Številske vrste

Katja Anzeljc, Aljaž Bratkovič Odar, Val Čokl
Mentorica: Kaja Rajter

Povzetek

V projektu so obravnavana številska zaporedja in vrste. Predstavljena sta pojma konvergence in divergence, računanje s številskimi vrstami ter ključni izreki, ki povedo, kdaj preureditev vrstnega reda členov vpliva na vsoto vrste.

1 Uvod

Pri klasičnem seštevanju števil lahko uporabimo komutativnost, torej možnost prerazporejanja členov, saj velja $a + b = b + a$. Zanima nas, ali komutativnost velja tudi za neskončne vsote. Pred nami je naloga, s katero bomo poskusili ugotoviti, kaj se dogaja.

Naloga 1. *Z upoštevanjem rezultata*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

poišči vsoto spodnje vrste, ki jo dobimo z zamenjavo vrstnega reda členov dane vrste na naslednji način

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

Vsoto prvih treh členov in naslednjih treh členov lahko zapišemo v obliki

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

Vsoto n-te trojice členov pa lahko izrazimo v obliki

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Z upoštevanjem, da je vrednost vsote

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2,$$

dobimo

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Opazimo, da lahko z združevanjem različnih členov vrste pridemo do dveh različnih rezultatov. V članku bomo spoznali, zakaj se to zgodi.

2 Številska zaporedja

Preden se poglobimo v zanimivosti številskih vrst, spoznajmo nekaj osnovnih pojmov in lastnosti številskih zaporedij, ki so osnova za številske vrste.

Definicija 1. ***Zaporedje*** *je preslikava iz naravnih števil v realna števila. Označimo ga z* $(a_n)_n$.

Nekatera pomembna zaporedja so aritmetična zaporedja in geometrijska zaporedja. Posebej znano je tudi Fibonaccijevo zaporedje, ki ga definiramo kot

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = F_1 + F_2 = 2,\ \ldots,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ \ldots$$

Oglejmo si nekaj lastnosti, ki jih lahko ima zaporedje.

Definicija 2. *Zaporedje je* ***navzgor omejeno****, če obstaja takšen* $M \in \mathbb{R}$*, da velja* $a_n \leq M$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*. Število* M *imenujemo* ***zgornja meja****. Najmanjšo zgornjo mejo navzgor omejenega zaporedja imenujemo* ***supremum****.*
Podobno definiramo pojme ***navzdol omejeno zaporedje****,* ***spodnja meja*** *in* ***infimum****.*
Zaporedje je ***omejeno****, če ima zgornjo in spodnjo mejo.*

Zaporedje $(a_n)_n$ vsebuje neskončno mnogo členov, zato nas pogosto zanima, kaj se dogaja s členi zaporedja za velike n.

Definicija 3. *Zaporedje* $(a_n)_n$ ***konvergira proti*** $a \in \mathbb{R}$*, če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja* $N \in \mathbb{N}$*, da za vsak* $n \geq N$*, velja* $|a_n - a| < \varepsilon$*. Število* a *se imenuje* ***limita zaporedja****. Zaporedje, ki ne konvergira proti nobenemu realnemu številu* a*,* ***divergira****.*
Limito zaporedja $(a_n)_n$ *označimo z* $\lim_{n\to\infty} a_n$*.*

Zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n}$ ima limito 0. Prav tako ima limito 0 geometrijsko zaporedje s splošnim členom $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Definicija 4. *Zaporedje* ***konvergira proti neskončno****, če za vsak* $M \in \mathbb{R}$ *obstaja nek* $N \in \mathbb{N}$*, da za vsak* $n \geq N$ *velja* $a_n \geq M$*.*

Zaporedje naravnih števil konvergira proti neskončno.
Med lastnostmi, ki veljajo za konvergentna zaporedja, lahko dokažemo naslednjo trditev.

Trditev 1. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon = 1$ in a limita zaporedja $(a_n)_n$. Po definiciji konvergence obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ velja, da a_n leži na intervalu $(a-1, a+1)$. Potem je zgornja meja zaporedja enaka $\max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a+1\}$, spodnja meja pa je $\min\{a_1, \ldots a_{N-1}, a-1\}$. □

Omenimo še, kdaj je zaporedje naraščajoče in kdaj padajoče.

