Čudesa čudežne teorije grup

Eva Bračun, Gašper Grm, Katja Šimenc
Mentor: Izak Jenko

Povzetek

Ukvarjali smo se s simetrijami ravninskih vzorcev, ki so povezani s teorijo grup. Spoznali smo, kaj je grupa in kako lahko slikamo iz ene grupe v drugo. Definirali smo tapetne grupe. Nazadnje smo spoznali način označevanja ravninskih vzorcev, ki nam je pomagal pri njihovi klasifikaciji.

1 Uvod in terminologija

Simetrije splošnih (geometrijskih) objektov in v posebnem ravninskih vzorcev študiramo preko precej abstraktnih objektov imenovanih *grupe.* V tem poglavju si bomo ogledali definicijo grup in nekaj osnovnih pojmov povezanih z njimi.

Definicija 1. *Grupa* je množica G opremljena z binarno operacijo

$$* : G \times G \to G,$$

za katero veljajo naslednje lastnosti:

i.) *Asociativnost:* za vse a, b, $c \in G$ velja $(a * b) * c = a * (b * c)$.

ii.) *Enota:* obstaja tak $e \in G$, da za vse $a \in G$ velja $e * a = a * e = e$.

iii.) *Inverzi:* za vsak $a \in G$ obstaja tak $b \in G$, da velja $a * b = e$ in $b * a = e$.

Primer 1. Oglejmo si nekaj primerov grup.

i.) Primer grupe so cela števila ter operacija seštevanja. Označimo jo z $(\mathbb{Z}, +)$. Za seštevanje velja asociativnost, enota te grupe je 0, inverz poljubnega elementa x pa je $-x$.

ii.) Še en primer grupe je množica racionalih števil ter operacija seštevanja. Označimo jo s $(\mathbb{Q}, +)$. Enota te grupe je 0, inverz poljubnega elementa x pa je $-x$. Podobna primera grup sta $(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{C}, +)$.

iii.) Še en primer grupe je množica kompleksnih števil brez števila 0 ter operacija množenja. Označimo jo s $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Enota te grupe je 1, inverz poljubnega elementa x pa je x^{-1}.

v.) Primer grupe so tudi cela števila po modulu 3 ter operacija seštevanje z oznako $(\mathbb{Z}/3, +)$. Enota te grupe je 0, ki predstavlja ostanek 0 pri deljenju s 3. Inverz elementa x pa je $-x$.

Primer 2. Za boljšo predstavo si oglejmo še dva protiprimera.

i.) Množica naravnih števil ter operacija seštevanja z oznako $(\mathbb{N}, +)$ pa ni primer grupe, saj po definiciji v množici naravnih števil ni števila 0 ter zato enota ne obstaja. Inverzov pa tudi ni, saj med naravnimi števili ni negativnih števil. Tako ne moremo sešteti dveh naravnih števil in kot rezultat dobiti enote.

ii.) Za množico celih števil ter operacijo odštevanja z oznako $(\mathbb{Z}, -)$ pa *ne* velja asociativnost, saj v splošnem izraza $(a - b) - c$ in $a - (b - c) = a - b + c$ nista enaka.

1.1 Diedrska grupa

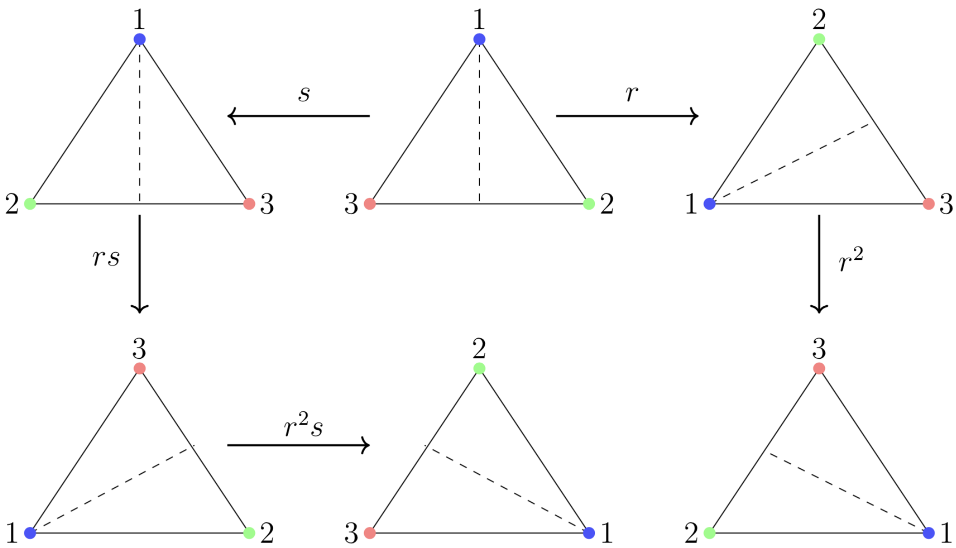
1.1.1 Izometrije enakostraničnega trikotnika

Na enakostraničnem trikotniku lahko izvajamo naslednje transformacije, ki ohranjajo njegovo obliko:

i.) **Rotacijo** označimo z r, ki v enakostraničnem trikotniku predstavlja rotacijo za kot $\frac{2\pi}{3} = 120°$ v pozitivni smeri. Enota e pa predstavlja rotacijo za kot $0°$.

ii.) **Zrcaljenje** označimo s s in v enakostraničnem trikotniku predstavlja zrcaljenje čez eno od težiščnic trikotnika. Dvojno zracljenje ustreza enoti, zato velja zveza $s^2 = e$.

Premislimo lahko, da velja relacija $sr = r^{-1}s$, in da relacija $sr = rs$ ne velja. Množico vseh 6 simetrij enakostraničnega tirkotnika skupaj s kompozicijo imenujemo *diedrska grupa* s šestimi elementi in ima oznako $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Vseh 6 simetrij enakostraničnega trikotnika vidimo na sliki 1.



