

# Procesi razvejanja

Martin Flisar, Ema Franko, Marséla Supé Vide

Mentor: Juš Kocutar



## Povzetek

Definirane so slučajne spremenljivke z zalogo vrednosti v  $\mathbb{Z}$ , verjetnostne rodovne funkcije in procesi razvejanja pri katerih število potomcev osebkov sledi fiksni porazdelitvi. Za proces razvejanja je izračunana verjetnost izumrtja kot najmanjša fiksna točka verjetnostne rodovne funkcije na intervalu  $[0, 1]$ .

## 1 Uvod

Na Marsu že dolgo sumijo, da priimki izumirajo in da nekaterih verjetno že prav kmalu ne bo več. Ljudstvo je svoje skrbi predstavilo kapitanu na rednem mesečnem sestanku marsovske populacije. Vodja je razumel njihovo krizo identitete in je najel najboljše marsovske matematike, da izračunajo verjetnost izginotja priimkov, saj bo le to lahko pomirilo njemu zveste prebivalce.

Strokovnjaki so se vneto lotili dela in hitro ugotovili, da gre za proces razvejanja, pri katerem se bo za pot do rešitve treba vrniti na čisti začetek izbranega rodu. Kot vsi vemo, se priimki na Marsu prenašajo po ženski strani. Ob poroki mož prevzame ženini priimek, ki je potem dodeljen tudi otrokom. S tem je zagotovljen obstanek priimka.

Med raziskovanjem so strokovnjaki ugotovili, da sta se že Zemljana Galton in Watson ukvarjala s podobnimi vprašanji. To je bil revolucionarni premik v njihovi raziskavi, ki jim je dal nov zagon. Definirali so slučajne spremenljivke, poiskali fiksne točke rodovnih funkcij in prišli do nerodne ugotovitve.

Na veliko žalost Marsovcev so dokazali, da bo vsak priimek nekoč zagotovo izumrl, naj bo to danes, jutri ali čez tisoč let. Poglejmo si, kako jim je to uspelo.

## 2 Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka spreminja dano vrednost glede na izid poskusa. Poznamo diskretne, npr. število otrok v neki generaciji, in zvezne slučajne spremenljivke, kot temperatura. Formalna matematična definicija zahteva uporabo pojma verjetnostni prostor.

**Definicija 1.** Verjetnostni prostor je trojica  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , kjer je  $\Omega$  množica,  $\mathcal{A}$  neka družina podmnožic množice  $\Omega$  in  $\mathbb{P}$  funkcija, ki slika iz  $\mathcal{A}$  v  $[0, 1]$ , tako da

- velja  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- naj bodo  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  paroma disjunktne množice iz  $\mathcal{A}$ , potem je  $\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ .

V splošnem družina  $\mathcal{A}$  ne more biti poljubna družina podmnožic množice  $\Omega$ , temveč mora zadoščati pogoju  $\sigma$ -algebre. Za potrebe našega članka to ni problem, ker za množico  $\Omega$  običajno vzamemo  $\mathbb{Z}$ , ki je števna množica, in lahko vzamemo  $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{Z}}$ , torej celotno potenčno množico.

Slučajna spremenljivka je definirana kot funkcija  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . V tem članku se ukvarjamo izključno s slučajnimi spremenljivkami, ki imajo zalogo vrednosti v  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Namesto  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = k\})$  pišemo  $\mathbb{P}(X = k)$ .

**Definicija 2.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka, potem je porazdelitev od  $X$  funkcija  $F_X$  definirana s

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Da podamo slučajno spremenljivko  $X$ , je dovolj, da podamo njeno porazdelitev. To pomeni, da moramo podati  $\mathbb{P}(X = k)$  za vsako nenegativno celo število  $k$ .

## 2.1 Pričakovana vrednost

Pričakovana vrednost predstavlja povprečno vrednost spremenljivke, ko poskus ponovimo velikokrat. Pri poskusu lahko zelo redko ali nikoli ne dobimo pričakovane vrednosti. Pričakovana vrednost tudi ni nujno ena izmed vrednosti, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka.

**Definicija 3.** Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke  $X$  je definirana kot

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

Za naše slučajne spremenljivke lahko pričakovana vrednost tudi ne obstaja, torej vsota

$$\sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

divergira in gre proti neskončnosti, v teh primerih pišemo  $\mathbb{E}(X) = \infty$ .