Definicija 5. *Zaporedje je* ***naraščajoče****, če velja* $a_{n+1} \geq a_n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*. Zaporedje je* ***strogo naraščajoče****, če velja* $a_{n+1} > a_n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*.*
Podobno definiramo ***padajoče*** *in* ***strogo padajoče*** *zaporedje.*

Zaporedje naravnih števil je strogo naraščajoče zaporedje. Konstantno zaporedje je naraščajoče in padajoče, ni pa niti strogo naraščajoče niti strogo padajoče.

Za naraščajoča in padajoča zaporedja velikokrat veljajo podobne lastnosti, zato uvedemo naslednje poimenovanje.

Definicija 6. *Zaporedje je* ***monotono****, če je naraščajoče ali padajoče. Zaporedje je* ***strogo monotono****, če je strogo naraščajoče ali strogo padajoče.*

Tako kot se v življenju srečujemo z resnicami, se v matematiki srečujemo z izreki. Pri dokazovaju konvergence nam velikokrat pomaga naslednji izrek.

Izrek 1. *Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno.*

Dokaz. Če je monotono zaporedje konvergentno, je po trditvi 1 omejeno. Denimo, da je monotono zaporedje $(a_n)_n$ omejeno. Dovolj je obravnavati primer, ko je $(a_n)_n$ naraščajoče zaporedje. Ker je zaporedje $(a_n)_n$ omejeno, ima supremum, ki ga označimo s S. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker velja $S - \varepsilon < S$, število $S - \varepsilon$ ni natančna zgornja meja. Torej obstaja nek člen a_l, da velja $a_l > S - \varepsilon$. Ker je $(a_n)_n$ naraščajoče zaporedje, velja $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je S zgornja meja, so vsi členi manjši od S, med drugim tudi členi od a_l naprej, ki zato ležijo na intervalu $(S - \varepsilon, S)$. Po definiciji 3 zaporedje konvergira proti S, saj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak N, da za vse n večje ali enake N člen a_n leži na intervalu $(S - \varepsilon, S + \varepsilon)$. □

Seveda pa moramo teorijo preizkusiti tudi v praksi, zato si oglejmo primer.

Naloga 2. *Ugotovi, ali je zaporedje s splošnim členom*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

monotono. Ali je omejeno?

Na začetku si oglejmo prvih nekaj členov zaporedja

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \\ a_3 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}. \end{aligned}$$

Poskusimo dokazati, da je zaporedje naraščajoče. To bo veljalo natanko tedaj, ko velja $a_{n+1} \geq a_n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$. *Vstavimo predpis za* a_n *in dobimo*

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

kar je ekvivalentno

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Neenakost pomnožimo z izrazom $(n+1)(2n+2)(2n+1)$ *in dobimo*

$$(n+1)(2n+2) + (n+1)(2n+1) \geq (2n+1)(2n+2).$$

Zgornji izraz se poenostavi v

$$2 \geq 1,$$

zato je zaporedje naraščajoče.

Dokažimo še, da je zaporedje omejeno. Velja

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} \cdot n < 1,$$

zato je zaporedje navzgor omejeno. Zaporedje je omejeno tudi navzdol, saj so po definiciji vsi členi pozitivni. Spodnja meja zaporedja je 0. *Po izreku 1 vemo, da zaporedje konvergira.*

S konvergentnimi zaporedji lahko tudi računamo. Naj bosta $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergentni zaporedji in naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ter $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Potem konvergirajo tudi zaporedja $(a_n \pm b_n)_n$ in $(a_n \cdot b_n)_n$. Limita zaporedja $(a_n \pm b_n)_n$ je $A \pm B$, limita zaporedja $(a_n \cdot b_n)_n$ pa je enaka $A \cdot B$. Če je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $B \neq 0$, konvergira tudi $(a_n/b_n)_n$, limita tega zaporedja pa je enaka A/B.

3 Številske vrste

Definicija 7. *Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje. Neskončna vrsta $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ se imenuje **številska vrsta** zaporedja $(a_n)_n$, ki jo označimo z*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

*Člen a_n imenujemo **n-ti splošni člen vrste**.*

Ker ne znamo določiti vsote neskončno mnogo števil, si lahko pri tem pomagamo z zaporedjem delnih vsot.

Definicija 8. *Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Definirajmo zaporedje $(s_n)_n$ kot $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\ldots$, ki ga imenujemo **zaporedje delnih vsot** vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Delne vsote lahko uporabimo pri določanju, ali vrsta konvergira ali divergira.

