

Standardne Youngove tabele

Tadeja Bone, Val Čokl, Naja Oblak
Mentor: Matija Likar



Povzetek

V članku smo obravnavali Youngove diagrame in se ukvarjali s problemom štetja različnih standardnih Youngovih tabel. Definirali smo Youngovo mrežo in dokazali Robinson-Schenstedovo korespondenco.

1 Uvod

Kmet želi narediti polje ob križišču dveh cest tako, da bi ga lahko zalival s čim manj truda. Želi si, da se mu sploh ne bi bilo treba premikati okoli polja. Zato se domisli, da bo oblikoval polje s terasami, ki bodo padale proti križišču, on pa bo lahko stal na eni strani in s tem zalival celo polje. Ker želi, da je pretok vode neoviran, mora višina polja naraščati desno po vsaki vrstici in navzdol po vsakem stolpcu. Prav tako si želi, da imajo terase med seboj različne višine. Zanima ga na koliko načinov lahko določi višine teras.

Kmetov problem lahko matematično modeliramo na naslednji način. Dano imamo naravno število n in tabelo z dolžinami vrstic $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Tabelo želimo zapolniti s števili od 1 do n , pri čemer morajo števila naraščati po stolpcu navzdol in po vrstici desno. Zanima nas, na koliko načinov lahko razporedimo ta števila v tabelo ob upoštevanju omenjenega pogoja. Koncept tabele in njene zapolnitve formaliziramo z naslednjima definicijama.

1	2	8	9	10
3	4	11	13	
5	6	12		
7				

Tabela 1: Primer ene izmed ustreznih zapolnitev diagrama $(5, 4, 3, 1)$.

Definicija 1. Zaporedje $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}$, imenujemo **particija** števila $n \in \mathbb{N}$, če velja:

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$,
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$.

Zapis $\lambda \vdash n$ nam pove, da je λ particija n . Grafično upodobitev neke particije imenujemo **Youngov diagram**.

Primer 1. *Youngov diagram*

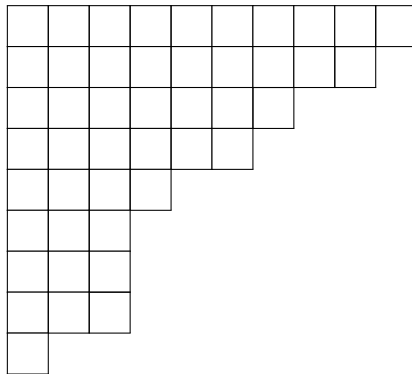


Tabela 2: Youngov diagram $(10, 9, 7, 6, 4, 3, 3, 3, 1)$.

Definicija 2. *Standardna Youngova tabela (SYT) oblike λ je zaplnitev Youngovega diagrama s števili $1, 2, \dots, n$, kjer vsako od teh števil zapišemo v eno polje diagrama tako, da se števila ne ponavljajo in da naraščajo navzdol po stolpcu ter desno po vrstici.*

Primer 2. *Standardna Youngova tabela oblike $(3, 3)$:*

1	2	4
3	5	6

Tabela 3: Primer standardne Youngove tabele $(3, 3)$.

2 Catalanova števila

Na začetku se vprašajmo, koliko standardnih Youngovih tabel obstaja za diagrame oblike (n, n) .

1	2	3	6	9
4	5	7	8	10

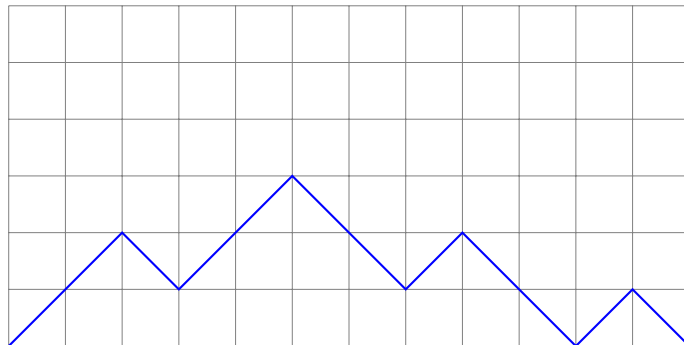
Tabela 4: Ustrezno polnjenje.

1	2	3	9	10
4	5	6	7	8

Tabela 5: Neustrezno polnjenje.

Namesto, da se problema lotimo neposredno, si bomo pomagali s pomočjo naslednje sorodne kombinatorične konstrukcije.

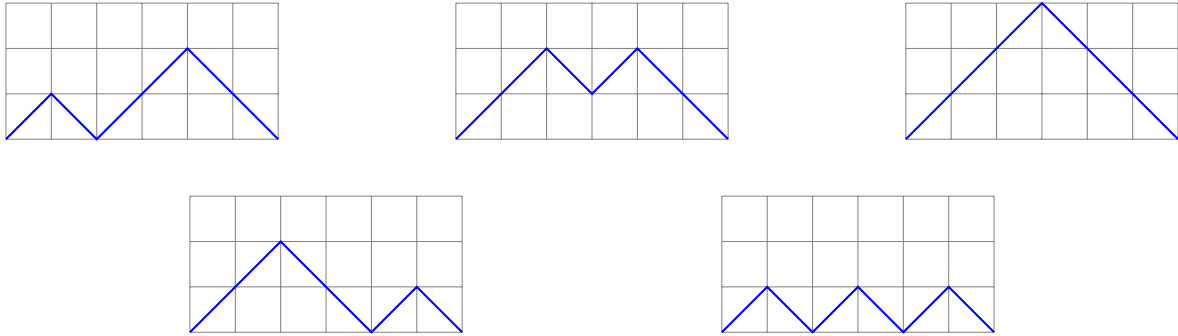
Definicija 3. *Naj bo n neko naravno število. Opazujemo sprehode, ki se začnejo v točki $(0, 0)$, se premikajo s koraki za $(1, 1)$ ali $(1, -1)$ (desno-gor ali desno-dol) ter se končajo v točki $(2n, 0)$. Hkrati pa nikoli ne padejo pod premico $y = 0$. Taka zaporedja korakov imenujemo **Dyckove poti** (za primer glej Sliko 1).*