Pričakovano vrednost lahko določimo za diskretne in zvezne porazdelitve, le da pri zveznih vsoto zamenjamo integral.

Za naš primer se bomo osredotočili na tri porazdelitve, to so Bernoullijeva, binomska in geometrična porazdelitev.

## 2.2 Bernoullijeva porazdelitev

Bernoullijeva porazdelitev opisuje poskus z dvema možnima izidoma. Dogodek se zgodi z verjetnostjo  $p$  in mu priredimo vrednost 1, ali pa se dogodek ne zgodi z verjetnostjo  $1 - p$  in mu priredimo vrednost 0.

To lahko zapišemo kot

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p,$$

kjer je  $X$  slučajna spremenljivka,  $\mathbb{P}$  pa verjetnost. Porazdelitev je zapisana kot

$$f(k; p) = \begin{cases} p; & k = 1, \\ 1 - p; & k = 0, \\ 0; & k \geq 2. \end{cases}$$

Pričakovana vrednost funkcije je

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

**Primer 1.** Imamo nepošten marsovski novec, ki ga mečemo v zrak. Verjetnost, da pade cifra je

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,6 = p.$$

Verjetnost, da pade grb je torej  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$ .

## 2.3 Binomska porazdelitev

Binomska porazdelitev je razširitev Bernoullijeve porazdelitve. Medtem ko Bernoullijeva porazdelitev opisuje en sam poskus z dvema možnima izidoma, dogodek se zgodi ali ne, tj. 0 ali 1, binomska porazdelitev opisuje verjetnost, da se dogodek zgodi natanko  $k$ -krat v  $n$  neodvisnih Bernoullijevih poskusih. Velja torej

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

To lahko vidimo tako, da si izberemo podmnožico velikosti  $k$ , katerih je  $\binom{n}{k}$ . Potem so Bernoullijeve spremenljivke v tej množici enake 1, kar ima verjetnost  $p^k$ , ker so neodvisne med sabo, tiste izven pa 0, kar ima verjetnost  $(1-p)^{n-k}$ .

Vsota  $n$  Bernoullijevih poskusov z enako verjetnostjo uspeha  $p$  vodi do binomske porazdelitve, zapisane kot

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

**Primer 2.** Če mečemo isti marsovski novc, kakšna je verjetnost, da bo padla cifra natanko enkrat v desetih poskusih? Imamo binomsko porazdelitev s parametri

$$X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0,6).$$

Za  $k = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \binom{10}{1} \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^9 \\ &= 0,001572864.\end{aligned}$$

Verjetnost, da bo cifra padla točno enkrat v desetih metih, je torej približno 0,00157.

## 2.4 Geometrična porazdelitev

Geometrična porazdelitev prav tako izhaja iz Bernoullijeve porazdelitve, vendar meri drugo količino. Namesto, da nas zanima, kolikokrat se bo določen izid pojavil v določenem številu poskusov (kot pri binomski porazdelitvi), nas pri geometrični porazdelitvi zanima, koliko poskusov je potrebnih do prvega uspeha.

Če ima vsak poskus verjetnost uspeha  $p$ , potem geometrična porazdelitev meri število neuspehov pred prvim uspehom, zato obstaja možnost, da spremenljivka zavzame vrednost  $k = 0$ , če je prvi met uspešen. Takšna porazdelitev je zapisana kot

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

in njena porazdelitev je  $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k \cdot p$  za  $k \geq 0$ .

## 3 Verjetnostna rodovna funkcija

Iz slučajne spremenljivke  $X$  definiramo potenčno vrsto, ki nam pomaga pri računanju verjetnosti izumrtja populacije. Imenujemo jo verjetnostna rodovna funkcija.

**Definicija 4.** Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka in  $s \in [-1, 1]$ . Teda je verjetnostna rodovna funkcija definirana kot

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}(X = k).$$

Funkcija  $G_X(s)$  konvergira, torej ima limito pri vrednostih  $-1 \leq s \leq 1$ . To lahko izpeljemo za  $s \in (-1, 1)$  z uporabo dejstva, da  $0 \leq \mathbb{P}(X = k) \leq 1$  za vsak  $k$  in s primerjavo z geometrijsko vrsto. Za  $s \in \{-1, 1\}$  pa to velja iz dejstva, da je  $G_X(1) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k) = 1$ .