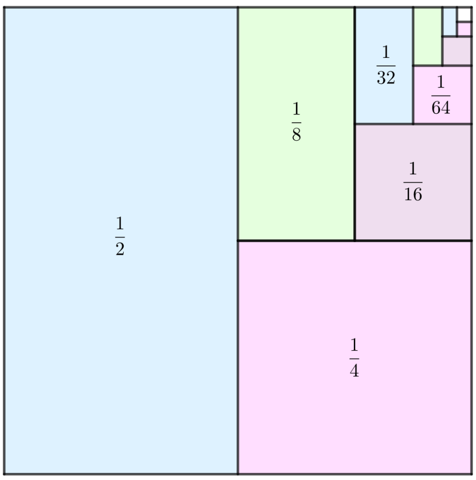
Definicija 9. *Če zaporedje delnih vsot številske vrste konvergira/divergira, potem rečemo, da **vrsta konvergira/divergira**. Limiti zaporedja delnih vsot pravimo **vsota vrste**.*

3.1 Geometrijska vrsta

Definicija 10. *Geometrijska vrsta je vrsta oblike $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, kjer sta $a, q \in \mathbb{R}$.*

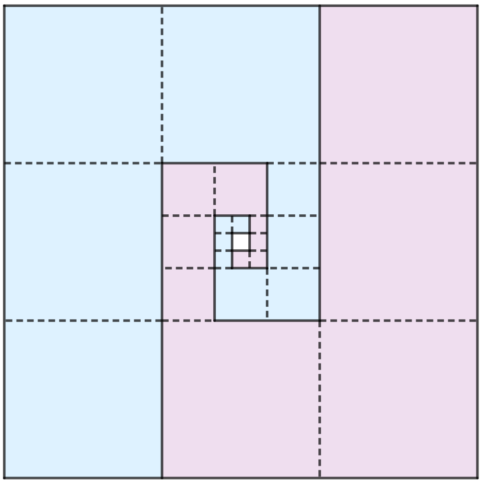
Če je $|q| < 1$, vrsta konvergira in ji lahko priredimo vsoto, ki je enaka $S = \frac{a}{1-q}$. V nasprotnem primeru vrsta divergira. Poglejmo si nekaj primerov geometrijskih vrst.

Če je $q = -\frac{1}{2}$, dobimo vrsto $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \ldots$, ki ima vsoto $\frac{2}{3}$. Če za q izberemo 2, dobimo vrsto $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + n^2 + \ldots$, ki divergira.



Slika 1: Grafična predstavitev geometrijske vrste za $q = \frac{1}{2}$.

Slika 1 prikazuje vrsto $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$.
Slika 2 prikazuje vrsto $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots = \frac{1}{2}$.



Slika 2: Grafična predstavitev geometrijske vrste za $q = \frac{1}{3}$.

3.2 Vrste z nenegativnimi členi

Ker so vsi členi vrste nenegativni, je zaporedje delnih vsot naraščajoče. Iz izreka 1 sledi naslednja trditev.

Trditev 2. *Vrsta z nenegativnimi členi konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot navzgor omejeno.*

Za lažje ugotavljanje konvergentnosti ali divergentnosti vrste lahko uporabimo primerjalni kriterij.

Izrek 2 (Primerjalni kriterij)**.** *Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativimi členi, za kateri velja $0 \leq a_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.*

Dokaz. Definirajmo s_n kot n-to delno vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in t_n kot n-to delno vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ker sta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi, sta zaporedji $(t_n)_n$ in $(s_n)_n$ naraščajoči.

1. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, zato konvergira tudi zaporedje $(t_n)_n$. Sledi, da je to zaporedje navzgor omejeno z mejo $M \in \mathbb{R}$. Iz pogoja vemo, da je $s_n \leq t_n$, zato ima tudi $(s_n)_n$ zgornjo mejo M. Sledi, da je $(s_n)_n$ navzgor omejeno zaporedje, torej je po izreku 1 konvergentno in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, divergira tudi zaporedje $(s_n)_n$ in je zato navzgor neomejeno. Iz pogoja sledi, da je $s_n \leq t_n$, zato je tudi $(t_n)_n$ navzgor neomejeno, torej je po izreku 1 divergentno. Sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

□

3.3 Absolutna in pogojna konvergenca

Definicija 11. *Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna, pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***absolutno konvergentna****.*

Primer absolutno konvergentne vrste je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Definicija 12. *Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, ni pa absolutno konvergentna, je* ***pogojno konvergentna****.*

Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

je pogojno konvergentna, saj konvergira proti $\ln 2$, vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

pa je t.i. harmonična vrsta, ki je znana divergentna vrsta.