Slika 1: Dyckova pot za $n = 6$.

Definicija 4. *Število Dyckovih poti dolžine $2n$ imenujemo n -to **Catalanovo število** C_n .*

Za začetek si oglejmo nekaj primerov za majhne n , na primer $n = 3$ (glej Sliko 2).



Slika 2: Dyckove poti za $n = 3$.

Opazimo, da je vseh možnosti 5, torej je $C_3 = 5$. Kaj pa za večji n ? Naštejmo nekaj znanih vrednosti, tako da bomo dobili oris, kako narašča vrednost C_n z naraščanjem n .

n	C_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430
9	4862
10	16796
10	16796
11	58786
12	208012
13	742900
14	2674440
15	9694845

Slika 3: Catalanovo število C_n za $0 \leq n \leq 15$.

Pred nadaljevanjem se še spomnimo definicije binomskega simbola. Imamo množico z n elementi. Število načinov, na katere lahko izberemo podmnožico $k \leq n$ elementov, označimo z binomskim simbolom $\binom{n}{k}$. Velja $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Izrek 1. Za n -to Catalanovo število velja naslednja zveza:

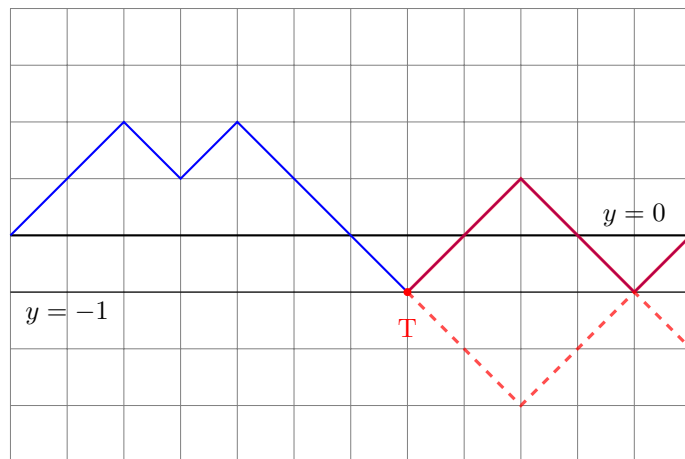
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Dokaz. Po definiciji je C_n število vseh poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$, ki nikoli ne grejo pod premico $y = 0$. Recimo takim potem *dobro*, tistim, ki pa padejo pod $y = 0$, pa *slabe*. Vemo, da je število dobrih poti enako številu vseh poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$, ki mu odštejemo število slabih poti.

$$C_n = (\text{št. vseh poti}) - (\text{št. slabih poti})$$

Vse poti so sestavljene iz $2n$ korakov, pri čemer imamo n korakov desno-gor in n korakov desno-dol. Tako je število vseh poti enako $\binom{2n}{n}$.

Vsaka slaba pot bo v nekem trenutku zadela premico $y = -1$. Točko, kjer se to zgodi prvič, označimo s T . Ker se ta pot konča v točki $(2n,0)$, bo pot od te točke dalje opravila en korak desno-gor več kot desno-dol. Nato lahko pot od točke T naprej prezrcalimo čez premico $y = -1$ in dobimo neko pot od točke $(0,0)$ do točke $(2n,-2)$. Primer zracljenja lahko vidimo na sliki 4. Po drugi strani pa lahko poljubno pot od točke $(0,0)$ do



Slika 4: Zrcaljenje repa slabe poti čez os $y = -1$.

točke $(2n, -2)$ na podoben način prezrcalimo čez premico $y = -1$ od prvega presečišča s to premico dalje, pri čemer dobimo neko slabo pot od $(0, 0)$ do točke $(2n, 0)$.

Opisano zrcaljenje je samo sebi inverz (gledano kot funkcija iz množice slabih poti v množico poti, ki se končajo v točki $(2n, -2)$). Ugotovili smo, da lahko na tak način iz slabe poti, ki se konča v $(2n, 0)$, dobimo pot, ki se konča v $(2n, -2)$ in obratno. Očitno je tudi, da če zrcalimo slabo pot, bo zrcalna slika dobljene poti spet ista slaba pot, s katero smo začeli. Torej je opisano zrcaljenje bijekcija med množico slabih poti, ki se končajo v $(2n, 0)$ in množico vseh poti, ki se končajo v $(2n, -2)$. Sledi, da imata množici isto število elementov. Število poti, ki se končajo v $(2n, -2)$, je enostavno izračunati, saj je pot zaporedje $n - 1$ korakov desno-gor in $n + 1$ korakov desno-dol. Zato je število slabih poti enako $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$. Sedaj lahko še s kratkim računom dokažemo svoj izrek.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!n}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}((n+1) - n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad \square$$

Izrek 2. Za Youngovo tabelo oblike (n, n) obstaja C_n različnih standardnih Youngovih tabel.

Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo poiskali bijekcijo med množico standardnih Youngovih tabel oblike (n, n) ter množico Dyckovih poti dolžine $2n$.

Denimo, da imamo neko standardno Youngovo tabelo velikosti (n, n) . Opišimo njej ustrezno Dyckovo pot. Taka pot bo svoj k -ti korak naredila desno-gor, če je število k v zgornji vrsti tabele, in desno-dol, če je število k v spodnji vrsti tabele. Ker ima tabela dve isto dolgi vrstici, bo število korakov desno-gor enako številu korakov desno-dol, torej res končamo v točki $(2n, 0)$.

Dokažimo, da za poljuben $k \leq 2n$ naša pot ne zaide pod $y = 0$, s protislovjem. Predpostavimo, da pri nekem k prvič zaidemo pod $y = 0$. Če pogledamo števila $1, \dots, k$, zapisana v tabeli, to pomeni, da jih je več zapisanih v spodnji vrstici kot v zgornji. Ker so nam ostala le še števila večja od k , bomo morali neko izmed njih vpisati nad manjše število, s čimer pridemo do protislovja.

Sedaj prikažimo še drugo smer bijekcije, torej da za vsako Dyckovo pot obstaja ustrezna standardna Youngova tabela oblike (n, n) . Število k bomo zapisali v zgornjo vrstico, če se v k -tem koraku premaknemo desno-gor, sicer število zapišemo v spodnjo vrstico. Ker vemo, da je število vseh korakov desno-gor v prvih k korakih poti večje ali enako od števila vseh korakov desno-dol za vsak $k \leq 2n$, bo število zapolnjenih polj v zgornji vrstici tabele vedno večje ali enako od števila zapolnjenih polj v spodnji vrstici. Torej bomo dobili veljavno standardno Youngovo tabelo.

Očitno je, da sta preslikavi druga drugi inverz, torej obstaja med množicama vseh Dyckovih poti dolžine $2n$ in tabel oblike (n, n) bijekcija. Iz tega sledi, da imata množici enako moč. $\square$

3 Youngove tabele

3.1 Formula o kljukah

Videli smo, da lahko v standardno Youngovo tabelo oblike (n, n) razporedimo števila $1, 2, \dots, 2n$ na C_n načinov. Zanima nas, na koliko načinov lahko n števil porazdelimo v poljubno standardno Youngovo tabelo λ z n polji. To število možnosti bomo označili s f_λ .

Primer 3. Na koliko načinov lahko razporedimo števila od 1 do 7 v SYT oblike $(3, 2, 2)$? Eden od načinov je prikazan spodaj.

		c_1
	c_2	

Tabela 8: Kota v Youngovem diagramu $\lambda = (3, 2, 2)$.

Primer 5. Oglejmo si še enkrat primer 4 z odstranjevanjem kotov. Po rekurzivni zvezi velja

$$\begin{aligned}
f_{(3,2,2)} &= f_{(2,2,2)} + f_{(3,2,1)} \\
&= f_{(2,2,2)} + f_{(2,2,1)} + f_{(3,1,1)} + f_{(3,2)} \\
&= 5 + 5 + 6 + 5 \\
&= 21,
\end{aligned}$$

kar je isti rezultat kot tisti iz formule o kljukah.

Ugotovili smo, da leva stran enačbe formule o kljukah ustreza rekurzivni zvezi

$$f_\lambda = \sum_{\text{kot } c} f_{\lambda \setminus c}$$

z začetnim pogojem

$$f_\emptyset = 1.$$

Želimo dokazati, da desni strani enakosti ustreza podobna zveza, natančneje:

$$\frac{n!}{H(\lambda)} = \sum_{\text{kot } c} \frac{(n-1)!}{H(\lambda \setminus c)}, \quad (2)$$

$$\frac{0!}{H(\emptyset)} = 1. \quad (3)$$

Za začetni pogoj se lahko enostavno prepričamo, da drži, saj

$$\frac{0!}{H(\emptyset)} = \frac{1}{\prod_{c \in \emptyset} h(c)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Rekurzivno zvezo pa lahko preoblikujemo v

$$\sum_{c \text{ kot}} \frac{(n-1)! \cdot H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c) \cdot n!} = 1$$

$$\sum_{c \text{ kot}} \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c) \cdot n} = 1.$$

Za dokaz zgornje zveze si bomo pomagali z verjetnostjo. Za dano λ želimo poiskati naključen proces, ki nam vrne enega izmed kotov c . Želimo tudi, da nam dan kot c vrne z verjetnostjo

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)}.$$

Če nam uspe najti tak proces, se bodo te verjetnosti po vseh c seštele v 1, s čimer bomo dokazali enačbo (2). Tak proces bomo v nadaljevanju imenovali **sprehod po kljukah**. Opišimo njegovo konstrukcijo.

Postopek 1 (Sprehod po kljukah). Imamo $\lambda \vdash n$.

1. V prvem koraku naključno izberemo začetno polje a , vsakega v tabeli z isto verjetnostjo $\frac{1}{n}$.
2. Gledamo kljuko polja a in se premaknemo na neko naključno polje v njej, ki ni a . Tu vsako od teh polj izberemo z isto verjetnostjo $\frac{1}{h(a)-1}$.
3. Korak 2 ponavljamo, dokler ne pridemo v nek kot c .

