Ramseyeva števila

Aljaž Bratkovič Odar, Jurij Hudoklin, Filip Živanović
Mentorica: Manca Ernst

Povzetek

V članku s pomočjo teorije grafov rešimo problem najmanjšega števila ljudi, potrebnega, da lahko med njimi zagotovo najdemo določeno število takih, ki se med seboj poznajo, ali določeno število takih, ki se med seboj ne poznajo. Dokažemo Ramseyev izrek, ki pravi, da tako število vedno obstaja.

1 Uvodni zgled

Predstavljajmo si, da naš sosed na Marsu organizira piknik, na katerega želi povabiti svoje prijatelje z različnih koncev planeta. Vsi se med seboj seveda ne poznajo, sosed pa si ne želi, da bi se kateri od njih na pikniku znašel sam. Ker se zmeraj zavzema za dobrobit svojih prijateljev, si želi zagotoviti, da se bo med povabljenimi določeno število ljudi poznalo ali določeno število ne. Ali lahko sosed poišče najmanjše število ljudi, ki jih mora povabiti, da se bo med njimi zagotovo našlo določeno število znancev ali določeno število neznancev?

2 Osnove teorije grafov

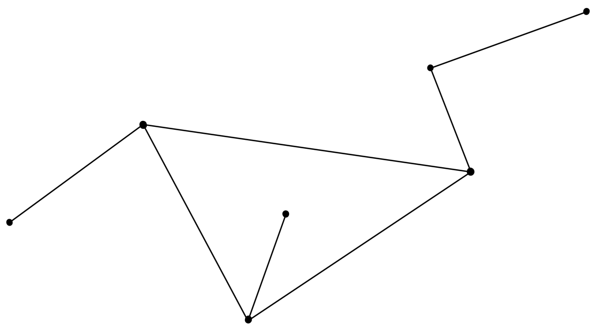
Problema se bomo lotili s teorijo grafov. Najprej si poglejmo nekaj osnovnih definicij ter lastnosti grafov.

Definicija 1. ***Graf*** *G je urejen par (V, E), sestavljen iz neprazne množice vozlišč $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množice povezav $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ med njimi. Vsaka povezava je določena s parom vozlišč, ki ju povezuje.*

Definicija 2. *Vozlišči u in v sta* ***sosednji****, če med njima obstaja povezava. To označimo z $\{u, v\} \in E$, kjer je E množica povezav grafa. Potem pravimo, da sta vozlišči u in v* ***krajišči povezave****.*

Definicija 3. *Naj bo G graf in v vozlišče v njem.* ***Stopnja*** *vozlišča $d(v)$ je enaka številu vozlišč, sosednjih vozlišču v.*

Definicija 4. *Graf je* ***regularen****, kadar imajo vsa njegova vozlišča enako stopnjo. Pravimo, da je graf* ***r-regularen****, če imajo vsa njegova vozlišča stopnjo r.*



Slika 1: Primer grafa.

Lema 1 (O rokovanju)**.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf ter $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ množica njegovih vozlišč. Potem velja*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E|.$$

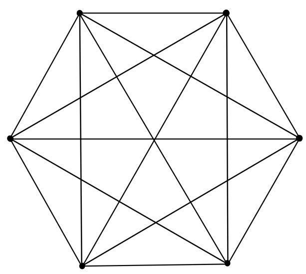
Dokaz. Poglejmo si povezave v grafu G. Vsaka od njih pripada natanko dvema vozliščema. Če seštejemo stopnje vseh vozlišč v grafu G, smo vsako povezavo šteli dvakrat, zato je njihova vsota res enaka dvakratniku števila vseh povezav v grafu. □

Omenimo še posledice leme:

- vsota stopenj vozlišč je sodo število,
- število vozlišč z liho stopnjo je sodo,
- število povezav v r-regularnem grafu z n vozlišči je enako $\frac{nr}{2}$.

Rešitve našega problema se bomo lotili tako, da bomo ljudi predstavili kot vozlišča polnega grafa.

Definicija 5. ***Poln graf*** *je graf, v katerem je vsak par vozlišč povezan z eno povezavo. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n.*

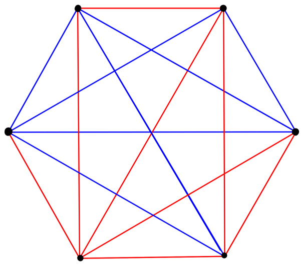


Slika 2: Poln graf K_6.

Definicija 6. *Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ ter naj bo H graf z množico vozlišč $V(H)$ in množico povezav $E(H)$. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, pravimo, da je H* ***podgraf*** *grafa G.*

3 Barvanje grafov

Ali se osebi, ki smo ju predstavili kot vozlišči polnega grafa, poznata ali ne, bomo pokazali z barvanjem povezav grafa.



