleteno definicijo.

Zgled 1. *Topologijo $\tau = \{X, \emptyset\}$, definirano na množici X, imenujemo trivialna topologija.*

Zgled 2. *Topologijo $\tau = \mathcal{P}(X)$, definirano na množici X, imenujemo diskretna topologija.*

Zgled 3. *Topološki prostor $\{X, \tau\}$, kjer je $X = \{a, b\}$ in $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$, imenujemo **prostor Sierpińskega**.*

Pogosto želimo raziskovati le lastnosti nekega podprostora danega topološkega prostora. Naslednja definicija in izrek nam bosta pokazala, kako lahko topologijo definirano na celotnem prostoru na enostaven način priredimo na želen podprostor.

Definicija 2. *Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$. Če na A definiramo topologijo τ_A kot množico vseh presekov A z vsemi odprtimi množicami v X, potem (A, τ_A) imenujemo **topološki podprostor** prostora (X, τ).*

Izrek 1. *Topološki podprostor (A, τ_A) je topološki prostor. Topologiji τ_A pravimo* ***podedovana topologija****.*

Dokaz. Trditev dokažemo tako, da po vrsti preverimo, ali (A, τ_A) zadošča definiciji topološkega prostora:

- Očitno sta prazna množica in množica A v τ_A.
- Denimo, da je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ unija odprtih množic v A. Iz definicije podedovane topologije sledi, da za vsak M_λ obstaja tak $N_\lambda \in \tau$, da velja $N_\lambda \cap A = M_\lambda$. Velja torej $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap N_\lambda) = A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$. Ker pa je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ odprta v X, sledi, da je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \in \tau_A$, kar smo želeli dokazati.
- Za končne preseke je dokaz analogen.

□

Zgled 4. *Podprostori trivialnega prostora so trivialni, podprostori diskretnega pa diskretni.*

Pri nadaljnem dokazovanju bomo potrebovali tudi naslednji pojem:

Definicija 3. *Naj bo (X, τ) topološki prostor. Če za vsaki različni točki a in b v X obstajata odprti množici U in V, tako da $a \in U$, $b \in V$ in $U \cap V = \emptyset$, potem je (X, τ)* ***Hausdorffov prostor*** *oziroma T_2. Ker vsaki dve točki v X zadoščata opisanemu kriteriju pravimo, da lahko poljubni točki* ***ostro ločimo****.*

Zgled 5. *Preverimo ali so naslednji prostori Hausdorffovi:*

- *Če $|X| \geqslant 2$, trivialni prostor ni Hausdorffov, saj bi po definiciji Hausdorffovega prostora morali ostro ločiti poljubni različni točki, vsaka pa ima le eno odprto množico, v kateri je vsebovana - X. Protislovje.*
- *Diskretni prostor je Hausdorffov, ker so v njem vse točke odprte množice.*
- *Prostor Sierpińskega ni Hausdorffov prostor, saj točk a in b ne moremo ostro ločiti.*

Preden našo pozornost usmerimo na kompaktnost, si oglejmo še naslednjo definicijo, ki nam bo prišla zelo prav v prihodnje.

Definicija 4. *Naj bo (X, τ) poljuben topološki prostor. Pravimo, da množica M tvori* ***bazo topologije*** *τ, če za vsako odprto množico A obstaja podmnožica N množice M, da lahko A zapišemo kot unijo elementov množice N.*

3 Kompaktnost

V tem delu članka si bomo v skladu z našim končnim ciljem pogledali splošno definicijo kompaktnosti. Spoznali bomo tudi nekaj lastnosti kompaktnih prostorov, ki nam bodo pokazali vrednost preučevanja kompaktnosti v splošnem. Oglejmo si najprej definicijo odprtega pokritja, podpokritja in nadpokritja.

Definicija 5. *Naj bo X množica in U_λ take odprte podmnožice množice X, da velja $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Potem je $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$* ***odprto pokritje*** *množice X.*
Če velja $X = \bigcup_{\delta\in\Delta} U_\delta$ za neko množico $\Delta \subseteq \Lambda$, imenujemo $\{U_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ ***podpokritje*** *pokritja $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ prostora X.*
Nazadnje, če velja $A \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$, za neke odprte množice $V_\gamma \in X$, pravimo množici $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ***odprto nadpokritje*** *prostora (A, τ_A), kjer je τ_A seveda podedovana topologija.*

Sedaj lahko končno definiramo kompaktnost.