Slika 1: Vseh 6 simetrij enakostraničnega trikotnika.

Definicija 2. *Splošna diedrska grupa* je definirana kot

$$D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\},$$

njeni elementi pa predstavljajo izometrije pravilnega n-kotnika.

1.2 Generatorji grup in redi

Grupe je pogosto lažje razumeti, če poznamo samo nekaj njenih ključnih elementov, ki jim pravimo *generatorji*. Igrajo vlogo osnovnih koščkov grupe, s katerimi lahko dobimo vse ostale. To natančneje opisuje naslednja definicija.

Definicija 3. Naj bo $(G, *)$ grupa. Rečemo, da podmnožica $X \subseteq G$ *generira* G, če lahko vsak element iz G zapišemo kot končni produkt elementov iz X in njihovih inverzov. To označimo z $\langle X \rangle = G$.

Primer 3. Množica celih števil $(\mathbb{Z}, +)$ je lahko generirana z $\{-1, 1\}$, $\{1\}$, $\{-1\}$. Diedrska grupa s šestimi elementi je generirana z množico $\{r, s\}$.

Definicija 4. Naj bo G grupa in $g \in G$. *Red* elementa g je najmanjše naravno število $n \in \mathbb{N}$, za katero velja, da je $g^n = e$, če takšen n obstaja. Če tak n ne obstaja, je red elementa g neskončen. Red označimo z $\mathrm{ord}(g) = n$.

Primer 4. Primer elementa reda 3 v grupi D_6 je rotacija enakostraničnega trikotnika r, saj velja $r^3 = e$ (ko trikotnik trikrat obrnemo za 120°, se vrnemo v začetno stanje) in $r^2 \neq e$.

Primer 5. Primer elementa z neskončnim redom, tj. $\mathrm{ord}(1) = \infty$, je število 1 v grupi $(\mathbb{Z}, +)$, saj vrednost $1 + 1 + \cdots + 1 = n \cdot 1$, za neki $n \in \mathbb{N}$, v množici $\mathbb{Z}$ ne bo nikoli dosegla enote 0.

2 Konstrukcije novih grup

2.1 Podgrupe

Pri množicah je uporabno in smiselno govoriti o podmnožicah, zato bi tudi pri grupah radi imeli analogen formalizem. V ta namen definiramo pojem *podgrupe*.

Definicija 5. Naj bo G grupa. Podmnožica $H \subseteq G$ je *podgrupa* grupe G, kadar je tudi H grupa za isto operacijo kot grupa G. To označimo s $H \leq G$.

Podgrupa vsake grupe je podgrupa $\{e\}$, t. i. *trivialna podgrupa*, ki vsebuje le enoto.

Primer 6. Podgrupa celih števil $(\mathbb{Z}, +)$ je množica sodih celih števil

$$2\mathbb{Z} = \{2k \in \mathbb{Z} | k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$$

skupaj z operacijo seštevanja. Vsota dveh sodih števil je še vedno sodo število, v množici $2\mathbb{Z}$ imamo element 0, ki je enota in za poljuben $2x \in 2\mathbb{Z}$ obstaja inverz $-2x \in 2\mathbb{Z}$. Zato je $(2\mathbb{Z}, +)$ podgrupa grupe $\mathbb{Z}$.

Primer 7. Primeri podgrup diedrske grupe $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ so $\{e\}$, $\{e, r, r^2\}$ in $\{e, s\}$.

2.2 Direktni produkt

Definicija 6. Naj bosta $(G, *)$ in $(H, \circ)$ grupi. Na množici urejenih parov $G \times H$ definirajmo produkt elementov (g, h) in (g', h') kot $(g * g', h \circ h')$. Za to operacijo je $G \times H$ grupa, ki jo imenujemo *direktni produkt* grup G in H. Enota te grupe je (e_G, e_H).

2.3 Presek podgrup

Naj bo G grupa z dvema podgrupama K in H. Imenujmo presek teh dveh podgrup E. Za E velja, da je podgrupa G. Naslednja trditev pokaže, da je E zaprta za operacijo $*$ grupe G.

Trditev 1. *Produkt elementov a in b iz preseka E je element preseka E.*

Dokaz. Če sta a in b oba elementa H, velja, da je tudi njun zmnožek v H. Enako lahko rečemo za K. Ker to velja za obe množici, pomeni, da je $a * b$ element preseka H ter K, torej je $a * b \in E$. $\square$

2.4 Homomorfizem grup

Tako kot množice med seboj primerjamo s preslikavami, bi radi primerjali tudi grupe. Vendar zgolj s preslikavami tega ne moremo storiti na ustrezen način, saj v splošnem te ne ohranjajo ključne strukture grup – njene operacije. Preslikavam, ki spoštujejo strukturo grup, rečemo *homomorfizmi* in jih definiramo v tem razdelku.

Definicija 7. *Homomorfizem grup* je preslikava $\phi : G \to H$, za katero velja $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$ za vse a in b, ki pripadajo G.

Primer 8. Primer homomorfizma je eksponenciranje iz grupe $(\mathbb{R}, +)$ v grupo $((0, \infty), \cdot)$. Naj bo $\phi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ preslikava podana s predpisom $x \mapsto e^x$. Ker velja $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, velja zveza $\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, torej je ϕ homomorfizem.