Za boljše razumevanje zgornje funkcije najprej dokažimo nekaj njenih lastnosti.

1. Prvi in konstantni člen dane funkcije je  $G_X(0)$  in zanj velja  $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ .

2. Pri  $s = 1$  je vrednost funkcije  $G_X(1) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k) = 1$ .
3. Izračunamo še prvi odvod verjetnostne rodovne funkcije in njegovo vrednost pri številu 1.

$$\begin{aligned} G'_X(s) &= \sum_{k \geq 0} k \cdot s^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \\ G'_X(1) &= \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Poglejmo si verjetnostne rodovne funkcije za nekaj različnih porazdelitev slučajnih spremenljivk.

Najprej naj velja  $X \sim \text{Ber}(p)$ . Njena rodovna funkcija je po definiciji

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{P}(X = 0) + s \cdot \mathbb{P}(X = 1) \\ &= (1 - p) + sp. \end{aligned}$$

Nato naj velja  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , torej

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Verjetnostno rodovno funkcijo lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^n s^k \left( \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ps)^k (1 - p)^{n-k} \\ &= ((1 - p) + sp)^n. \end{aligned}$$

Naj bo  $X \sim \text{Geom}(p)$ . Tedaj velja

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^k \cdot p.$$

Izračunamo verjetnostno rodovno funkcijo

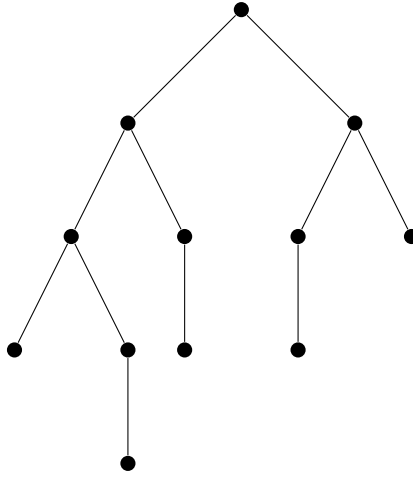
$$\begin{aligned} G_Y(s) &= \sum_{k \geq 0} s^k (1 - p)^k \cdot p \\ &= p \cdot \sum_{k \geq 0} (s(1 - p))^k \\ &= \frac{p}{1 - s(1 - p)}. \end{aligned}$$

## 4 Galton-Watsonov proces

V časih vladavine kraljice Viktorije se je med tedanjimi aristokrati širila skrb. Skrbelo jih je, da bo njihov priimek izumrl, s tem pa seveda tudi vsa njihova dediščina ter vsi spomini na njihove neizmerne dosežke. S problemom se je leta 1869 začel ukvarjati Francis Galton. Čez štiri neuspešna leta je vprašanje o preživetju priimkov objavil v tedniku Educational Times. Odgovor je dobil od matematika Henryja Williama Watsona, ki je (na veliko nezadovoljstvo plemišva) z mojstrsko uporabo rodovnih funkcij zadevi prišel do dna in pokazal, da bodo vsi priimki v takratnih (in tudi današnjih) okoliščinah izumrli.

Tako se je začel razvoj področja verjetnosti, ki se ukvarja s procesi razvejanja. S takimi procesi lahko modeliramo več kot le propad rodbin – primeri vključujejo:

- preživetje novega mutiranega gena,
- sprožitev jedrskih verižnih reakcij,



Slika 1: Primer procesa razvejanja.

- dinamika izbruhov bolezni, ...

Vse te probleme lahko predstavimo z drevesom, kot je prikazano na zgornji sliki.

Začnemo z enim osebkom, ki ima neko število potomcev, vsak izmed teh potomcev pa ima svoje potomce. To se nadaljuje vse dokler proces ne izumre, ali pa v nedogled. V idealiziranem modelu imajo vsi posamezniki enako verjetnostno porazdelitev za število potomcev. Na zgornji sliki je

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{3}; & k \in \{0, 1, 2\}, \\ 0; & k > 2. \end{cases}$$

Računalniška simulacija procesa je zagnana 100000-krat in vsi procesi izumrejo. Najdaljši izmed njih preživi 900 generacij.

