Pellova enačba

Zarja Čibej, Erik Pompe, Teja Zabukovec
Mentor: Nino Cajnkar

Povzetek

V članku obravnavamo navadno in splošno Pellovo enačbo ter raziskujemo, koliko rešitev imata in kako lahko iz že znanih rešitev tvorimo nove. Dokazali smo Lagrangeov izrek in pokazali, da imata obe enačbi neskončno mnogo rešitev, če obstaja vsaj ena netrivialna.

1 Uvod

Pellova enačba je lahko tvoja rešiteljica, če te na MaRSu ugrabijo Marsovci in ti za dobrodošlico pod nos pomolijo t. i. anketo, na kateri te med drugim sprašujejo, koliko je zelenih kroglic v vrečki.

V nadaljevanju članka se sprašujemo, koliko rešitev imata navadna Pellova in splošna Pellova enačba ter kako pridemo do novih rešitev iz že izračunanih. Dokazali pa smo tudi Lagrangeov izrek o netrivialnih rešitvah Pellove enačbe.

Definicija 1. *Naj velja, da so $x, y, d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in $d \neq a^2$. Enačbi oblike*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

pravimo ***navadna Pellova enačba*** *in enačbi oblike*

$$x^2 - dy^2 = n$$

pravimo ***splošna Pellova enačba.***

2 Osnovna lema

Za pomoč pri nadaljnem dokazovanju dokažimo naslednjo lemo.

Lema 1. *Za para rešitev (a, b) in (s, t) Pellove enačbe oblike $x^2 - dy^2 = 1$ so naslednje trditve ekvivalentne*

- $a + s\sqrt{d} < s + t\sqrt{d}$,
- $a < s$ *in* $b < t$,

- *$a < s$ ali $b < t$.*

Dokaz. Naj bo $s^2 - dt^2 = 1$ in $a^2 - db^2 = 1$. Po predpostavki velja $x - y\sqrt{d} \neq 0$, zato lahko pišemo

$$\frac{(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})}{(a - b\sqrt{d})} < \frac{(s + t\sqrt{d})(s - t\sqrt{d})}{(s - t\sqrt{d})}.$$

Ker vemo, da so vsa števila pozitivna, lahko z njimi prosto množimo in delimo, ne da bi se nam neenačaj obrnil. Ker velja $a^2 - db^2 = 1$ in $s^2 - dt^2 = 1$, lahko zapišemo

$$\frac{1}{(a - b\sqrt{d})} < \frac{1}{(s - t\sqrt{d})},$$

$$s - t\sqrt{d} < a - b\sqrt{d}.$$

Seštejemo dva manjša člena in jih primerjamo z dvema večjima, vsota manjših je manjša od vsote večjih členov

$$a + b\sqrt{d} + s - t\sqrt{d} < s + t\sqrt{d} + a - b\sqrt{d}.$$

Ostane nam $2b\sqrt{d} < 2t\sqrt{d}$ in posledično $b < t$.

Zdaj vemo tudi, da velja

$$1 + db^2 < 1 + dt^2,$$

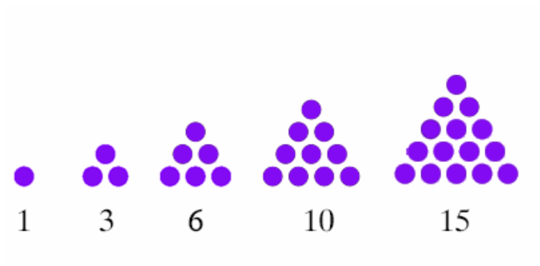
torej $a^2 < s^2$, in posledično tudi $a < s$. □

3 Lagrangeov Izrek

Izrek 1. *Pellova enačba ima neskončno rešitev.*

Najprej si oglejmo primer generiranja rešitev določene enačbe. Z uporabo trikotnih števil lahko dobimo rešitve Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$.

Trikotno število lahko grafično definiramo kot število objektov (pik), ki jih lahko razvrstimo v obliko enakostraničnega trikotnika.



Slika 1: Prvih pet trikotnih števil.

Enostavno je videti, da je formula za število pik v m-tem koraku enaka

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Če je trikotno število enako kvadratu nekega naravnega števila n^2, lahko enačbo preoblikujemo v Pellovo enačbo, ter izračunamo njeno rešitev iz m in n po naslednjem postopku

$$\frac{m(m+1)}{2} = m^2 + m = 2n^2,$$
$$(m + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 2n^2,$$
$$(2m+1)^2 - 1 = 2(2n)^2,$$
$$(2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1,$$

kar je enačba oblike

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Ker so vsi ti koraki reverzibilni, je iskanje trikotnih kvadratnih števil enakovredno reševanju Pellove enačbe za $d = 2$.