Definicija 6. *Naj bo (X, τ) topološki prostor. Če za vsako odprto pokritje $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ prostora X obstaja njegovo končno podpokritje $\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ prostora X, pravimo, da je (X, τ)* ***kompakten prostor****.*

Opomba 1. *Naj bo A podprostor topološkega prostora (X, τ) s podedovano topologijo τ_A. Prostor (A, τ_A) je kompakten natanko tedaj, ko ima vsako odprto nadpokritje $P \subseteq \tau$ prostora A končno podpokritje $Q \subseteq \tau$.*
Ta ekvivalenca velja, saj vsakemu pokritju $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda; U_\lambda \in \tau_A$ prostora (A, τ_A) lahko priredimo nadpokritje $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda; V_\lambda \in \tau \wedge U_\lambda = A \cap V_\lambda$ in obratno. Torej, če $A \subseteq X$, lahko kompaktnost A dokazujemo kar z nadpokritji v originalnem prostoru (X, τ).

Opomba 2. *Kompaktnost lahko preverjamo le na bazi topologije. Če ima namreč vsako pokritje X z baznimi množicami končno podpokritje, ga ima očitno tudi vsako drugo pokritje, ki je sestavljeno iz množic, ki so unije ali preseki baznih množic. To zelo očitno in intuitivno dejstvo se pogosto izkaže za veliko bolj prikladen način dokazovanja kompaktnosti, saj nam omogoča večjo mero nadzora nad obravnavanimi pokritji.*

Poglejmo si nekaj zgledov kompaktnih in nekompaktnih prostorov.

Zgled 6. *Končen prostor je vedno kompakten, saj so vsa odprta pokritja končnega prostora končna.*

Zgled 7. *Neskončen prostor z diskretno topologijo ni kompakten, saj za prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ pokritje $\{a \mid a \in X\}$ očitno nima končnega podpokritja.*

Dokažimo sedaj dva izreka, ki nam bosta dala dobro intuicijo glede povezave med kompaktnostjo in koncepti definiranimi v prejšnjem poglavju ter tvorila osnovo za dokazovanje lastnosti podprostorov $\mathbb{R}^n$.

Izrek 2. *Kompakten podprostor Hausdorffovega prostora je zaprt.*

Dokaz. Naj bo X Hausdorffov prostor in K njegov kompakten podprostor. Če bi bil K zaprt, bi moral biti K^c odprt. Dovolj je torej dokazati, da lahko K^c zapišemo kot unijo odprtih množic.
Oglejmo si vse takšne točke T_λ, $\lambda \in \Lambda$, da velja $K = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ in poljubno točko $P \in K^c$. Ker je X Hausdorffov prostor vemo, da za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstajata taki disjunktni odprti množici U_λ in V_λ, da velja $P \in U_\lambda$ in $T_\lambda \in V_\lambda$, kjer je $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ očitno odprto pokritje K. Ker pa je K kompakten, obstaja $n \in \mathbb{N}$ in $V_1, \ldots, V_n \in \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, da je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ končno podpokritje K.
Naj bo $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$. Ker je U končen presek odprtih množic, velja $U \in \tau$. Hkrati pa velja tudi $U \cap K = \emptyset$, s čimer smo dokazali, da lahko P ostro ločimo od vsake točke v K. Za vsako točko $P \in K^c$ torej obstaja odprta množica, ki to točko vsebuje in ima s K prazen presek. Unija vseh takih odprtih množic pa je ravno K^c, kar dokaže, da je K res zaprt. □

Izrek 3. *Zaprt podprostor kompaktnega prostora je kompakten.*

Dokaz. Naj bo K kompakten prostor in $Z \subseteq K$ zaprt podprostor s podedovano topologijo. Ker je Z zaprt, velja $Z^c \in \tau$. Naj bodo U_λ, kjer $\lambda \in \Lambda$, take odprte podmnožice K, da je $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ odprto nadpokritje Z. Vemo torej, da je $Z^c \cup \left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right)$ odprto pokritje K. Ker pa je K kompakten prostor, mora obstajati končno podpokritje našega pokritja, torej tak $n \in \mathbb{N}$ in $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, da je $Z^c \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \right)$ odprto pokritje K. Vemo pa, da je potem $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ končno odprto podpokritje Z, saj imata Z^c in Z prazen presek. S tem smo dokazali, da je Z kompakten prostor. □

4 Produktna topologija

Ali obstaja preprosta razširitev topologij dveh topoloških prostorov, ki definira topologijo na njunem kartezičnem produktu? Izkaže se, da namen doseže kar najintuitivnejša razširitev - produkt topologij samih.