Na koncu procesa izberemo kot c .

Verjetnost, da končamo postopek, v polju c označimo s $P(c)$. Verjetnost, da pa končamo v c vedoč, da smo v prvem koraku izbrali polje a , pa označimo s $P(a, c)$. Sedaj moramo dokazati, da bomo s tem postopkom nek kot c izbrali z verjetnostjo

$$P(c) = \frac{1}{n} \cdot \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)}.$$

Zaporedje polj, po katerih se sprehodimo, označimo z

$$a = a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n = c.$$

Vemo, da je verjetnost, da pridemo iz polja a v polje c z opisanim postopkom enaka vsoti verjetnosti vseh poti, iz a v c .

$$P(a, c) = \sum_{a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow c} \left(\frac{1}{h(a_1) - 1} \right) \left(\frac{1}{h(a_2) - 1} \right) \dots \left(\frac{1}{h(a_{n-1}) - 1} \right)$$

Verjetnost, da pridemo v c nasploh, pa je še dodatno odvisna od izbire začetnega polja.

$$P(c) = \sum_{a \in \lambda} \frac{1}{n} \cdot P(a, c)$$

Opazimo, da če naredimo sprehod $a \rightarrow c$, bomo v vsakem koraku znotraj pravokotnika z ogliščema a in c . Označimo preostali dve oglišči štirikotnika z b in d .

Ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} h(a) + h(c) &= h(b) + h(d) \\ h(a) + 1 &= h(b) + h(d) \\ h(a) - 1 &= (h(b) - 1) + (h(d) - 1). \end{aligned}$$

		a	...	...	d
		$\vdots$			$\vdots$
		b	...	...	c

Tabela 9: Pravokotnik, ki omejuje naš sprehod.

Definicija 6. Za $a \in \lambda$ definiramo **utež** $wt(a) := \frac{1}{h(a)-1}$.

S krakim računom še izpeljemo $\frac{1}{wt(a)} = \frac{1}{wt(b)} + \frac{1}{wt(d)}$. Če definiramo še $x := \frac{1}{wt(b)}$ in $y := \frac{1}{wt(d)}$, dobimo uporaben izraz $wt(a) = \frac{1}{x+y}$. Vidimo, da vse uteži znotraj pravokotnika enolično določajo uteži spodnje vrstice in desnega stolpca. Za vsak pravokotnik z ogliščema a in c lahko označimo uteži spodnje vrstice z $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k}$ ter uteži desnega stolpca z $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots, \frac{1}{y_l}$. Utež polja c definiramo kot $wt(c) = 1$. Po zgornjem razmisleku vemo, da je utež v i -tem stolpcu in j -ti vrstici enaka $\frac{1}{x_i + y_j}$.

a									$\frac{1}{y_1}$
									$\frac{1}{y_2}$
			$\frac{1}{x_i + y_j}$						$\vdots$
									$\frac{1}{y_l}$
$\frac{1}{x_1}$	$\frac{1}{x_2}$	...	...	...	...	...	...	$\frac{1}{x_k}$	c

Tabela 10

Definicija 7. Naj bo p pot, ki jo opravimo ob nekem sprehodu med poljubnima dvema poljema. **Utež poti** naj bo zmnožek uteži polj, ki jih obiščemo na poti

$$wt(p) := \prod_{b \text{ na poti } p} wt(b).$$

Iz tega sledi tudi, da je $P(a, c)$ enak vsoti uteži poti, ki peljejo od a do c , oziroma

$$P(a, c) = \sum_{pot \text{ } p, a \rightarrow c} wt(p).$$

Definicija 8. Poti p pravimo, da je **zvezna**, če se v vsakem koraku premaknemo na sosednje polje. Povedano drugače, v vsakem koraku naredimo bodisi korak za eno polje dol ali za eno polje v desno.

Lema 1. Za vsako zvezno pot velja

$$\sum_{p \text{ zvezna pot } a \rightarrow c} wt(p) = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l}.$$

Dokaz. Lemo dokažemo z indukcijo po $k + l$, kjer k označuje dolžino pravokotnika, l pa višino.

Baza indukcije: $k + l = 2$. V tem primeru imamo opravka s tabelo z zgolj enim poljem, torej tudi zgolj eno potjo, ki obišče zgolj kot.

1

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da lema drži za tabelo velikosti $k + l = m - 1$.

Indukcijski korak: Želimo dokazati, da enačba velja tudi za $k + l = m$. Naj bo p neka zvezna pot. Torej bomo prvi korak naredili bodisi za eno polje navzdol bodisi za eno polje v desno. Označimo preostanek poti s p' , polji navzdol oz. desno od a z e oz. f .