Dokaz izreka 1. Sedaj bomo dokazali, da lahko iz dveh že znanih rešitev najdemo nove. Predpostavimo, da imamo dve rešitvi, (x, y) in (x', y'), za $X^2 - dY^2 = 1$. Iz teh lahko najdemo tretjo rešitev. Ključ za to je pretvorba parov (x, y) in (x', y') v števila oblike $x + y\sqrt{d}$. Pokazali bomo, da so v primeru, ko ima enačba $X^2 - dY^2 = 1$ omenjeni rešitvi, koeficienti enačbe $(x + y\sqrt{d})(x' + y'\sqrt{d})$ nova rešitev začetne enačbe. Izračunamo

$$(x + y\sqrt{d})(x' + y'\sqrt{d}) = (xx' + dyy') + (xy' + yx')\sqrt{d}$$

in koeficiente vstavimo v začetno enačbo, da ugotovimo, ali predstavljajo rešitev

$$\begin{aligned}
(xx' + dyy')^2 - d(xy' + yx')^2 &= (x^2x'^2 + 2dxx'yy' + d^2y^2y'^2) - d(x^2y'^2 + 2xx'yy' + y^2x'^2) \\
&= x^2x'^2 + d^2y^2y'^2 - dx^2y'^2 - dy^2x'^2 \\
&= x^2(x'^2 - dy'^2) - dy^2(x'^2 - dy'^2) \\
&= (x^2 - dy^2)(x'^2 - dy'^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Da bi našli še več rešitev, bomo pokazali, da v primeru, ko ima $X^2 - dY^2 = 1$ rešitev (x, y), so koeficienti enačbe $(x + y\sqrt{d})^k$ prav tako rešitve za vse $k \in \mathbb{Z}$.

Vemo že, da so koeficienti rešitve za vse $k > 0$, zaradi prejšnjega dokaza, preprosto z uporabo $(x', y') = (x, y)$. Če je $k < 0$, lahko defniramo $k = -K$ in dobimo $(x + y\sqrt{d})^K = x_K + y_K\sqrt{d}$, kjer sta $x_K, y_K \in \mathbb{Z}$. Vemo, da je rezultat te oblike, ker je $x + y\sqrt{d}$ zaprt za množenje, kar pomeni, da bosta kateri koli dve števili te oblike, pomnoženi med seboj, vrnili število te oblike. Posledično velja, da je $x_K^2 - dy_K^2 = 1$. Torej tudi

$$\begin{aligned}
(x + y\sqrt{d})^{-K} &= \frac{1}{(x + y\sqrt{d})^K} \\
&= \frac{1}{x_K + y_K\sqrt{d}} \\
&= \frac{x_K - y_K\sqrt{d}}{(x_K + y_K\sqrt{d})(x_K - y_K\sqrt{d})} \\
&= \frac{x_K - y_K\sqrt{d}}{x_K^2 - dy_K^2} \\
&= x_K - y_K\sqrt{d}.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je $(x_K, -y_K)$ rešitev za vse $x, y \in \mathbb{N}$ in $K \in \mathbb{Z}$. □

4 Splošna Pellova enačba

V prejšnjem poglavju smo obravnavali navadno Pellovo enačbo $x^2 - dy^2 = 1$, zdaj pa bi si želeli izvedeti še kaj o rešitvah splošne Pellove enačbe

$$x^2 - dy^2 = n,$$

kjer sta $d \in \mathbb{N}$ in $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ter d ni popolni kvadrat.

Izrek 2. *Naj bo $u = a + b\sqrt{d}$, kjer je par (a, b) rešitev navadne Pellove enačbe. Za vsak $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so celoštevilske rešitve enačbe $x^2 - dy^2 = n$ pari (x, y), dobljeni iz izračuna $(x_1 + y_1\sqrt{d}) \cdot u^k$, kjer velja $x_1^2 - dy_1^2 = n$. Potem veljata oceni*

$$|x_1| \leq \frac{\sqrt{|n|}\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)}{2},$$

$$|y_1| \leq \frac{\sqrt{|n|}\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)}{2\sqrt{d}},$$

oziroma, če je $n > 0$ lahko oceno izboljšamo na

$$|y_1| \leq \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)}{2\sqrt{d}} < \frac{\sqrt{nu}}{2\sqrt{d}}.$$

Izrek nam pove, da lahko z eno rešitvijo enačbe $x^2 - dy^2 = n$, z izračunom izraza $(x_1 + y_1\sqrt{d}) \cdot u^k$, za $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dobimo nove rešitve. Torej ima splošna Pellova enačba za določene n neskončno mnogo rešitev, če obstaja netrivialna rešitev.