Izrek 3 (Leibnitzov kriterij za alternirajoče vrste)**.** *Naj bo a_n padajoče zaporedje z limito 0. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira.*

Preverimo, ali je vrsta $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$ konvergentna. Ker je zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ padajoče in ima limito 0, je naša vrsta konvergentna.

4 Preureditve vrst

Definicija 13. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta in naj bo $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna funkcija. Vrsto $a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \ldots + a_{\pi(n)} + \ldots$ imenujemo **preureditev vrste** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Zanima nas, koliko je vsota vrste, če vrstni red njenih členov med seboj premešamo.

Izrek 4. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna preslikava. Potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergira in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Če je vrsta absolutno konvergentna, s preureditvijo vrstnega reda členov torej ne vplivamo na vsoto vrste. To pa ne velja za pogojno konvergentne vrste.

Izrek 5. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta. Potem za vsak $A \in \mathbb{R}$ obstaja bijektivna preslikava $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$. Še več, obstajata tudi bijektivni preslikavi $\pi_1, \pi_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_1(n)} = \infty$ in $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_2(n)} = -\infty$.*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da noben od členov v vrsti ni enak 0. Naj bo $(s_n)_n$ zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, torej

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ zaporedoma vsi členi zaporedja $(a_n)_n$, za katere velja $a_n > 0$, in naj bodo $q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots$ zaporedoma nasprotne vrednosti vseh členov zaporedja $(a_n)_n$, za katere velja $a_n < 0$.

Naj $p_{k(n)}$ označuje n-to delno vsoto vrste $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$, sestavljeno iz natanko tistih členov, ki so tudi med prvimi n členi vrste $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

$$p_{k(n)} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k.$$

Podobno definiramo tudi $q_{m(n)}$.

$$q_{m(n)} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m.$$

Opazimo, da velja $k + m = n$, zato je

$$t_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| = p_{k(n)} + q_{m(n)}.$$

Označimo $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ z (1) in $\sum_{m=1}^{\infty} q_m$ z (2). Dokažimo, da obe vrsti divergirata. Ločimo dva primera.

Recimo, da (1) in (2) konvergirata. Sledi, da $(t_n)_n$ konvergira, ker je razlika konvergentnih zaporedij, kar vodi v protislovje, saj smo predpostavili, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ ni absolutno konvergentna.

Recimo, da (1) konvergira, (2) pa divergira. Velja

$$s_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - q_1 - q_2 - \ldots - q_m = p_{k(n)} - q_{m(n)}.$$

Torej je $q_{m(n)} = p_{k(n)} - s_n$. Zaradi konvergence zaporedij $(p_{k(n)})_n$ in $(s_n)_n$ bi moralo konvergirati tudi zaporedje $(q_{m(n)})_n$. Pridemo do protislovja, ker smo predpostavili, da $(q_{m(n)})_n$ divergira. Če (1) divergira in (2) konvergira, se zgodi podobno.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, zato zaporedje $(a_n)_n$ konvergira proti 0. Sledi, da tudi podzaporedji $(p_n)_n$ in $(q_n)_n$ konvergirata proti 0.

Naj bo $A \in \mathbb{R}$. Poglejmo, kako moramo preoblikovati vrsto, da bo njena vsota enaka A. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ divergentna, obstaja najmanjše tako število $k_1 \in \mathbb{N}$, da je

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{k_1} > A.$$

Podobno obstaja najmanjše tako število $m_1 \in \mathbb{N}$, da je

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - q_3 - \ldots - q_{m_1} < A.$$

Nadaljujemo na isti način.

Ker je limita $\lim_{n\to\infty} p_{k(n)} = 0$ in $\lim_{n\to\infty} q_{m(n)} = 0$, ima vrsta po konstrukciji vrednost A.

$\square$

5 Zaključek

Ob ponovni obravnavi vrste iz uvoda lahko sedaj rečemo, da je dana vrsta pogojno konvergirala, saj nam je uspelo s preureditvijo vrste dobiti dve različni vsoti. Ugotovili smo, da se pri preureditvi absolutno konvergentne vrste vsota ohrani, nasprotno pa lahko pogojno konvergentno vrsto preuredimo tako, da za vsoto dobimo poljubno realno število ali $\pm\infty$.

Literatura

[1] Zapiski predavanj predmeta Analiza I prof. dr. Barbare Drinovec Drnovšek (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2023/2024).

[2] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, 2012, dostopno na: `https://users.fmf.uni-lj.si/globevnik/skripta.pdf`