Definicija 7. *Naj bosta* (X, τ_X) *in* (Y, τ_Y) *topološka prostora. Potem topologijo* τ_P *z bazo*

$$\{U \times V; U \in \tau_X \wedge V \in \tau_Y\}$$

imenujemo ***produktna topologija*** *topološkega prostora* $(X \times Y, \tau_P)$.

Zlahka preverimo, da smo s tem zares definirali topologijo, saj:

- $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ in $X \times Y = X \times Y$, torej res velja $X \times Y, \emptyset \in \tau$,
- Vsako odprto množico lahko zapišemo kot unijo baznih množic, torej je poljubna unija odprtih množic prav tako odprta,
- $\bigcap\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} (X_i \times Y_i) = \left(\bigcap\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} X_i\right) \times \left(\bigcap\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} Y_i\right)$, torej je poljuben končen presek odprtih množic prav tako odprt.

τ_P torej zares zadošča vsem lastnostim topologije.
Ali imajo produkti topoloških prostorov kakšne lepe lastnosti? V skladu z osrednjim vprašanjem članka, nas seveda posebej zanima, kdaj je produkt prostorov kompakten. Imamo že dovolj znanja, da lahko dokažemo naslednji izrek, ki nam bo pokazal, da se kompaktnost vedno prenese s posameznih faktorjev na njihov produkt.

Izrek 4. *Končen produkt kompaktnih prostorov je kompakten.*

Dokaz. Ker izrek dokazujemo zgolj za končno število kompaktnih prostorov, je trditev dovolj dokazati za dva prostora, indukcija pa poskrbi za preostanek dokaza. Naj bosta torej (X, τ_X) in (Y, τ_Y) kompaktna topološka prostora. Potem želimo dokazati, da je prostor $(X \times Y, \tau_P)$ s produktno topologijo τ_P kompakten. Dovolj je torej dokazati, da ima vsako odprto pokritje $X \times Y$ končno podpokritje. Naj bo $K = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda)$ odprto pokritje $X \times Y$, kjer je $U_\lambda \in \tau_X$ in $V_\lambda \in \tau_Y$ za vse $\lambda \in \Lambda$. Kompaktnost torej preverjamo na bazi. Konstruirali bomo končno podpokritje pokritja K.
Oglejmo si najprej prostor $\{a\} \times Y$, za nek poljuben $a \in X$. Iz definicije produktne topologije sledi, da obstaja odprto pokritje $\bigcup\limits_{\delta \in \Delta} V_\delta$ prostora Y,

kjer velja $(U_\delta \times V_\delta) \cap (\{a\} \times Y) \neq \emptyset$. Ker pa je Y kompakten, obstaja neko končno podpokritje $V_{a_1} \cup V_{a_2} \cup \ldots \cup V_{a_{n_a}}$ pokritja $\bigcup_{\delta \in \Delta} V_\delta$ prostora Y. Sledi, da je $(U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \ldots \cup (U_{a_{n_a}} \times V_{a_{n_a}})$ končno pokritje prostora $\{a\} \times Y$. Tako dobimo odprto pokritje $C = \bigcup_{a \in X} \left(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \ldots \cap U_{a_{n_a}}\right)$ prostora X. Ker pa je X kompakten, obstaja končno podpokritje D pokritja C. Torej velja $D = \bigcup_{a \in A} \left(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \ldots \cap U_{a_{n_a}}\right)$, za neko končno podmnožico $A \in X$. Od tod pa sledi, da je

$$\bigcup_{a \in A} \left((U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup (U_{a_2} \times V_{a_2}) \cup \ldots \cup \left(U_{a_{n_a}} \times V_{a_{n_a}}\right)\right)$$

končno podpokritje prostora $X \times Y$, kar smo želeli dokazati. $\square$

5 Kompaktnost prostorov v $\mathbb{R}^n$

V zadnjem delu članka si bomo ogledali, kako se splošne definicije topologije, pokritja in kompaktnosti prenesejo v podprostore $\mathbb{R}^n$.
Osvežimo za začetek nekatere osnovne definicije, ki jih bralec najverjetneje že pozna iz osnovne analize.