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ zvezna pot } a \rightarrow c} wt(p) &= \sum_{\substack{p \text{ zvezna pot } a \rightarrow c, \\ \text{začnemo dol}}} wt(p) + \sum_{\substack{p \text{ zvezna pot } a \rightarrow c, \\ \text{začnemo desno}}} wt(p) \\ &= \sum_{p' \text{ zvezna pot } e \rightarrow c} wt(a) \cdot wt(p') + \sum_{p' \text{ zvezna pot } f \rightarrow c} wt(a) \cdot wt(p') \end{aligned}$$

Preostale poti p' pa v celoti ležijo v enem izmed dveh manjših pravokotnikov s $k' + l' = m - 1$, za katere velja induksijska predpostavka. Sledi

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ zvezna pot } a \rightarrow c} wt(p) &= wt(a) \cdot \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k y_2 \dots y_l} + wt(a) \cdot \frac{1}{x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l} \\ &= \frac{1}{x_1 + y_1} \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k y_2 \dots y_l} + \frac{1}{x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l} \right) \\ &= \frac{1}{x_1 + y_1} \left(\frac{x_1 + y_1}{x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l} \right) \\ &= \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l}. \end{aligned}$$

□

Sedaj želimo lemo razširiti tudi na nezvezne poti.

Lema 2. Za poti znotraj pravokotnika z ogliščema a in c , kjer je c kot, velja

$$\sum_{\substack{p \text{ pot} \\ \text{v pravokotniku}}} wt(p) = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x_k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{y_l}\right),$$

pri čemer so $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_k}$ uteži spodnje vrstice in $\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_k}$ uteži desnega stolpca.

V enačbi torej nastopajo ravno x in y iz antikljuke polja a . Dobimo

$$\begin{aligned} P(c) &= \frac{1}{n} \prod_{\substack{b \in \text{antikljuka } c \\ b \neq c}} \left(1 + \frac{1}{h(b) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{\substack{b \in \text{antikljuka } c \\ b \neq c}} \frac{h(b)}{h(b) - 1}. \end{aligned}$$

Spomnimo se, da dokazujemo enakost

$$P(c) = \frac{1}{n} \cdot \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)},$$

torej je zadosti dokazati

$$\frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)} = \prod_b \frac{h(b)}{h(b) - 1}.$$

S $h'(x)$ označimo dolžino kljuge polja x v diagramu $\lambda \setminus c$. Polja izven antikljuke označimo z a_i , tista v njej pa z b_i . Ker vemo, da velja

$$\frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)} = \frac{h(a_1)h(a_2) \cdots h(a_r) \cdot h(b_1)h(b_2) \cdots h(b_q)}{h'(a_1)h'(a_2) \cdots h'(a_r) \cdot h'(b_1)h'(b_2) \cdots h'(b_q)},$$

moramo le dokazati enakost

$$\prod_b \frac{h(b)}{h(b) - 1} = \frac{h(a_1)h(a_2) \cdots h(a_r) \cdot h(b_1)h(b_2) \cdots h(b_q)}{h'(a_1)h'(a_2) \cdots h'(a_r) \cdot h'(b_1)h'(b_2) \cdots h'(b_q)}.$$

Ker na člene, ki vsebujejo $a_1, a_2, \dots, a_r$, ki niso v antikljuki polja c , ne vpliva odstranitev polja c , se njihove dolžine kljuk v števcu in imenovalcu med seboj krajšajo. Po drugi strani pa za polja v antikljuki (brez c) vemo, da se z odstranitvijo kota c njihova dolžina kljuk zmanjša za 1.

$$\begin{aligned} \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)} &= \frac{h(b_1)h(b_2) \cdots h(b_q)}{h'(b_1)h'(b_2) \cdots h'(b_q)} \\ &= \frac{h(b_1)}{h(b_1) - 1} \cdots \frac{h(b_q)}{h(b_q) - 1} \\ &= \prod_{\substack{b \in \text{antikljuka } c \\ b \neq c}} \frac{h(b)}{h(b) - 1}. \end{aligned}$$

Sedaj vemo $P(c) = \frac{1}{n} \cdot \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)}$, torej velja tudi $\sum_c \text{ kot } \frac{1}{n} \cdot \frac{H(\lambda)}{H(\lambda \setminus c)} = \sum_c \text{ kot } P(c) = 1$, s čimer smo dokazali rekurzivno zvezo (2).

Dokazali smo, da za levo in desno stran 3 velja isti začetni pogoj ter ista rekurzivna zveza, kar nam omogoča, da z indukcijo dokažemo izrek.

Baza indukcije $n = 0$: To smo že obravnavali z obravnavo začetnega pogoja.

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da formula o kljukah $f_\lambda = \frac{n!}{H(\lambda)}$, velja za nek n .

Indukcijski korak: Z (1) smo pokazali $f_\lambda = \sum_c \text{ kot } f_{\lambda \setminus c}$. Ker ima diagram $\lambda \setminus c$ natanko $n - 1$ polj, je po indukcijski predpostavki $f_{\lambda \setminus c} = \frac{(n-1)!}{H(\lambda \setminus c)}$. Skupaj z enakostjo (2) sledi

$$f_\lambda \stackrel{(1)}{=} \sum_{c \text{ kot}} f_{\lambda \setminus c} \stackrel{(\text{I.P.})}{=} \sum_{c \text{ kot}} \frac{(n-1)!}{H(\lambda \setminus c)} \stackrel{(2)}{=} \frac{n!}{H(\lambda)},$$

s čimer zaključimo indukcijo, s tem pa tudi dokaz formule o kljukah. □

4 Youngova mreža in Robinson-Schenstedova korespondenca

Sedaj, ko smo rešili problem štetja standardnih Youngovih tabel za poljubno particijo λ , si pogledajmo še nekaj sorodnih lastnosti. V nadaljevanju bomo definirali Youngovo mrežo in z njo dokazali Robinson-Schenstedonovo korespondenco, ki med seboj poveže števila standardnih Youngovih tabel za vse možne particije $\lambda \vdash n$ za nek n .