Slika 3: Graf K_6, pobarvan z dvema barvama.

Definicija 7. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in B množica k barv. Preslikavo $b : E \to B$ imenujemo **k-barvanje povezav** grafa G.*

Definicija 8. *Podgraf H grafa G je **enobarven** glede na neko k-barvanje povezav grafa G, če so vse njegove povezave enake barve.*

Če se osebi poznata, bo povezava med njunima vozliščema pobarvana z eno barvo, in če se ne poznata, z drugo barvo. Da med n ljudmi obstaja skupina p oseb, ki se med seboj poznajo ali ne poznajo, lahko potem pokažemo tako, da v polnem grafu K_n najdemo enobarven podgraf K_p.

Preden rešimo nalogo iz uvoda, si poglejmo naslednja primera.

Naloga 1. *Poišči najmanjše tako število n, da lahko med n ljudmi zagotovo najdemo tri, ki se poznajo, ali tri, ki se ne poznajo.*

Rešitev. Pokazali bomo, da je $n = 6$. Ljudi in njihova poznanstva lahko predstavimo s polnim grafom. Označimo $K_6 = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$. Z rdečo in modro pobarvajmo povezave med vozlišči. Rdeča barva naj predstavlja povezavo med osebama, ki se poznata, modra pa povezavo med osebama, ki se ne. Če tak graf K_6 vsebuje enobarven podgraf K_3, to pomeni, da se v tej množici ljudi trije zagotovo poznajo ali ne poznajo. Če želimo dokazati trditev v nalogi, moramo pokazati, da se v grafu K_6, ki smo ga pobarvali z dvema barvama, vedno pojavi enobarven podgraf K_3.

Poglejmo si vozlišče v_1. Iz njega poteka 5 povezav. Po Dirichletovem principu[1] lahko sklepamo, da so zagotovo vsaj 3 od njih pobarvane z eno barvo, na primer rdečo. Z rdečo barvo pobarvajmo povezave med vozliščem v_1 ter vozlišči v_2, v_3 in v_4. Poglejmo si preostale povezave med temi vozlišči.

Denimo, da v grafu K_6 ni podgrafa K_3 s samimi rdečimi povezavami. Ker smo povezave $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ in $\{v_1, v_4\}$ že pobarvali z rdečo barvo, morata biti povezavi $\{v_2, v_3\}$ ter $\{v_3, v_4\}$ modre barve. Poglejmo si povezavo med vozliščema v_2 in v_4. V primeru, da je povezava $\{v_2, v_4\}$ rdeče barve, smo znotraj grafa K_6 dobili rdeč podgraf K_3 na vozliščih v_1, v_2, in v_4. Zato mora biti povezava $\{v_2, v_4\}$ modre barve. Opazimo, da smo tako na vozliščih v_2, v_3 in v_4 dobili enobarven podgraf K_3 modre barve.

Pokazali smo, da v polnem grafu K_6, pobarvanim z dvema barvama, vedno obstaja enobarven podgraf K_3. To pomeni, da v množici 6 ljudi zagotovo obstaja podmnožica treh, ki se poznajo, ali treh, ki se ne.

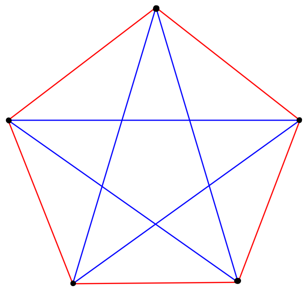
Zdaj moramo le še pokazati, da je 6 najmanjše tako število. Poglejmo si 2-barvanje grafa K_5 na sliki 4. Ker obstaja tako barvanje povezav grafa K_5, da v njem ne najdemo enobarvnega podgrafa K_3, je res $n = 6$.

Naloga 2. *Poišči najmanjše tako število n, da lahko med n ljudmi zagotovo najdemo tri, ki se poznajo, ali štiri, ki se ne poznajo.*

Rešitev. Pokazali bomo, da je $n = 9$. Devet ljudi si predstavljajmo kot poln graf K_9 in na enak način kot v prejšnji nalogi pobarvajmo povezave grafa. Dokažimo, da v takem grafu zagotovo obstaja podgraf K_3 rdeče ali podgraf K_4 modre barve.

Denimo, da rdeč K_3 v tem grafu ne obstaja. Pokažimo, da potem v grafu obstaja moder K_4. Ker smo predpostavili, da rdeč K_3 ne obstaja, je med vsakimi tremi vozlišči vsaj ena modra povezava. Obravnavajmo dva primera.

[1] Dirichletov princip pravi, da če razporedimo n predmetov v k škatel, mora biti v vsaj eni škatli najmanj $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ predmetov.