Definicija 8. *$\mathbb{R}^n$ je množica vseh urejenih n-teric, katerih komponente so realna števila.*

Za lažjo predstavo:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}. \quad \text{(produkt } n\text{-členov } \mathbb{R})$$

Definicija 9. ***Kvader** v $\mathbb{R}^n$ je množica oblike $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, kjer $-\infty < a_i < b_i < \infty$.*

Definicija 10. *Definiramo **odprto kroglo** v $\mathbb{R}^n$ s središčem v $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ in radijem r kot*

$$K(a, r) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - x_i)^2} = |a - x| < r \right\}.$$

Definicija 11. *Množico $\mathbb{R}^n$ opremimo z **evklidsko topologijo** τ_e tako, da vzamemo za bazo topologije τ_e množico vseh odprtih krogel.*

V nadaljevanju opremimo vse prostore z evklidsko topologijo, izhodišče koordinatnega sistema pa označimo z I.

Poglejmo si zgled nekompaktnega prostora s podedovano evklidsko topologijo.

Zgled 8. *Interval* $(0,1)$ *ni kompakten. Pokritje* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ *namreč nima končnega podpokritja. To lahko dokažemo s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja tak* $n \in \mathbb{N}$ *in* $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{N}$*, da je* $\bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i}, 1\right)$ *odprto pokritje intervala* $(0,1)$*. Brez škode za splošnost naj bo* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$*. Potem vemo, da* $\frac{1}{a_1} \in (0,1)$*, vendar* $\frac{1}{a_1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i}, 1\right)$*, protislovje.*

Definicija 12. *Naj bo* $M \subseteq \mathbb{R}$ *množica. Število* $s \in \mathbb{R}$ *je* ***supremum množice*** M*, če velja:*

- $s \geq m$ *za vsak* $m \in M$
- $\forall \varepsilon > 0$*, obstaja tak* $x \in M$*, da* $x \in (s - \varepsilon, s]$

Prvi pogoj nam pove, da je s zgornja meja množice M, drugi pogoj pa nam pove, da je to najnižja zgornja meja.

Aksiom 1. ***Dedekindov aksiom.*** *Vsaka neprazna navzgor omejena množica ima supremum.*

Definicija 13. *Množica* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *je* ***omejena****, če obstaja neka odprta/zaprta krogla* $K(I, r)$ *za nek* $0 < r < \infty$*, da je* $M \subseteq K(I, r)$*.*

Sedaj se z osveženim spominom lahko vrnemo k dokazovanju. Ker smo končno definirali evklidsko topologijo, lahko dokažemo dokaj očitno trditev, da je $\mathbb{R}^n$ Hausdorffov.

Izrek 5. $\mathbb{R}^n$ *je Hausdorffov.*

Dokaz. Naj bosta A in B točki v $\mathbb{R}^n$ in naj bo M razpolovišče daljice AB. Poglejmo si odprti krogli s središčema v A in B ter s polmeroma AM in BM. Ker sta krogli disjunktni, smo s tem ostro ločili poljubni točki A in B. $\square$

Naslednji izrek bo močno omejil naše raziskovanje kompaktnih prostorov v $\mathbb{R}^n$.

Izrek 6. *Vsak kompakten podprostor* $\mathbb{R}^n$ *je omejen.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Denimo, da obstaja kompakten $K \subseteq \mathbb{R}^n$, ki je neomejen. Oglejmo si pokritje $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(I,n)$ prostora K. Po definiciji kompaktnosti obstaja končno podpokritje

$$K(I,n_1) \cup K(I,n_2) \cup \ldots \cup K(I,n_k)$$

množice K, za neke $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \in \mathbb{N}$. Od tod sledi $K \subseteq K(I,n_k)$. Ker pa smo predpostavili, da je K neomejen, smo prišli do protislovja, kar zaključi dokaz. □

Naravno vprašanje, ki se samo postavlja, je, ali sploh obstajajo kakšni preprosti, vsakdanji prostori v $\mathbb{R}^n$, ki so kompaktni? Naslednji izreki nam bodo pokazali, da do sedaj dokazani splošni izreki niso samo elegantni in lepi sami po sebi, temveč nam nudijo vpogled tudi v pomembne lastnosti prostorov, s katerimi se najpogosteje srečujemo v analizi.