Definicija 10. *Delno urejena množica* $(P, \leq)$ je par množice P in binarne relacije $\leq$, za katero veljajo naslednje lastnosti:

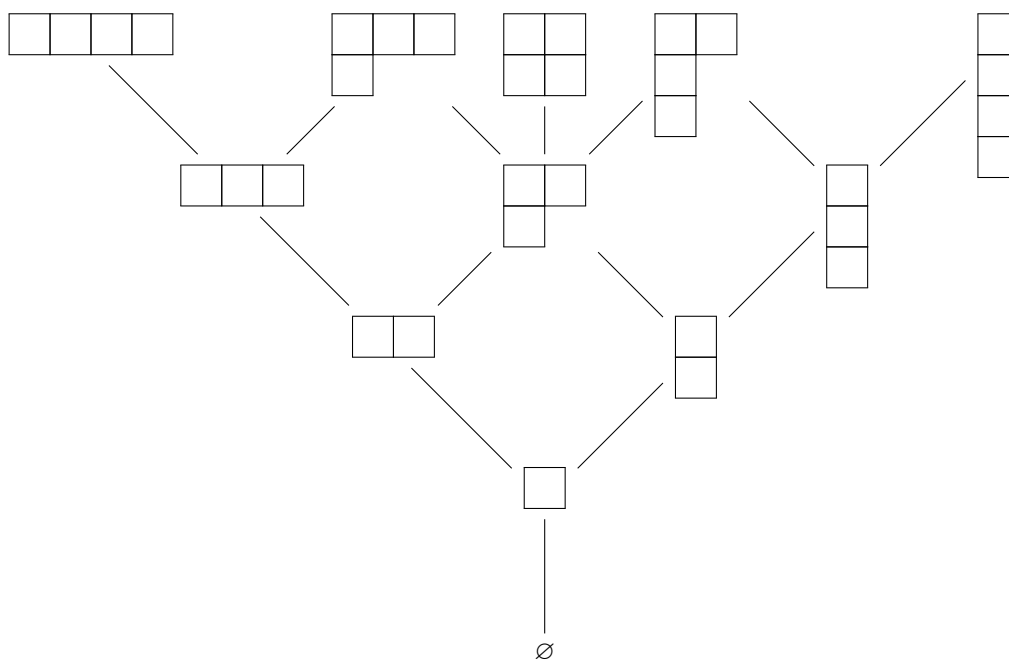
- $a \leq a$, za vsak $a \in P$ (refleksivnost),
- če za neka $a, b \in P$ velja $a \leq b$ in $b \leq a$, potem $a = b$ (antisimetričnost),
- če za neke $a, b, c \in P$ velja $a \leq b$ in $b \leq c$, potem $a \leq c$ (tranzitivnost).

Definicija 11. V delno urejeni množici P pravimo, da b **pokriva** a , ko velja $a \leq b$, pri čemer $a \neq b$, ne obstaja pa nek od a in b različen element c , za katerega velja $a \leq c \leq b$. To označimo z $a < b$.

Opazimo, da lahko množico vseh Youngovih diagramov z ustrezno izbiro relacije strukturiramo v delno urejeno množico.

Definicija 12. *Youngova mreža* $(\mathbb{Y})$ je delno urejena množica vseh Youngovih diagramov, urejenih z relacijo vsebovanja $\lambda \leq \mu$. Natančneje, če sta $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ in $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ particiji, potem velja $\lambda \leq \mu$, natanko tedaj ko $k \leq l$ in $\lambda_i \leq \mu_i$, za vsak $i = 1, \dots, k$.

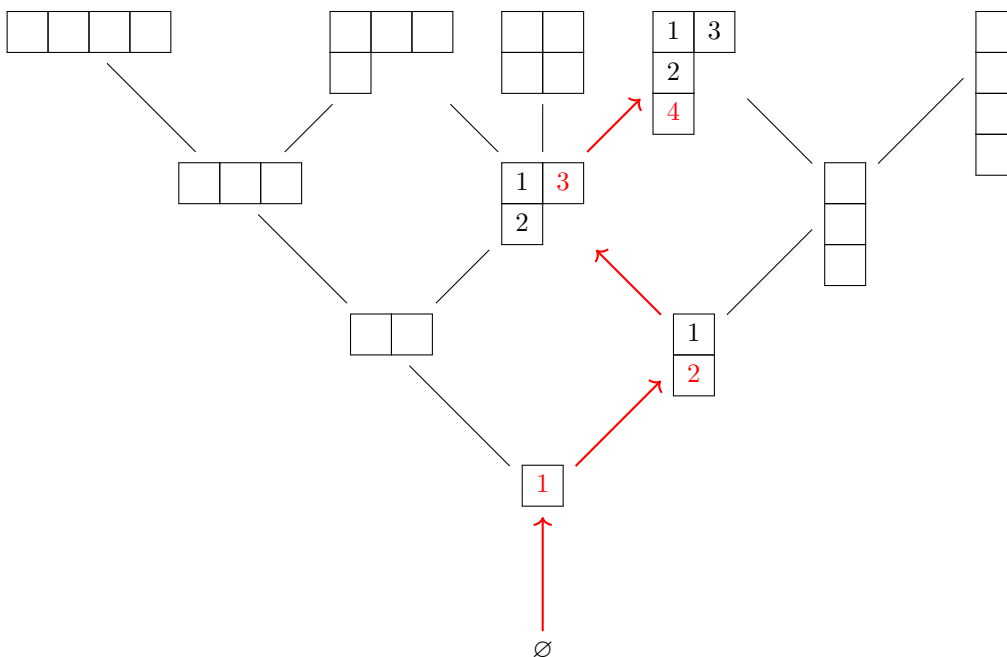
Primer nekaterih elementov Youngove mreže lahko vidimo na Sliki 5. Relacijo $a < b$ smo predstavili s črtami, kjer spodnji element ustreza a , zgornji pa b . V Youngovi mreži velja $\lambda < \mu$, če lahko dobimo μ , tako da λ dodamo eno polje, ekvivalentno λ dobimo, tako da μ odstranimo eno polje. V tem primeru pravimo, da je λ **starš** in μ njegov **otrok**. Dva Youngova diagrama smo narisali na isti višini, če sta oba sestavljena iz n polj.