## 5 Matematično ogrodje procesa razvejanja

Preučujemo proces, kjer je  $X$  slučajna spremenljivka, ki nam pove število potomcev posameznika. Naj bo  $Z_t$  spremenljivka, ki opisuje število osebkov v generaciji  $t$ . Porazdelitev spremenljivke  $Z_{t+1}$  lahko implicitno definiramo s porazdelitvama spremenljivk  $Z_t$  in  $X$ , tako dobimo

$$Z_0 = 1, \\ Z_{t+1} = \sum_{k=1}^{Z_t} X_{t,k},$$

kjer so  $X_{t,k}$  za  $t \geq 0$  in  $k \geq 1$  spremenljivke števila potomcev  $k$ -tega posameznika iz generacije  $Z_t$ . Vse spremenljivke  $X_{t,k}$  so med seboj neodvisne in imajo enako porazdelitev kot  $X$ .

Naj bo še

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z_1),$$

pričakovana vrednost potomcev posameznika.

Potem imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{t+1}) &= \sum_{k \geq 0} k \left( \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_{t+1} = k \mid Z_t = n) \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_t = n) \cdot \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(Z_{t+1} = k \mid Z_t = n) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_t = n) \cdot \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X_{t,1} + \dots + X_{t,n} = k) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_t = n) \cdot \mathbb{E}(X_{t,1} + \dots + X_{t,n}) \\
&\stackrel{**}{=} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z_t = n) \cdot n\mu \\
&= \mu \cdot \mathbb{E}(Z_t),
\end{aligned}$$

kjer enakost (\*) sledi iz dejstva, da mora biti vsota potomcev vsakega posameznika iz generacije  $t$  enaka  $k$ , enakost (\*\*) pa iz linearnosti pričakovane vrednosti. V splošnem torej velja

$$\mathbb{E}(Z_t) = \mu^t.$$

Če drži tudi  $\mu < 1$ , lahko hitro uzremo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_t) = 0,$$

od koder je verjetnost, da je v generaciji  $t$  vsaj en potomec, enaka

$$\mathbb{P}(Z_t > 0) = \mathbb{P}(Z_t \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_t) = \mu^t,$$

torej je v limiti ta verjetnost enaka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_t > 0) = 0,$$

kar pomeni brezpogojno izumrtje procesa.

To se sklada z intuicijo v primeru, da je  $X = \text{Ber}(p)$ , saj je potem  $\mu = p < 1$ , torej je verjetnost, da proces preživi do generacije  $t$  enaka  $p^t$ , saj mora vsak član imeti natanko enega potomca.

## 6 Verjetnost izumrtja

Naj bo

$$q_t := \mathbb{P}(Z_t = 0)$$

verjetnost, da bo proces izumrl do generacije  $t$ .

Denimo, da je v prvi generaciji točno  $k$  posameznikov. Potem vsak izmed teh posameznikov tvori nov neodvisen podproces, ki se obnaša enako kot originalen. Verjetnost, da v generaciji  $t+1$  ni nikogar, je enaka verjetnosti, da v generaciji  $t$  od vsakega izmed  $k$  podprocesov ni nikogar.

Vidimo torej, da velja

$$q_{t+1} = \mathbb{P}(Z_{t+1} = 0) = \sum_{k \geq 0} (\mathbb{P}(Z_t = 0))^k \cdot \mathbb{P}(Z_1 = k),$$

kar je natanko vrednost verjetnostne rodovne funkcije spremenljivke  $X$ , ocenjene v  $q_t$ ,

$$q_{t+1} = G(q_t).$$

Tako dobimo priročno rekurzivno zvezo za izračun verjetnosti izumrtja. Oglejmo si sedaj limitno vedenje te verjetnosti. Ker so ti dogodki vsebovani en v drugem, velja  $\{Z_0 = 0\} \subseteq \{Z_1 = 0\} \subseteq \dots$ , in zato tudi  $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots$ . Če v neki generaciji ni potomcev, potem ne bo nobenega tudi v vseh naslednjih.

Naj bo tako še

$$q = \mathbb{P}(\text{obstaja } t, \text{ tako da } Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_t$$

verjetnost, da proces na neki točki izumre.