Lema 1. *Za vsak $g \in G$ obstaja natanko en inverz $h \in G$, za katerega velja $g * h = h * g = e$.*

Dokaz. Naj bosta h in k elementa G, za katera veljata naslednji zvezi

$$g * h = h * g = e,$$

$$g * k = k * g = e.$$

Drugo enačbo lahko vstavimo v enakost $h = h * e$ in dobimo

$$h = h * e = h * g * k = e * k = k.$$

Tako velja enakost $h = k$. □

Trditev 2. *Naj bo $\phi : G \to H$ homomorfizem. Potem je $\phi(e_G) = e_H$ in za vse $g \in G$ velja*

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Dokaz. Enoto grupe G pomnožimo samo s seboj

$$e_G = e_G * e_G.$$

Ker je ϕ homomorfizem, lahko zapišemo

$$\phi(e_G) = \phi(e_G * e_G) = \phi(e_G) * \phi(e_G).$$

Obe strani enačbe pomnožimo z inverzom elementa $\phi(e_G)$

$$e_H = \phi(e_G) * e_H = \phi(e_G).$$

Tako res velja $e_H = \phi(e_G)$. Pokažimo še, da za vsak $g \in G$ velja

$$\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}).$$

Ker je ϕ homomorfizem, velja

$$\phi(e_G) = \phi(g * g^{-1}) = \phi(g) * \phi(g^{-1}).$$

Celotno enačbo pomnožimo s $\phi(g)^{-1}$ z leve in s tem dokažemo enakost

$$\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}).$$

□

2.5 Jedro

V tem razdelku definiramo pojem *jedra* danega homomorfizma grup.

Definicija 8. Naj bo preslikava $\phi : G \to H$ homomorfizem. *Jedro* homomorfizma ϕ sestavljajo vsi elementi iz G, ki jih slika ϕ v enoto H. Jedro ima oznako $\ker \phi$ in zanj velja

$$\ker \phi = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}.$$

Trditev 3. *Naj bo $\phi : G \to H$ homomorfizem grup. Potem je $\ker \phi$ podgrupa grupe G.*

Dokaz. Da je element g v jedru ϕ lahko velja le, če je njegova slika v množici H enaka enoti H, torej

$$g \in \ker \phi \Leftrightarrow \phi(g) = e_H.$$

Naj bosta a in b elementa jedra homomorfizma ϕ, potem velja $\phi(a) = e_H$ in $\phi(b) = e_H$. Ker je ϕ homomorfizem, lahko ločimo zmnožek slik a in b

$$\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b) = e_H * e_H = e_H.$$

Zato zares velja

$$\phi(a * b) = e_H,$$

torej je $a * b \in \ker \phi$.

Ker vedno velja $\phi(e_G) = e_H$, kot smo pokazali v trditvi 2, je $e_G \in \ker \phi$.

Naj bo element g iz jedra $\ker \phi$ in pokažimo, da njegov inverz g^{-1} tudi leži v jedru $\ker \phi$. Ker je $g \in \ker \phi$, velja $\phi(g) = e_G$. Tedaj izračunamo

$$e_H = \phi(e_G) = \phi(g * g^{-1}) = \phi(g) * \phi(g^{-1}) = e_H * \phi(g^{-1}) = \phi(g^{-1}).$$

Torej je $\phi(g^{-1}) = e_H$ in zato je $g^{-1} \in \ker \phi$. □

Trditev 4. *Naj bo $\pi : G \to H$ homomorfizem in $a \in \ker \pi$ ter $g \in G$. Potem je*

$$gag^{-1} \in \ker \pi.$$

Dokaz. Ker je preslikava π homomorfizem, lahko izračunamo

$$\pi(gag^{-1}) = \pi(g) \cdot \pi(a) \cdot \pi(g)^{-1} = \pi(g) \cdot e_H \cdot \pi(g)^{-1} = \pi(g) \cdot \pi(g)^{-1} = e_H.$$

Tako zares velja enakost $\pi(gag^{-1}) = e_H$, torej je $gag^{-1} \in \ker \pi$. □

Definicija 9. *Izomorfizem* ψ: $G \to H$ je bijektivni homomorfizem med dvema grupama G in H. Kadar obstaja izomorfizem med grupama G in H, pravimo, da sta grupi G in H *izomorfni*, kar označimo z $G \cong H$.

Primer 9. Primer izomorfizma je preslikava iz grupe ostankov po modulu 3 v grupo rotacij enakostraničnega trikotnika. Ostanek 0 slikamo v rotacijo za kot $0°$, ostanek 1 v rotacijo za kot $120°$, ostanek 2 pa v rotacijo za kot $240°$.

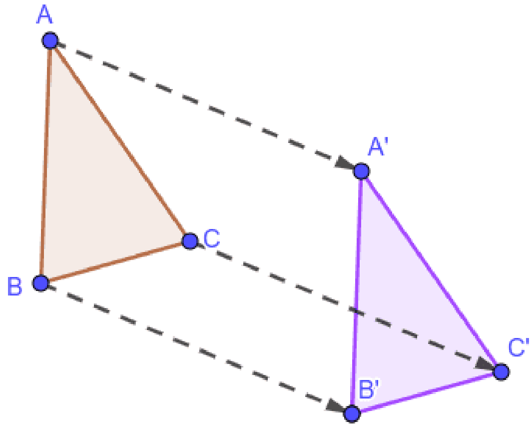
3 Evklidska grupa

Izometrija evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ je bijektivna preslikava $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki preslika ravnino samo vase in pri tem ohranja razdalje med poljubnima dvema točkama.

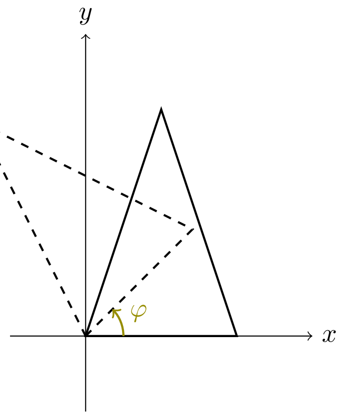
Definicija 10. *Evklidska grupa* $E(2)$ je grupa vseh izometrij evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$.

$$E(2) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ je izometrija}\}$$

Evklidska grupa obsega vse translacije, rotacije in zrcaljenja.



Slika 2: Primer translacije.



Slika 3: Primer rotacije.