Izrek 7. *Naj bosta* $a < b$ *poljubni realni števili. Potem je interval* $[a,b]$ *kompakten.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Naj bo $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ neko odprto nadpokritje $[a,b]$ brez končnega podpokritja. Definirajmo množico M vseh realnih $x \in [a,b]$, za katere ima interval $[a,x]$ končno podpokritje pokritja $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Množica M je očitno neprazna, saj obstaja taka odprta množica U_{λ_0}, ki vsebuje a in zato vsebuje tudi $a+\varepsilon$ za nek dovolj majhen $\varepsilon > 0$. Ker pa smo predpostavili, da $b \notin M$, je množica M navzgor omejena. Od tod pa sledi, da ima po Dedekindovem aksiomu supremum $x_0 \in (a,b)$. Naj bo U_0 odprta množica našega nadpokritja, ki vsebuje x_0. Vemo pa, da obstaja neka točka $c \in U_0$ manjša od x_0, za katero obstaja končno podpokritje intervala $[a,c]$ našega začetnega nadpokritja. Obstaja pa tudi nek majhen $\varepsilon > 0$, da velja $x + \varepsilon \in U_0$. Od tod sledi, da obstaja končno podpokritje intevala $[a, x+\varepsilon]$, namreč unija U_0 in pokritja intervala $[a,c]$, kar je v protislovju z dejstvom, da je x_0 supremum množice M. Sledi, da ima vsako pokritje $[a,b]$ končno podpokritje, kar smo želeli dokazati. □

Z našim znanjem o produktni topologiji lahko sedaj enostavno dokažemo kompaktnost vseh kvadrov.

Izrek 8. *Kvadri so kompaktni v* $\mathbb{R}^n$

Dokaz. Trditev je direktna posledica definicije kvadra in izreka **4** ter izreka **7**. $\square$

Končno smo pripravljeni, da popolnoma kategoriziramo vse kompaktne prostore v $\mathbb{R}^n$.

Izrek 9. *(Heine, Borel, Lebesgue) Podprostor $\mathbb{R}^n$ je kompakten v $\mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je zaprt in omejen.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali v vsako smer posebej. Naj bo K podprostor $\mathbb{R}^n$.

$(\implies)$:
Naj bo prostor K kompakten v $\mathbb{R}^n$. Iz izreka **6** sledi, da je prostor K omejen. Ker pa je $\mathbb{R}^n$ Hausdorffov sledi po izreku **2**, da je K zaprt.

$(\impliedby)$:
Naj bo prostor K zaprt in omejen v $\mathbb{R}^n$. Ker je prostor K omejen, je po definiciji vsebovan v odprti krogli $K(I, R)$, z dovolj velikim $R \in \mathbb{R}^+$. Ta pa je seveda vsebovana v zaprtem kvadru $[-R, R]^n$. Od tod sledi, da je tudi K vsebovan v tem zaprtem kvadru, ki je po izreku **8** kompakten v $\mathbb{R}^n$. Sedaj pa nam izrek **3** pove, da je prostor K kompakten v $\mathbb{R}^n$, kar smo želeli dokazati. $\square$

6 Zaključek

V projektu smo se spoznali s pojmi topologije, kot so topološki prostor, odprte in zaprte množice, Hausdorffov prostor in odprto pokritje. Seznanili smo se s konceptom kompaktnosti in naše pridobljeno znanje uporabili za preučevanje lastnosti kompaktnih množic. Na podlagi tega smo klasificirali vse kompaktne podprostore v $\mathbb{R}^n$ in tako dokazali, da so vsi kompakti v $\mathbb{R}^n$ natanko zaprti in omejeni podprostori $\mathbb{R}^n$.

Literatura

[1] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.

[2] M. Raman-Sundström, *A pedagogical history of compactness*, 10. 6. 2014, pridobljeno 4. 8. 2023 z `https://arxiv.org/pdf/1006.4131.pdf`