Od tod hitro sledi tudi

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} q_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} G(q_t).$$

Znano je, da je potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom 1 na odprtem intervalu  $(-1, 1)$  zvezna in neskončnokrat odvedljiva. Zato lahko limito prestavimo v funkcijo in dobimo

$$q = G\left(\lim_{t \rightarrow \infty} q_t\right) = G(q).$$

Torej je  $q$  fiksna točka funkcije  $G$ . Želimo pokazati, da je  $q$  tudi najmanjša fiksna točka.

Predpostavimo najprej, da velja  $\mathbb{P}(X = k) = 0$  za vse  $k \geq 2$ . Obravnavamo torej Bernoullijevo porazdelitev  $\text{Ber}(p)$ . Zato je  $G$  linearna funkcija, katere edina fiksna točka je  $q = 1$ , za vsak  $p < 1$ . Primer  $p = 1$  nas ne zanima, ker proces ne more izumreti.

Sicer pa obstaja nek  $k_0 \geq 2$ , tako da velja

$$\mathbb{P}(X = k_0) > 0.$$

Potem lahko izračunamo drugi odvod verjetnostne rodovne funkcije

$$G''(s) = \left( \sum_{k \geq 0} k s^{k-1} \mathbb{P}(x = k) \right)' = \sum_{k \geq 0} k(k-1) s^{k-2} \mathbb{P}(x = k).$$

Velja torej

$$G''(s) \geq k_0(k_0 - 1) s^{k_0-2} \mathbb{P}(x = k_0) > 0$$

za vse  $s > 0$ , in to nam pove, da je funkcija  $G$  konveksna na intervalu  $(0, 1)$ .

## 7 Nova funkcija $H(s)$

Orodje, ki ga bomo v tem poglavju uporabljali za dokazovanje, je Rollov izrek.

**Izrek 1** (Rollov izrek). *Naj bo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, ki je odvedljiva na  $(a, b)$ , in za katero velja  $f(a) = f(b) = 0$ . Tedaj obstaja  $x_0 \in (a, b)$ , za katerega velja  $f'(x_0) = 0$ .*

Uvedemo novo funkcijo s predpisom  $H(s) = G(s) - s$ , kar pomeni, da so fiksne točke funkcije  $G(s)$  natanko ničle funkcije  $H(s)$ . Velja tudi  $G'' = H''$ , torej je  $H$  konveksna funkcija natanko tedaj, ko je  $G$  konveksna funkcija. Ocenimo, koliko ničel ima funkcija  $H$  na intervalu  $[0, 1]$ . Najprej izračunamo vrednosti funkcije v mejah intervala.

$$\begin{aligned} H(0) &= G(0) - 0 = \mathbb{P}(X = 0) > 0, \\ H(1) &= G(1) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Zanima nas še vrednost odvoda funkcije  $H$  v izračunani ničli. Velja  $H'(s) = G'(s) - 1$ , torej  $H'(1) = \mu - 1$ .

Najprej predpostavimo, da je pričakovana vrednost  $X$  manjša ali enaka 1, torej  $\mu \leq 1$ . Iz konveksnosti funkcije  $H$  sledi, da je njen odvod naraščajoč. Če je  $H'(1) = \mu - 1 \leq 0$  in odvod narašča, je na intervalu  $[0, 1)$  vedno negativen.

Predpostavimo, da na intervalu  $(0, 1)$  obstaja še ena ničla  $x_0$  funkcije  $H$ . Na podlagi Rollovega izreka bi tedaj moralo obstajati število  $x_1$ , tako da velja  $x_0 < x_1 < 1$  in v kateri je vrednost odvoda enaka 0. To za odvod v našem primeru ni možno, saj smo že prej ugotovili, da je na intervalu  $[0, 1)$  negativen. Tako smo s protislovjem dokazali, da ima funkcija na intervalu le eno ničlo, če je  $\mu \leq 1$ . Ker je  $q = G(q)$ , sledi, da je pri  $\mu \leq 1$  verjetnost izumrtja enaka  $q = 1$ .