3.1 Translacija

Translacija opisuje premik vseh točk iz ravnine vzdolž nekega vektorja. To pomeni, da vsak lik ohrani svojo obliko in velikost, le premakne se v določeno smer za določeno razdaljo. Translacija za vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ ima predpis

$$f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{w}.$$

3.2 Rotacija

Rotacije predstavimo s pomočjo matrik. Matrike so razpredelnice števil. Večinoma jih uporabljamo za zapis podatkov, ki so odvisni od dveh kategorij, in za preučevanje koeficientov sistemov linearnih enačb in linearnih transformacij. Element matrike A, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu (kjer vrstice in stolpce navadno štejemo od 1 naprej), se imenuje element i, j.

Naj bo Q_φ matrika 2×2, ki predstavlja rotacijo za kot φ okoli izhodišča. Poiščimo vrednosti njenih elementov. Začnimo s standardnima enotskima baznima vektorjema $\vec{i}$ in $\vec{j}$ s koordinatama

$$\vec{i} = (1, 0) \quad \text{in} \quad \vec{j} = (0, 1).$$

Če zavrtimo $\vec{i}$ za kot φ v pozitivni smeri okoli izhodišča, dobimo vektor

$$(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Če zavrtimo $\vec{j}$ za kot φ, dobimo vektor

$$(\cos(\varphi + 90^\circ), \sin(\varphi + 90^\circ)) = (-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Nato v prvi stolpec zapišemo koordinate zavrtenega vektorja $\vec{i}$, v drugega pa koordinate zavrtenega vektorja $\vec{j}$. Dobimo matriko, ki predstavlja rotacijo za kot φ v pozitivni smeri okoli izhodišča

$$Q_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

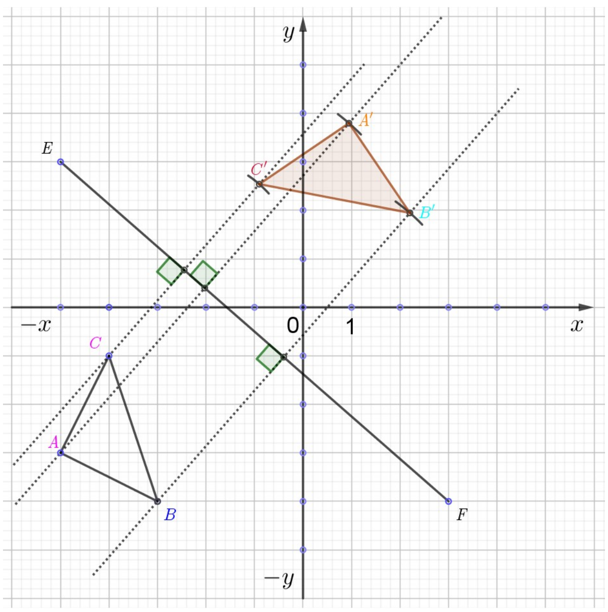
Za takšne matrike velja

$$Q_\psi \cdot Q_\varphi = Q_{\psi+\varphi}.$$

Ta zveza je razvidna iz računa

$$\begin{aligned} Q_\varphi \cdot Q_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \\ &= Q_{\varphi+\psi}. \end{aligned}$$

3.3 Zrcaljenje



Slika 4: Primer zrcaljenja.

Zrcaljenje v ravnini je transformacija, ki slika vsako točko na ravnini v točko, ki je enako oddaljena od določene osi zrcaljenja, leži na pravokotnici skozi izbrano točko in os zrcaljenja, vendar na nasprotni strani osi. Os zrcaljenja je premica, ki deli ravnino na dva dela.

Zrcaljenje predstavimo s pomočjo matrik. Najprej predstavimo zrcaljenje čez x-os. Pri tem se vektor $\vec{i}$ preslika sam vase, vektor $\vec{j}$ pa v $-\vec{j}$. S pomočjo teh podatkov izpeljemo matriko zrcaljenja čez x-os

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sedaj pa se lotimo še zrcaljenja preko poljubne osi, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. Denimo, da os zrcaljenja in pozitiven poltrak x-osi oklepata kot φ. Zrcalili bomo na način, da os zrcaljenja najprej zavrtimo za kot $-\varphi$, nato točko oziroma vektor zrcalimo prek x-osi in nazadnje spet vse skupaj, torej os zrcaljenja in točko oziroma vektor, zavrtimo za kot φ. Predpis za matriko, ki predstavlja to zrcaljenje, lahko izpeljemo na naslednji način

$$\begin{aligned} Q_\varphi \cdot S \cdot Q_\varphi^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matriko, ki predstavlja zrcaljenje čez premico, ki poteka skozi izhodišče in s pozitivnim poltrakom x-osi oklepa kot $\varphi/2$, označimo s S_φ, torej je

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Opazimo, da obstaja grupa, ki vsebuje vse rotacije okoli izhodišča kot tudi zrcaljenja čez premice, ki vsebujejo izhodišče. Imenuje se *ortogonalna grupa* in jo označimo z

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \middle| \phi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Sedaj pa moramo pokazati, da je to res grupa.

Trditev 5. *Množica $O(2)$ je grupa za kompozicijo oziroma operacijo množenja matrik.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je kompozicija poljubnih dveh elementov množice $O(2)$ tudi v $O(2)$.

Od prej že vemo, da je

$$Q_\psi \cdot Q_\varphi = Q_{\psi+\varphi}.$$

Nato izračunamo

$$\begin{aligned} S_\varphi \cdot S_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & -\sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix} = Q_{\varphi-\psi}. \end{aligned}$$

Ugotovimo, da je kompozicija poljubnih dveh zrcaljenj rotacija. S podobnim računom dokažemo

$$Q_\varphi \cdot S_\psi = S_{\varphi-\psi}.$$

Nazadnje izračunamo še

$$S_\varphi \cdot Q_\psi = S_{\varphi+\psi}.$$

Opazimo, da ta grupa ni komutativna.

Enota je matrika, ki vse točke preslika same vase. To pomeni, da se $\vec{i}$ preslika nazaj v $\vec{i}$ in $\vec{j}$ se preslika v $\vec{j}$. Kar pomeni, da je matrika enote

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ki jo imenujemo *identiteta* in jo označimo z I.