Slika 5: Nekaj elementov Youngove mreže.

Definicija 13. *Saturirana veriga* je zaporedje $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, če velja $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Opazimo, da je f_λ enako številu saturiranih verig od $\emptyset$ do λ . Za vsako izmed takih verig lahko namreč enolično poiščemo njej ustrezno SYT za diagram λ . Vsak naslednji člen saturirane verige nastane z dodajanjem enega novega polja prejšnjemu členu. V diagram λ lahko nato vpišemo števila od 1 do n tako, kot smo dodajali polja. Vsaka taka možna pot od $\emptyset$ do λ tako ustreza neki SYT za ta diagram.



Slika 6: Primer saturirane verige in njej ustrezne SYT.

Izrek 4 (Robinson-Schenstedova korespondenca).

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2 = n!$$

Naj bo $\mathbb{R}[\mathbb{Y}]$ realen vektorski prostor na množici $\mathbb{Y}$, ki sestoji iz linearnih kombinacij elementov $\mathbb{Y}$. To pomeni, da lahko različne diagrame seštevamo kot vektorje in jih množimo s skalarji, tj. realnimi števili. Na $\mathbb{R}[\mathbb{Y}]$ lahko definiramo naslednja dva operatorja.

- Operator U ,

$$U : \lambda \mapsto \sum_{\mu \succ \lambda} \mu,$$

predstavlja seštevek vseh diagramov, za katere velja $\mu \succ \lambda$.

- Operator D ,

$$D : \lambda \mapsto \sum_{\mu \prec \lambda} \mu,$$

predstavlja seštevek vseh diagramov, za katere velja $\mu \prec \lambda$.

Oglejmo si primer, kako linearna operatorja delujeta.

Primer 6.

$$U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} D^2 U \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= D^2 \left(U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \right) \\ &= D^2 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &= D \left(D \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + D \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \right) \\ &= D \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ &= 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

Lema 3. Velja $DU - UD = I$, tj. za vsak diagram $\lambda \in \mathbb{Y}$ velja $D(U(\lambda)) - U(D(\lambda)) = \lambda$.

Preden se lotimo dokaza, preverimo lemo na preprostem primeru.

$$\begin{aligned} (DU - UD)(\square) &= (DU)(\square) - UD(\square) \\ &= D(U(\square)) - U(D(\square)) \\ &= D(\square + \square) - U(\emptyset) \\ &= \square + \square - \square \\ &= \square \end{aligned}$$

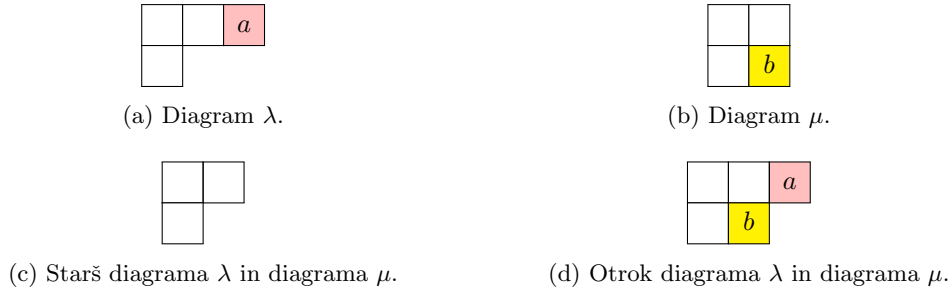
Lema 4. Pogoj $DU - UD = I$ sledi iz naslednjih dveh lastnosti:

- (A) dva diagrama imata isto mnogo skupnih staršev kot skupnih otrok, kar lahko zapišemo kot $|\{\nu \in \mathbb{Y} : \nu \succ \lambda \text{ in } \nu \succ \mu\}| = |\{\nu \in \mathbb{Y} : \lambda \succ \nu \text{ in } \mu \succ \nu\}|$,
- (B) vsak diagram ima natanko enega več otroka kot ima staršev, kar lahko zapišemo kot $|\{\nu \in \mathbb{Y} : \nu \succ \lambda\}| = |\{\nu \in \mathbb{Y} : \lambda \succ \nu\}| + 1$.

Najprej preverimo, da pogoja (a) in (b) res veljata za $\mathbb{Y}$.