Če je  $\mu > 1$ , pa velja

$$H'(1) = G'(1) - 1 = \mu - 1 > 0,$$

torej je funkcija  $H$  v točki 1 naraščajoča. V kombinaciji s konveksnostjo nam to zagotavlja obstoj natanko ene ničle funkcije  $H$  na intervalu  $[0, 1]$ , ki ni enaka 1. Vemo namreč, da je  $H'(0) = \mathbb{P}(x = 0) - 1 < 0$  in  $H'(1) > 0$ , zato iz zveznosti funkcije  $H'$  in konveksnosti funkcije  $H$  sledi, da ima  $H'$  enolično določeno ničlo na  $(0, 1)$ .

Obstoj treh ničel funkcije  $H$  bi tako preko dvakratne uporabe Rollovega izreka impliciral obstoj dveh ničel funkcije  $H'$  na intervalu  $(0, 1)$ , kar vodi v protislovje.

Pokažimo, da je verjetnost izumrtja ravno najmanjša ničla funkcije  $H$ . Naj bo  $s_0$  tista ničla funkcije  $H$ , ki ni enaka 1. Opazimo še

$$G(q_t) = q_{t+1} \geq q_t,$$

od koder sledi  $H(q_t) \geq 0$ . Torej za vse  $q_t$  drži, da se nahajajo na intervalu  $[0, s_0] \cup \{1\}$ .

Sklepanje lahko ponovno razdelimo na dva primera. V prvem primeru obstaja  $t = T$ , za katerega je  $q_T = 1$ . To bi pomenilo

$$\mathbb{P}(Z_T = 0) = 1 \implies \mathbb{E}(Z_T) = 0,$$

kar je protislovje, saj je  $\mathbb{E}(Z_T) = \mu^T > 1$ .

Torej mora veljati drugi primer, v katerem bo  $q_t$  na intervalu  $[0, s_0]$ , zato bo tudi limita zaporedja  $q_t$  na tem intervalu, torej je edina možnost  $q = s_0$ , s čimer je izrek dokazan.

**Izrek 2.** *Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti v  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Potem je verjetnost izumrtja procesa razvejanja z razporeditvijo potomcev  $X$  enaka najmanjši fiksni točki funkcije  $G_X(s)$  na intervalu  $[0, 1]$ .*

## 8 Dodatna analiza

Pokažemo lahko tudi, da za vsak  $0 \leq y \leq 1$  obstaja porazdelitev  $X$ , tako da velja

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_t = 0) = y.$$

Izberemo si porazdelitev

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} a; & k = 0, \\ a; & k = 1, \\ 1 - 2a; & k = 2, \\ 0; & k > 2. \end{cases}$$

Izračunamo verjetnost izumrtja  $q$ , tako da rešimo enačbo  $G(q) = q$ . Dobimo kvadratno enačbo, katere najmanjša nenegativna rešitev za  $a \in [0, \frac{1}{3}]$  je  $\frac{a}{1-2a}$ . Vidimo, da ima ta racionalna funkcija vrednost 0 za  $a = 0$  in 1 za  $a = \frac{1}{3}$  ter je strogo naraščajoča na tem intervalu. Zato bo zavzela vsako vrednost od 0 do 1.

## 9 Zaključek

Zanimala nas je verjetnost izumrtja priimkov. S pomočjo verjetnostnega prostora smo definirali slučajno spremenljivko in njeno pričakovano vrednost. Za boljše razumevanje smo si predstavljali Bernoullijevo, binomsko in geometrično porazdelitev slučajne spremenljivke. Nato smo definirali verjetnostno rodovno funkcijo  $G_X(s)$  in raziskali matematično ogrodje procesa razvejanja. Uvedli smo novo funkcijo  $H(s)$  in z njeno pomočjo ugotovili, da je verjetnost izumrtja procesa razvejanja enaka najmanjši fiksni točki funkcije  $G_X(s)$  na intervalu  $[0, 1]$ . Če je  $\mu \leq 1$ , proces vedno izumre. Če je  $\mu > 1$ , preživi za vedno z neničelno verjetnostjo, ki jo lahko natančno izračunamo. Marsovci in Marsovke žal nimajo sreče, saj za ohranitev priimka potrebujejo rodnost vsaj 2,1, toda to je v težkih marsovskih razmerah skoraj nemogoče.

## Literatura

- [1] T. Müller, *Stochastic Processes*, zapiski s predavanj