Nazadnje pokažimo še, da $O(2)$ vsebuje inverze vseh svojih elementov. Inverz rotacije za kot φ je rotacija za kot $-\varphi$, zato je

$$Q_\varphi^{-1} = Q_{-\varphi}.$$

Ker vemo, da velja $S_\varphi \cdot S_\psi = Q_{\varphi-\psi}$, sledi

$$S_\varphi \cdot S_\varphi = I.$$

Kar pomeni, da je S_φ sam sebi inverz, zato je

$$S_\varphi^{-1} = S_\varphi.$$

$\square$

Izkaže se, da je vsaka izometrija kompozicija translacij, rotacij in zrcaljenj, zato je podana s predpisom

$$\vec{v} \mapsto Q\vec{v} + \vec{w}.$$

Pokažimo, da je kompozicija dveh izometrij te oblike spet te oblike in poglejmo, kako izgleda njen predpis. Naj bosta $f \in E(2)$ in $g \in E(2)$ izometriji, podani s predpisoma

$$f : \vec{v} \mapsto Q\vec{v} + \vec{w} \qquad \text{in} \qquad g : \vec{v} \mapsto R\vec{v} + \vec{u}$$

za neke $\vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ in $Q, R \in O(2)$. Izračunamo

$$(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v})) = f(R\vec{v} + \vec{u}) = Q(R\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = QR\vec{v} + Q\vec{u} + \vec{w}.$$

Kompozicija $f \circ g$ je torej podana s predpisom

$$f \circ g : \vec{v} \mapsto QR\vec{v} + Q\vec{u} + \vec{w}, \tag{1}$$

kjer je jasno razvidno

$$QR \in O(2) \quad \text{in} \quad Q\vec{u} + \vec{w} \in \mathbb{R}^2.$$

Enota za kompozicijo funkcij je *identiteta*, ki je podana s predpisom

$$\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$$

in zanjo velja

$$f \circ \mathrm{id} = f \quad \text{in} \quad \mathrm{id} \circ f = f$$

za vse izometrije $f \in E(2)$.

Izpeljimo še predpis za inverz izometrije f s pomočjo predpisa (1) za kompozicijo dveh izometrij. Če predpostavimo, da je $f \circ g = \mathrm{id}$, lahko trdimo

$$\vec{v} = (f \circ g)(\vec{v}) = QR\vec{v} + Q\vec{u} + \vec{w}.$$

Ampak, če želimo, da to drži, mora veljati

$$QR = I \quad \text{in} \quad Q\vec{u} + \vec{w} = 0.$$

Iz tega izpeljemo

$$R = Q^{-1} \quad \text{in} \quad \vec{u} = -Q^{-1}\vec{w}.$$

Tako vidimo, da je inverz izometrije f podan s predpisom

$$f^{-1} : \vec{v} \mapsto Q^{-1}\vec{v} - Q^{-1}\vec{w}.$$

Vidimo, da je vsaka izometrija določena z vektorjem $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ in ortogonalno matriko $Q \in O(2)$. Tako lahko izometrijo $f : \vec{v} \mapsto Q\vec{v} + \vec{w}$ alternativno predstavimo tudi kot urejeni par $(\vec{w}, Q)$. Skladno s predpisom (1) za kompozicijo dveh izometrij lahko definiramo produkt dveh takšnih parov $(\vec{w}, Q)$ in $(\vec{u}, R)$ kot

$$(\vec{w}, Q) \cdot (\vec{u}, R) = (Q\vec{u} + \vec{w}, QR). \tag{2}$$

Množica, na kateri je definiran ta produkt, je kartezični produkt $\mathbb{R}^2 \times O(2)$. Vendar pa ta produkt urejenih parov ni enak produktu, ki bi ga dobili pri direktnem produktu grup $\mathbb{R}^2$ in $O(2)$, saj operacija na prvi komponenti ni zgolj seštevanje vektorjev. Zaradi te posebnosti ga imenujemo *semidirektni produkt* grup $\mathbb{R}^2$ in $O(2)$ in ga označimo z

$$\mathbb{R}^2 \rtimes O(2).$$

Odslej bomo evklidsko grupo izometrij $E(2)$ identificirali s tovrstnimi urejenimi pari in množenjem, definiranim s predpisom (2). Za to identifikacijo stoji izomorfizem

$$E(2) \cong \mathbb{R}^2 \rtimes O(2).$$

4 Grupa simetrij ravninskih vzorcev

V tem poglavju bomo definirali pojem *grupe simetrij ravninskega vzorca* ali *tapetne grupe*, ki jo sestavljajo vse izometrije evklidske ravnine, ki ohranjajo dani ravninski vzorec. Pokazali bomo tudi trditev, ki je na poti, do klasifikacije vseh tapetnih grup.

Definicija 11. *Translacijska podgrupa* evklidske grupe $E(2)$ je podgrupa vseh translacij. V grupi $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ translacijska podgrupa ustreza množici parov

$$T = \{(\vec{v}, I) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Definicija 12. *Točkasta grupa* dane podgrupe $G \leq \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ je

$$J = \{Q \in O(2) \mid (\vec{v}, Q) \in G \text{ za neki } \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Definicija 13. *Grupa simetrij ravninskga vzorca* ali *tapetna grupa* je podgrupa $G \leq \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, za katero velja, da je njena točkasta grupa J končna in da je podgrupa translacij $G \cap T$ generirana z dvema linearno neodvisnima translacijama. To pomeni, da je

$$G \cap T = \langle (\vec{u}, I), (\vec{w}, I) \rangle$$

za neka linearno neodvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

Trditev 6. *Končne podgrupe $O(2)$ so bodisi ciklične (vsebujejo samo rotacije) bodisi diedrske grupe (vsebujejo rotacije in zrcaljenja).*

Mreža grupe simetrij ravninskega vzorca G je množica

$$\Lambda = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (\vec{u}, I) \in G \cap T\} = \{k\vec{u} + l\vec{w} \in \mathbb{R}^2 \mid k, l \in \mathbb{Z}\},$$

kjer sta $\vec{u}$ in $\vec{w}$ vektorja, vzdolž katerih translaciji generirata grupo $G \cap T$. Skupaj z naslednjo trditvijo se mreža grupe simetrij ravninskega vzorca uporabi v dokazu izreka 1, ki pa ga ne bomo dokazali.

