# Popolna števila

Adam Bürmen, Ekaterina Chizhova
Mentor: Nino Cajnkar

**Povzetek**

Najprej so definirana popolna števila, nato so obravnavana soda in liha popolna števila. Ugotovljena je potrebna oblika sodih popolnih števil. Raziskana so liha popolna števila in ugotovljeno je, da njihove rešitve ne poznamo. Raziskani so pogoji, ki veljajo za liha popolna števila.

## 1 Uvod

Morda vam je kakšno število všeč, morda imate najljubše število, morda se vam kakšno celo zdi popolno. Na srečo so matematiki že v grških časih določili, katera števila so popolna, da si vam ni treba beliti glave s takšnimi težkimi odločitvami. Danes poznamo prvih nekaj sodih popolnih števil, nismo pa še odkrili, koliko jih je. Za razliko od sodih popolnih števil, o lihih ne vemo niti, ali obstajajo. Zaradi svoje preprostosti in visoke težavnosti je to eden izmed najbolj znanih odprtih problemov v matematiki.

## 2 Popolna števila

Laično lahko definiramo popolna števila kot taka števila, katerih seštevek vseh deliteljev je dvakrat večji kot število samo. Ta definicija je na začetku raziskovanja popolnih števil služila svojemu namenu, dokler ni Euler v srednjem veku iznašel sigma funkcije in revolucioniral nadaljnje delo na problemu.

**Definicija 1.** ***Seštevek deliteljev*** *oziroma* ***sigma funkcija*** *je funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s predpisom*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

**Definicija 2.** ***Popolna števila*** *so naravna števila, za katera velja*

$$\sigma(n) = 2n.$$

**Definicija 3.** ***Pravi delitelji*** *števila $n \in \mathbb{N}$ so vsa taka števila $d \in \mathbb{N}$, za katera velja $d \mid n$ in $1 < d < n$.*

**Definicija 4.** *Rečemo, da je število $n$ **deficitno** ali **nezadostno**, če velja $\sigma(n) < 2n$, in **obilno**, če je $\sigma(n) > 2n$. Števili, katerih vsota pravih deliteljev je enaka, se imenujeta **prijateljski števili**, večja množica takšnih števil pa se imenuje **družabno število**. Število, ki je prijateljsko samo sebi, je popolno število. Popolno število je tudi družabno število s periodo 1.*

V naslednjem izreku bomo dokazali, da je funkcija seštevka deliteljev **multiplikativna**.

**Izrek 1.** *Za naravni števili $m$ in $n$ z $gcd(m,n) = 1$, velja*

$$\sigma(mn) = \sigma(m) \cdot \sigma(n).$$

*Dokaz.* Naj bodo $1, d_1, d_2, \cdots, d_k$ delitelji $n$ ter $1, t_1, t_2, \cdots, t_j$ delitelji $m$. Po definiciji velja

$$\sigma(n)\sigma(m) = (1 + d_1 + \cdots + d_k)(1 + t_1 + \cdots + t_j).$$

Ko vsoti deliteljev zmnožimo, bo vsak dobljeni člen v vsoti delitelj $mn$. Ker sta si $m$ in $n$ tuji, se bodo na desni strani enačbe pojavili vsi delitelji $mn$, saj lahko poljubnega zapišemo kot zmnožek enega delitelja $m$ in delitelja $n$. Zaradi tujosti $m$ in $n$ se ne bo noben člen ponovil dvakrat, torej je izraz enak $\sigma(mn)$. Zato je sigma funkcija res multiplikativna. □

**Izrek 2.** *Naj bo $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ praštevilski razcep števila $N$, kjer so $p_i$ njegovi praštevilski delitelji in $\alpha_i$ potenca $i$-tega praštevilskega delitelja v razcepu. Potem je*

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

*Dokaz.* Po izreku 1 sledi

$$\sigma\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \sigma(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

kjer smo v drugi neenakosti upoštevali dejstvo, da

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + ... + p^{\alpha-1} + p^\alpha.$$