Slika 4: Graf K_5, pobarvan z dvema barvama tako, da ne vsebuje enobarvnega podgrafa K_3.

Recimo, da iz najmanj enega vozlišča grafa K_9 potekajo vsaj štiri rdeče povezave. Naj bo to vozlišče v_1. Povezave med vozliščem v_1 ter vozlišči v_2, v_3, v_4 in v_5 pobarvajmo z rdečo barvo. Ker vemo, da je med vsakimi tremi vozlišči zagotovo ena modra povezava, moramo povezave $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$ ter $\{v_2, v_5\}$ pobarvati z modro barvo. Ta vozlišča potem sestavljajo moder K_4.

Obravnavajmo še primer, ko iz vsakega vozlišča potekajo največ tri rdeče povezave. Poglejmo si, koliko je vseh rdečih oziroma modrih povezav v tem grafu.

Če uporabimo lemo 1 za rdeče povezave, dobimo

$$\sum_{i=1}^{9} r_i = 2\varepsilon_r,$$

pri čemer smo z r_i označili število rdečih povezav, ki potekajo iz vozlišča v_i, z ε_r pa število vseh rdečih povezav v grafu K_9. Ker smo predpostavili, da je $r_i \leq 3$ za vsak i, je

$$2\varepsilon_r = \sum_{i=1}^{9} r_i \leq 27$$
$$\varepsilon_r \leq 13.$$

Naj bo ε_m število vseh modrih povezav v grafu K_9. Ker je vseh povezav v grafu 36, velja

$$\varepsilon_r + \varepsilon_m = 36,$$

iz česar sledi, da je $\varepsilon_m \geq 23$.

Lemo 1 uporabimo še za modre povezave in dobimo

$$\sum_{i=1}^{9} m_i = 2\varepsilon_m \geq 46,$$

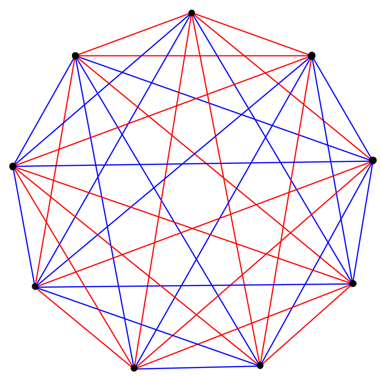
kjer je m_i število modrih povezav, ki potekajo iz vozlišča v_i.

Naj bo $M = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_9\}$. Ker je $M \geq m_i$ za vsak i, velja

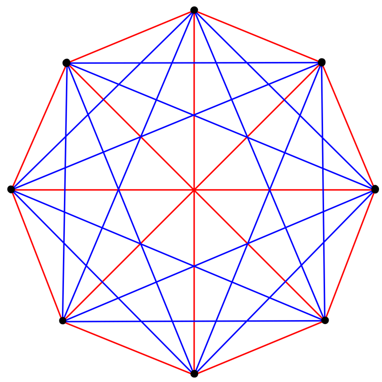
$$9M \geq \sum_{i=1}^{9} m_i \geq 46$$
$$M \geq 6.$$

Iz tega sledi, da v grafu zagotovo obstaja vozlišče, iz katerega poteka vsaj 6 modrih povezav. Naj bo to vozlišče v_1. Z modro barvo pobarvajmo povezave $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$ ter $\{v_1, v_7\}$.

V prejšnji nalogi smo pokazali, da v polnem grafu na 6 vozliščih zagotovo najdemo enobarven podgraf K_3. Ker smo predpostavili, da v grafu K_9 ni rdečega podgrafa K_3, mora podgraf na vozliščih v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 ter v_7 vsebovati podgraf K_3 modre barve. Denimo, da je ta na vozliščih v_2, v_3 in v_4. Ker



Slika 5: Graf K_9, pobarvan z dvema barvama.



Slika 6: Graf K_8, pobarvan z dvema barvama tako, da ne vsebuje enobarvnega podgrafa K_3 ali K_4.

so povezave $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ ter $\{v_1, v_4\}$ modre barve, vozlišča v_1, v_2, v_3 in v_4 tvorijo podgraf K_4 s samimi modrimi povezavami.

Dokazali smo, da v polnem grafu K_9, ki smo ga pobarvali z dvema barvama, vedno najdemo podgraf K_3 ene ali podgraf K_4 druge barve. Ker obstaja tako 2-barvanje povezav grafa K_8, prikazano na sliki 6, da v njem ne najdemo niti enobarvnega podgrafa K_3 niti enobarvnega podgrafa K_4, je 9 res najmanjše iskano število.