Trditev 7. *Točkasta grupa J deluje na mreži Λ, tj. kadar za vsak $Q \in J$ in $\vec{u} \in \Lambda$ velja, da je $Q\vec{u} \in \Lambda$*

Dokaz. Dokazujemo, da je $Q\vec{u}$ element Λ za poljubna $Q \in O(2)$ in $\vec{u} \in \Lambda$. Uporabili bomo trditev 4, zato definirajmo preslikavo

$$\pi : E(2) \to O(2), \quad \pi((\vec{v}, Q)) = Q.$$

Preverimo, da je π homomorfizem. Izberimo poljubna elementa $(\vec{v}, Q)$, $(\vec{w}, R) \in E(2)$ in izračunamo

$$\pi((\vec{v}, Q) \cdot (\vec{w}, R)) = \pi((Q\vec{w} + \vec{v}, QR)) = QR = \pi((\vec{v}, Q)) \cdot \pi((\vec{w}, R)).$$

Torej je π homomorfizem in

$$\begin{aligned} \ker \pi &= \left\{ (\vec{v}, Q) \in E(2) \middle| \pi((\vec{v}, Q)) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (\vec{v}, I) \in E(2) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \right\} = T \end{aligned}$$

je njegovo jedro, kar je ravno podgrupa vseh translacij. Naj bo $\tau = (\vec{u}, I) \in G$. Ker je $Q \in J$, obstaja neki $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, da je par $g = (\vec{v}, Q) \in G$. Izračunamo

$$g\tau g^{-1} = (\vec{v}, Q)(\vec{u}, I)(-Q^{-1}\vec{v}, Q^{-1}) = (Q\vec{u}, I),$$

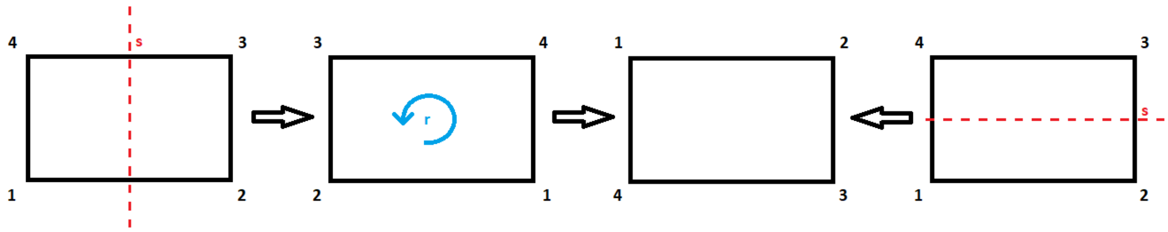
ki je produkt treh elementov iz G, zato leži v G in hkrati v T po trditvi 4. Torej je res $Q\vec{u} \in \Lambda$. $\square$

Izrek 1. *Red rotacije v grupi simetrijskih ravninskih vzorcev je lahko le:* 2 *(rotacija za* $180°$*),* 3 *(rotacija za* $120°$*),* 4 *(rotacija za* $90°$*) ali* 6 *(rotacija za* $60°$*).*

Posledica 1. *Točkasta grupa J je generirana z eno od rotacij za kot $180°$, $120°$, $90°$ ali $60°$ in morda z zrcaljenjem. Točkasta grupa J je zato izomorfna eni od grup:*

$$\mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/3, \quad \mathbb{Z}/4, \quad \mathbb{Z}/6, \quad D_4, \quad D_6, \quad D_8, \quad D_{12}.$$

Primer 10. Diedrska grupa D_4 je grupa simetrij pravokotnika, ki ni kvadrat. Grupo sestavljajo enota, rotacija in dve zrcaljenji $D_4 = \{e, r, s, sr\}$, med njimi pa veljajo relacije $sr = rs$, $r^2 = e$ in $s^2 = e$. To vidimo na sliki 5.



Slika 5: Prikaz diedrske grupe D_4 ravninske simetrije.

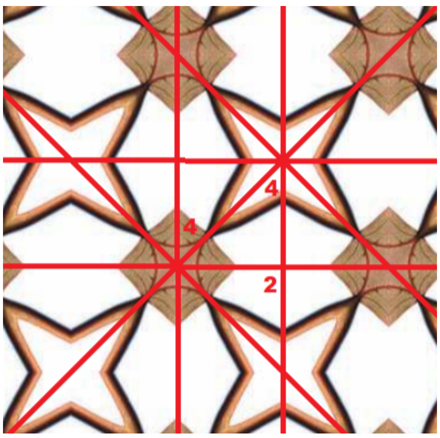
5 Klasifikacija ravninskih vzorcev

Vzorce bi radi klasificirali, zato jih v razrede razporedimo s pomočjo signatur. Vsak vzorec ima eno možno signaturo, ki nam pove, na koliko načinov lahko vzorec zrcalimo ali rotiramo.

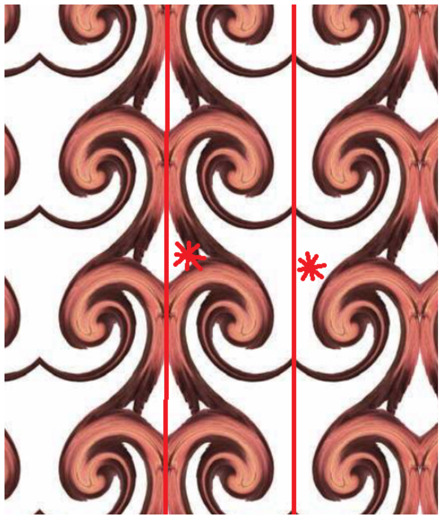
5.1 Signature

Raziskali bomo štiri različne tipe signatur. Te pripadajo zrcalnim osem, rotacijam, zrcalnim pomikom, ki jim pravimo tudi čudeži, in tranlacijam v parih, ki jim rečemo čudesa.