□

**Lema 3.** *Naj bo $N$ naravno število in $\mu$ pravi delitelj števila $N$. Potem velja*

$$\sigma(\mu) < \sigma(N).$$

*Še več, velja tudi*

$$\frac{\sigma(\mu)}{\mu} < \frac{\sigma(N)}{N}.$$

*Dokaz.* Najprej izračunamo $\sigma(N)/N$

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{d|N} d = \frac{1}{N} \sum_{d|N} \frac{N}{d} = \sum_{d|N} \frac{1}{d}.$$

Ker je $\mu$ pravi delitelj $N$, bo veljalo, da je vsak delitelj $\mu$ tudi delitelj $N$, zato z uporabo zgornje enakosti lahko dokažemo željen rezultat

$$\frac{\sigma(N)}{N} > \frac{\sigma(\mu)}{\mu}.$$

Ker je $\mu$ pravi delitelj $N$, so vsi delitelji $\mu$ tudi delitelji $N$, ker pa tudi $N$ deli samega sebe, nujno sledi $\sigma(\mu) < \sigma(N)$ in dokazali smo tudi prvo neenakost. □

**Posledica 4.** *Če je $N$ popolno število, potem velja*

$$\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2.$$

## 2.1 Soda popolna števila

Med nekaj prvimi sodimi popolnimi števili so 6, 28, 496, 8128. Poznamo le končno mnogo sodih popolnih števil.

**Izrek 5** (Cataldi-Fermat)**.** *Če je $2^n - 1$ praštevilo za neko naravno število $n$, bo $n$ tudi praštevilo.*

*Dokaz.* Denimo, da lahko zapišemo $n = rs$ za $r, s \in \mathbb{N}$, za katera velja $r, s > 1$

$$2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)(1 + 2^r + \cdots + (2^r)^{s-1}).$$

Potem velja, da $2^n - 1$ ni praštevilo, kar nas pripelje do protislovja, ki dokaže izrek. □

**Definicija 5.** *Praštevila oblike $2^n - 1$ imenujemo **Mersennova praštevila**.*

**Izrek 6.** *Za vsako Mersennovo praštevilo $2^n - 1$ je število $2^{n-1}(2^n - 1)$ sodo popolno število.*

*Dokaz.* Izrek bomo dokazali z uporabo dejstva, da za vsako praštevilo $p$ velja, da je $\sigma(p) = p + 1$. Z uporabo izreka o multiplikativnosti velja

$$\sigma(2^{n-1}(2^n - 1)) = \sigma(2^{n-1})\sigma(2^n - 1) = (2^n - 1)2^n = 2(2^{n-1}(2^n - 1)).$$

□

Trenutno (17. julij 2024) poznamo le 47 Mersennovih praštevil in s tem tudi 47 sodih popolnih števil. Ne ve se, ali obstaja neskončno število popolnih števil.

**Izrek 7** (Evklid-Eulerjev izrek)**.** *Vsako sodo popolno število se lahko zapiše v obliki*

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

*kjer je $n$ naravno število in $2^n - 1$ praštevilo.*

*Dokaz.* Dano sodo popolno število zapišimo kot $N = 2^{n-1}m$, kjer sta $n, m \in \mathbb{N}$ in $m$ ni sodo število. Po izreku o multiplikativnosti izračunamo

$$\sigma(N) = 2N = 2^n m = \sigma(2^{n-1})\sigma(m) = (2^n - 1)\sigma(m).$$

Sledi $2^n - 1 \mid m$, torej lahko zapišemo $m = q(2^n - 1)$, za naravno število $q$. Če je $q = 1$ smo končali, zato predpostavimo $q > 1$. Med delitelji števila $m$ bodo tako števila $1, 2^n - 1, q$ in $m$. Sedaj bomo omejili vrednost $\sigma(m)$ in poiskali protislovje

$$\sigma(m) \geq 1 + 2^n - 1 + q + (2^n - 1)q = 2^n(q + 1),$$
$$\frac{m}{\sigma(m)} \leq \frac{(2^n - 1)q}{2^n(q + 1)} = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{q}{q + 1} < \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Vendar iz enakosti $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$ sledi $\frac{m}{\sigma(m)} = \frac{2^n - 1}{2^n}$, kar je protislovje, torej je $q = 1$. □