4 Ramseyev izrek

Zdaj se problema lotimo še v splošnem. Pokazali bomo, da lahko za vsaki naravni števili s in t poiščemo najmanjše tako število n, da med n ljudmi vedno najdemo s znancev ali t neznancev.

Definicija 9. ***Ramseyevo število*** *$R(s,t)$ je najmanjše tako število n, za katerega velja, da katerokoli 2-barvanje povezav grafa K_n vsebuje enobarven podgraf K_s ene ali enobarven podgraf K_t druge barve.*

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da lahko v grafu K_6 zagotovo najdemo enobarven podgraf K_3, v grafu K_5 pa ne, kar pomeni, da je $R(3,3) = 6$. Na podoben način smo pokazali tudi $R(3,4) = 9$. Da Ramseyevo število obstaja za katerikoli naravni števili s in t, pravi Ramseyev izrek.

Izrek 1 (Ramseyev izrek)**.** *Za vsaki naravni števili s in t obstaja Ramseyevo število $R(s,t)$.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo na $s + t$.

Najprej si poglejmo bazo indukcije $s + t = 2$. To lahko dosežemo samo v primeru, ko je $s = t = 1$, in očitno velja $R(1,1) = 1$.

Naj bo N poljubno naravno število. Predpostavimo, da obstaja Ramseyevo število $R(s,t)$ za vsaki naravni števili s in t, za kateri velja $s + t < N$. Naj bosta S in T taki naravni števili, da je $S + T = N$.

Dovolj je dokazati, da obstaja Ramseyevo število $R(S,T)$. Ker je $S+T-1<N$, iz indukcijske predpostavke sledi, da obstajata Ramseyevi števili $R(S-1,T)$ in $R(S,T-1)$.

Naj bo M tako naravno število, da je $M \geq R(S-1,T)+R(S,T-1)$. Pobarvajmo graf K_M z dvema različnima barvama. Naj bosta to rdeča ter modra. Poglejmo poljubno vozlišče v grafa K_M. Iz njega poteka $M-1$ povezav. Po Dirichletovem principu velja, da je vsaj $R(S-1,T)$ od teh povezav rdeče barve ali $R(S,T-1)$ povezav modre barve. Obravnavajmo oba primera.

Denimo, da iz vozlišča v poteka $R(S-1,T)$ rdečih povezav. Teh $R(S-1,T)$ vozlišč, s katerimi je vozlišče v povezano, tvori poln graf $K_{R(S-1,T)}$. Vemo, da število $R(S-1,T)$ obstaja, zato mora graf $K_{R(S-1,T)}$ vsebovati podgraf K_{S-1} rdeče ali podgraf K_T modre barve. Če je v grafu $K_{R(S-1,T)}$ moder podgraf K_T, smo zaključili, saj ta primer ustreza definiciji Ramseyevega števila $R(S,T)$. Poglejmo si še primer, ko v grafu najdemo rdeč podgraf K_{S-1}. Ker je vsako vozlišče v podgrafu K_{S-1} z vozliščem v povezano z rdečo povezavo, vsa njegova vozlišča skupaj z vozliščem v tvorijo poln rdeč podgraf K_S grafa K_M.

V primeru, da iz vozlišča v poteka $R(S,T-1)$ modrih povezav, na podoben način pokažemo, da lahko potem v grafu K_M najdemo podgraf K_S rdeče ali podgraf K_T modre barve.

Pokazali smo, da ne glede na barvanje grafa K_M v njem najdemo enobarven podgraf K_S ali enobarven podgraf K_T. Iz tega sledi, da $R(s,t)$ obstaja.

$\square$

Izrek, ki smo ga dokazali, zagotavlja, da za vsaki naravni števili s in t obstaja Ramseyevo število $R(s,t)$. A računanje Ramseyevih števil hitro postane zelo zahtevno. Madžarski matematik Paul Erdös naj bi nekoč celo dejal, da če bi na Zemljo prišli vesoljci in od nas zahtevali število $R(5,5)$ ali uničenje planeta, bi lahko človeštvo napelo vse sile in morda rešilo problem. Toda, če bi namesto tega želeli vedeti, koliko je $R(6,6)$, bi se morali pripraviti na vojno. Še dobro, da želi naš sosed piknik pripraviti na Marsu.

5 Zaključek

Problem o najmanjšem številu ljudi, potrebnem, da med njimi najdemo določeno število znancev ali neznancev, smo rešili s pomočjo barvanja povezav polnega grafa. Spoznali smo Ramseyeva števila in dokazali Ramseyev izrek, ki pravi, da tako število vedno obstaja.

Literatura

[1] V. Jungic, *Introduction to Ramsey Theory*, 2014, dostopno na: `https://www.sfu.ca/~vjungic/Ramsey/RamseyNotes.pdf`