Pri (a) opazimo, da imata dva diagrama bodisi enega skupnega starša in enega skupnega otroka bodisi nobenega skupnega. Predpostavimo, da ima diagram λ n polj, diagram μ pa m polj. V primeru, ko $n \neq m$, nimata ne skupnih otrok in ne skupnih staršev. To pa zato, ker bo starš λ imel $n - 1$ polj, starš μ pa $m - 1$. Podobno velja tudi za njuna otroka.

V primeru, ko je $n = m$, lahko imata največ enega skupnega otroka (v kolikor $\lambda \neq \mu$, kar je trivialen robni primer). To se zgodi samo v primeru, ko λ vsebuje polje a , katerega μ ne vsebuje, ter μ vsebuje polje b , katerega λ ne vsebuje. Hkrati pa sta to edini polji, v katerih se λ in μ razlikujeta. Njun starš je diagram, ki ne vsebuje ne polja a ne polja b . Njun otrok pa je diagram, ki vsebuje polje a in polje b .



Slika 7: Primer skupnega otroka in starša dve Youngovih diagramov.

Poglejmo si še pogoj (b). Imamo nek Youngov diagram $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$. Obravnavajmo samo tiste λ_i , za katere velja $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. V i -ti vrstici imamo kot x , katerega lahko odstranimo in tako dobimo starša. V $i + 1$ -ti vrstici pa lahko dodamo novo polje na $\bullet$ in tako dobimo otroka. Tako imamo par, v katerem lahko na enem mestu dodamo polje, na drugem pa odstranimo. Vedno pa lahko še dodamo polje še v prvo vrstico. Tako lahko vedno dodamo eno polje več, kot ga lahko odstranimo, kar pomeni, da je otrok vedno za ena več kot staršev.

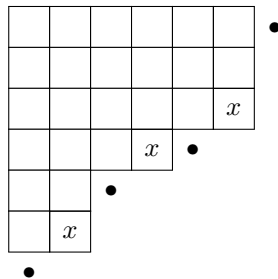


Tabela 14: Primer mest, kjer lahko odstranimo ali dodamo polje pri $\lambda = (6, 6, 6, 4, 2, 2)$.

Dokaz leme 4.

$$(DU - UD)(\lambda) = (DU)(\lambda) - (UD)(\lambda)$$

Opazimo, da v izrazu nastopajo kvečjemu diagrami z istim številom polj kot λ . Iz pogoja (a) sledi, da je koeficient pred poljubnim od λ različnim diagramom v $(DU)(\lambda)$ enak koeficientu v $(UD)(\lambda)$, torej se bosta odštela. Po drugi strani pa iz pogoja (b) sledi, da je koeficient λ v $(DU)(\lambda)$ za ena večji od koeficienta v $(UD)(\lambda)$, torej

$$(DU - UD)(\lambda) = (DU)(\lambda) - (UD)(\lambda) = \lambda.$$

□

Dokaz Robinson-Schenstevlove korespondence. Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije po n . Spomnimo se, da želimo dokazati $\sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2 = n!$. Videli smo, da je f_λ enak številu saturiranih verig od $\emptyset$ do λ . Torej lahko $\sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2$ interpretiramo kot število parov saturiranih verig od $\emptyset$ do nekega skupnega $\lambda \vdash n$. Na vsoto števil takih par verig pa lahko gledamo kot na pot po Youngovi mreži z n koraki gor in nato n koraki navzdol, začenši z $\emptyset$. Število takih poti je ravno enako koeficientu pred $\emptyset$ v izrazu $D^n U^n(\emptyset)$. Torej je dovolj preveriti

$$D^n U^n(\emptyset) = n! \cdot \emptyset.$$

Bazo indukcije $n = 1$ lahko enostavno preverimo $DU(\emptyset) = D(U(\emptyset)) = D(\square) = \emptyset$. Lotimo se še indukcijskega koraka

$$\begin{aligned} D^n U^n(\emptyset) &= D^{n-1}(DU)U^{n-1}(\emptyset) && \text{uporabimo dejstvo } DU - UD = I \\ &= D^{n-1}(UD + I)U^{n-1}(\emptyset) \\ &= D^{n-1}UDU^{n-1}(\emptyset) + D^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) \\ &= D^{n-2}(DU)DU^{n-1}(\emptyset) + D^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) \\ &= D^{n-2}(UD + I)DU^{n-1}(\emptyset) + D^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) \\ &= D^{n-2}UD^2U^{n-1}(\emptyset) + 2D^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) \\ &\vdots \\ &= UD^n U^{n-1}(\emptyset) + nD^{n-1}U^{n-1}(\emptyset). \end{aligned}$$

Opazimo, da se pri prvem členu večkrat spustimo kot dvignemo, zato je enak 0. Ostane nam le drugi člen $nD^{n-1}U^{n-1}(\emptyset)$. Po indukcijski predpostavki je $D^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) = (n-1)! \cdot \emptyset$, zato velja

$$nD^{n-1}U^{n-1}(\emptyset) = n(n-1)! \cdot \emptyset = n! \cdot \emptyset,$$

s čimer zaključimo indukcijo.

□

Literatura

- [Pos] Alexander Postnikov. *18.212 Algebraic Combinatorics (MIT Spring 2024)*. https://math.mit.edu/~apost/courses/18.212_2024/. Accessed 30 August 2025.
- [Wik] Wikipedia contributors. *Hook length formula*. https://en.wikipedia.org/wiki/Hook_length_formula. Accessed 30 August 2025.