Če se vzorec prezrcali čez dano premico v zrcalno sliko samega sebe, tej premici pravimo *zrcalna os*. Vsak vzorec ima lahko eno, več ali nobene zrcalne osi. Kadar se v vzorcu pojavi zrcalna os, bomo v signaturo zapisali $*$, nato pa bomo v padajočem vrstnem redu zapisali število zrcalnih osi, ki se stikajo v prvem stičišču, število zrcalnih osi, ki se stikajo v drugem stičišču in tako dalje. Številke tako predstavljajo število zrcalnih osi, ki se stikajo v eni točki in jih pišemo z rdečo. Primera zrcalnih osi vidimo na slikah 6 in 7.



Slika 6: Vzorec s signaturo $*442$.



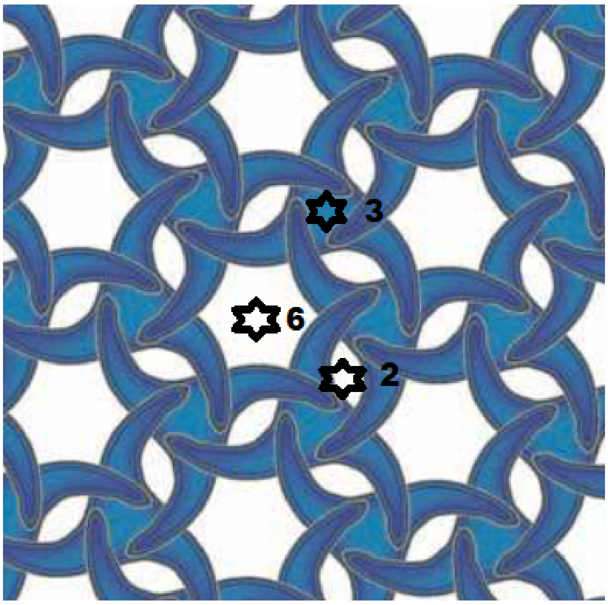
Slika 7: Vzorec s signaturo $**$.

Rotacijske točke so točke, v katerih je središče vrtenja. Vzorec se lahko okrog točke rotira za 180°, 120°, 90° ali 60°, kot nam pove izrek 1 o redu rotacij. Kadar se v vzorcu pojavi rotacijska točka, bomo v signaturi z modro barvo v padajočem vrstnem redu zapisali red rotacije okrog prve točke, nato red rotacije okrog druge točke in tako dalje. Primer rotacijskih točk vidimo na sliki 8.

Čudeži so zrcalni pomiki. Oznaka za čudež je $\times$, ogledamo pa si jih lahko na sliki 9.

Čudesa so translacije v parih, označimo jih s simbolom $\circ$. Primer čudes vidimo na sliki 10.

Opomba. Razlog, da so ti štirje tipi edini možni tipi simetrij ravninskega vzorca, izhaja iz klasifikacije sklenjenih ploskev in teorije orbiterosti v katere se ne bomo spuščali. Več o tem lahko izvemo v knjigi [1].



Slika 8: Vzorec s signaturo 632.

Vsakemu od simbolov v signaturi lahko pripišemo ceno, kot jih podaja razpredelnica 1. *Cena signature* je seštevek cen vseh njenih simbolov. Za cene signatur ravninskih vzorcev velja naslednji presenetljiv rezultat.

Simbol	Cena ($)	Simbol	Cena ($)
$\circ$	2	$*$ ali $\times$	1
2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{3}{8}$
5	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{2}{5}$
6	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\frac{N-1}{N}$	N	$\frac{N-1}{2N}$

Tabela 1: Tabela cen simbolov.

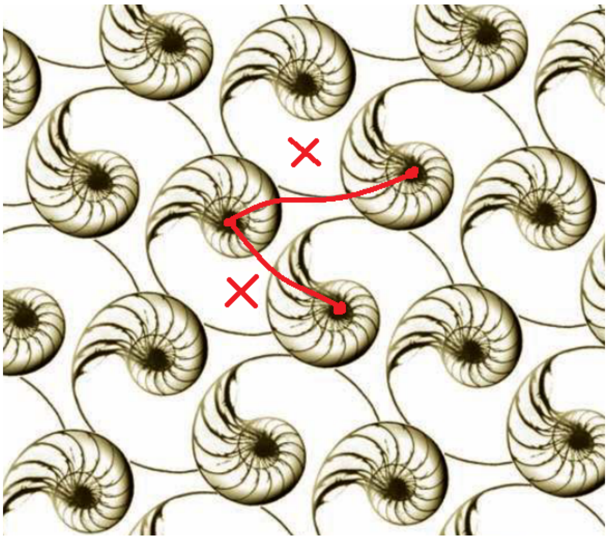
Izrek 2 (Magični izrek)**.** *Signatura poljubnega ravninskega vzorca ima skupno ceno* 2.

Magični izrek nam pomaga vse ravninske vzorce opisati s 17 različnimi signaturami.