**Izrek 8.** *Če je $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število in $N \neq 6$, potem je*

$$N = 1^3 + 3^3 + \cdots + (2^{(n-1)/2)} - 1)^3.$$

*Dokaz.* Vemo, da velja

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n + 1))^2}{4}.$$

Če zdaj vstavimo $N = 2^{(n-1)/2}$ za nek lih $n$, dobimo željen rezultat. □

**Izrek 9.** *Vsako popolno sodo število ima zadnjo števko v desetiškem zapisu 6 ali 8.*

*Dokaz.* Vemo, da je vsako sodo popolno število oblike

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

kjer je $2^n - 1$ praštevilo in je posledično iz prejšnjega izreka tudi $n$ praštevilo. Torej je $n$ liho število, in lahko zapišemo $n = 4m + 1$ ali $n = 4m + 3$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Če je $n = 4m + 1$, potem je

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) = 16^m(2 \cdot 16^m - 1) \\ &\equiv 6^m(2 \cdot 6^m - 1) \equiv 6(2 \cdot 6 - 1) \equiv 6 \cdot 1 \equiv 6 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Če je $n = 4m + 3$, potem je

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{4m+2}(2^{4m+3} - 1) = 16^m \cdot 4(2 \cdot 16^m \cdot 8 - 1) \\ &\equiv 6^m \cdot 4(2 \cdot 6^m \cdot 8 - 1) \equiv 6 \cdot 4(6 \cdot 8 - 1) \equiv 4 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Torej smo dokazali, da ima vsako popolno sodo število zadnjo števko v desetiškem zapisu 6 ali 8. □

# 3 Liha popolna števila

Ne ve se ali obstajajo liha popolna števila. Kljub številnim ugotovljenim potrebnim pogojem še nismo razvozlali problema obstoja lihih popolnih števil. Če obstaja liho popolno število, mora biti večje od $10^{3000}$. Poleg tega mora imeti tudi vsaj 8 različnih prafaktorjev (in vsaj 11, če ni deljivo s 3), ter mora biti vsaj en prafaktor večji od 107, dva prafaktorja večja od 104 in trije prafaktorji večji od 100.

Zapisali bomo nekaj pogojev za liha popolna števila, ki zaradi zapletenosti dokazov ne bomo dokazali.

**Trditev 10.** *Euler je pokazal, da ima liho popolno število $N$ obliko*

$$N = p^{4\lambda+1}q^2,$$

*za neko $\lambda \in \mathbb{N}$, praštevilo $p$ oblike $4k + 1$ in praštevilo $q$ oblike $4r + 1$.*

*Dokaz.* Dokaz je prepuščen kot vaja bralcu. □

**Izrek 11** (Touchard (1953))**.** *Če liho popolno število obstaja, mora biti oblike $12k + 1$ ali $36k + 9$.*

Nadalje je še za vsako liho popolno število z $r$ prafaktorji in $0 < i < 6$ Kishore leta 1981 dokazal zgornje meje za majhne faktorje lihih popolnih števil. Pokazal je namreč, da velja $p_i < 2^{2^{i-1}}(r - i + 1)$.

**Trditev 12.** *Naj bo $N$ liho popolno število s $k$ različnimi prafaktorji in naj bo*

$$P = \prod_{p|n} p.$$

*Potem je*

$$N < P^{2^k} - 1.$$

**Trditev 13.** *Če je $N$ liho popolno število s $k$ prafaktorji, potem*

$$N < 2^{4^k}.$$

# 4 Zaključek

Spoznali smo popolna števila, osrednjo temo enega izmed največjih odprtih problemov v matematiki, ter razna osnovna orodja iz teorije števil za reševanje takšnih problemov. Dokazali smo najpomembnejše izreke na tem področju, kot sta na primer Evklid-Eulerjev in Cataldi-Fermajev. Spoznali smo tudi, kaj so Mersennova praštevila in kako so povezana s popolnimi števili.

# Literatura


[1] P. P. Nielsen, Odd Perfect Numbers Have at Least Nine Distinct Prime Factors, 22 Feb 2006. http://arxiv.org/abs/math.NT/0602485.

[2] Nielsen, P. Pace, An upper bound of odd perfect numbers.

[3] Eric W. Weisstein, Odd Perfect Number, `https://mathworld.wolfram.com/` (dostopano 19. 7. 2024).

[4] Perfect Number, Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/w/Perfect_number` (dostopano 20. 7. 2024).