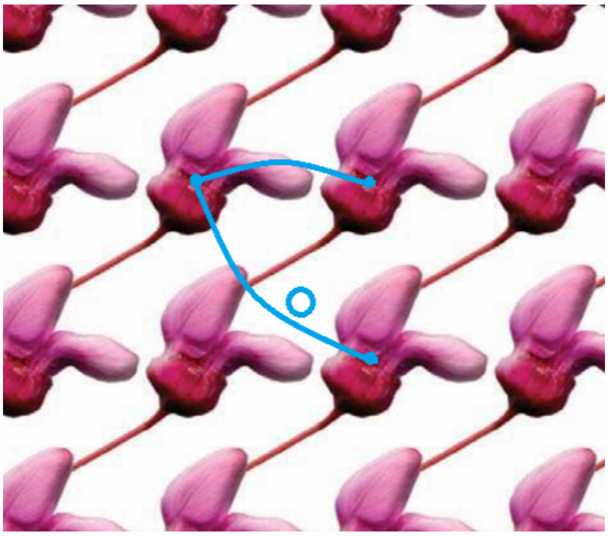
Trditev 8. *Vseh signatur ravninskih vzorcev je* 17.

Dokaz. Ceno singature dobimo tako, da seštejemo vrednosti njenih simbolov. Če ima vzorec v eni rotacijski točki red rotacije 6, v drugi red 3 in v tretji red 2 lahko iz zgornje tabele vidimo, da se njegova cena izračuna s $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, torej je njegova cena 2. Vseh 17 signatur je navedenih spodaj.

632	$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$	$*333$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2$	$3*3$	$\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 2$
442	$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$	$*442$	$1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 2$	$4*2$	$\frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2$
333	$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$	$*632$	$1 + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2$	$2*22$	$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$
2222	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$	$*2222$	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$	$22\times$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$
$\circ$	2	$**$	$1 + 1 = 2$	$22*$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$
				$\times\times$	$1 + 1 = 2$
				$*\times$	$1 + 1 = 2$



Slika 9: Vzorec s signaturo $\times\times$.



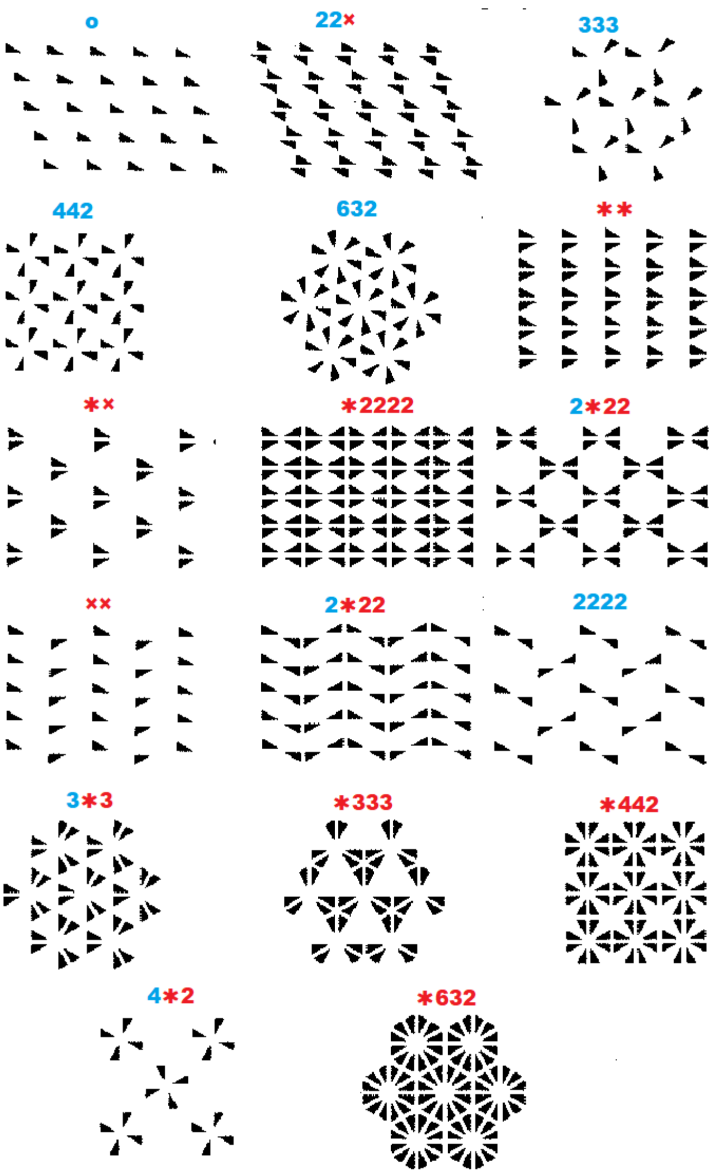
Slika 10: Vzorec s signaturo $\circ$.

Teh 17 tipov ravninskih vzorcev delimo v tri skupine, prvih pet je modrega tipa (rotacije), drugih pet je rdečega tipa (zrcaljenja), zadnjih sedem pa je hibridov. Dobimo jih tako, da v signaturi bodisi $*nn$ zamenjamo z $n*$ bodisi zamenjamo $*$ z $\times$, kadar v signaturi ni nobene rdeče številke. To je smiselno, saj se pri teh dveh menjavah cena signature ohrani.

$$
\begin{array}{ccccc}
*632 & *442 & *333 & *2222 & ** \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 4*2 & 3*3 & 2*22 & *\times \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & 22* & \times\times \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & 22\times &
\end{array}
$$

Te menjave so v zgornjem diagramu ponazorjene s puščicami. □

Vseh 17 možnih tipov ravninskih vzorcev je na sliki 11.



Slika 11: Vseh 17 tipov simetrij v ravnini.

6 Zaključek

Definirali smo grupe in nekaj osnovnih pojmov teorije grup kot so podgrupe in homomorfizmi grup. Ogledali smo si evklidsko grupo vseh izometrij evklidske ravnine in natančneje razdelali strukturo njeje podgrupe – ortogonalne grupe. Nazadje smo vpeljaji pojem grupe simetrij ravninskega vzorca in idejno opisali, kako lahko s pomočjo signatur klasificiramo vse možne tipe ravninskih vzorcev.

Literatura

[1] J. H. Conway, H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2008, poglavja 2, 3, 10 in 14.

[2] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1988, poglavji 25 in 26.