Dokaz. Definirajmo pomožno funkcijo $L\colon \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$L(x,y) = (\log|x+y\sqrt{d}|, \log|x-y\sqrt{d}|).$$

Naj bosta α in β realni števili oblike $t_1 + v_1\sqrt{d}$ in $t_2 + v_2\sqrt{d}$, za $t_1, t_2, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$ in $k \in \mathbb{Z}$. Potem za funkcijo L velja

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) &= L(\alpha) + L(\beta), \\ L(\alpha^k) &= k \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

Vemo, da je $(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 = 1$ in

$$|a - b\sqrt{d}| = \frac{a^2 - db^2}{a + b\sqrt{d}} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{1}{u} > 0.$$

Sledi

$$L(u) = \left(\log(u), \log\left(\frac{1}{u}\right)\right) = (\log(u), -\log(u)) = \log(u)(1,-1).$$

Sestavimo bazo prostora $\mathbb{R}^2$ iz vektorjev $L(u)$ in $(1,1)$, kar lahko storimo, ker sta vektorja $L(u)$ in $(1,1)$ linearno neodvisna. Torej lahko vektor $L(x + y\sqrt{d})$ zapišemo kot njuno linearno kombinacijo

$$\begin{aligned} L(x + y\sqrt{d}) &= c_1(1,1) + c_2 L(u) \\ &= (c_1, c_1) + (c_2\log(u), -c_2\log(u)) \\ &= (c_1 + c_2\log(u), c_1 - c_2\log(u)), \end{aligned}$$

kjer sta c_1 in c_2 realni števili. Dobljeni vektor enačimo z vektorjem $(\log|x+y\sqrt{d}|, \log|x-y\sqrt{d}|)$ in dobimo naslednja rezultata

$$\begin{aligned} c_1 + c_2\log(u) &= \log|x+y\sqrt{d}|, \\ c_1 &= \log|x+y\sqrt{d}| - c_2\log(u) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} c_1 - c_2\log(u) &= \log|x-y\sqrt{d}|, \\ c_2 &= \frac{c_1 - \log|x-y\sqrt{d}|}{\log(u)}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem enačb in dobimo

$$\begin{aligned} c_1 &= \log|x+y\sqrt{d}| - \log(u)\frac{c_1 - \log|x-y\sqrt{d}|}{\log(u)} = \\ &= \frac{\log|x+y\sqrt{d}| + \log|x-y\sqrt{d}|}{2} = \\ &= \frac{\log|x^2-dy^2|}{2} = \frac{\log|n|}{2}. \end{aligned}$$

Sledi, da je $L(x+y\sqrt{d}) = \frac{\log|n|}{2}(1,1) + c_2 L(u)$. Naj bo k tako celo število, da izraz $|c_2 - k|$ doseže minimalno vrednost in naj bo $\delta = c_2 - k$. Vemo, da velja $|\delta| \leq \frac{1}{2}$. Zdaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned} L(x+y\sqrt{d}) &= \frac{\log|n|}{2}(1,1) + (k+\delta)L(u) \\ &= \frac{\log|n|}{2}(1,1) + kL(u) + \delta L(u) \\ &= \frac{\log|n|}{2}(1,1) + L(u^k) + L(u^\delta). \end{aligned}$$

Sledi tudi

$$\begin{aligned} L((x+y\sqrt{d})u^{-k}) &= L(x+y\sqrt{d}) + L(u^{-k}) \\ &= \frac{\log|n|}{2}(1,1) + L(u^k) + L(u^\delta) - L(u^k) \\ &= \frac{\log|n|}{2}(1,1) + L(u^\delta) \\ &= (\frac{\log|n|}{2}, \frac{\log|n|}{2}) + \delta(\log(u), \log(\frac{1}{u})) \\ &= (\frac{\log|n|}{2} + \delta\log(u), \frac{\log|n|}{2} - \delta\log(u)). \end{aligned}$$

Vemo, da ima izraz $(x+y\sqrt{d})u^{-k}$ obliko $e+f\sqrt{d}$. Označimo $(x+y\sqrt{d})u^{-k} = x' + y'\sqrt{d}$, kjer sta $x', y' \in \mathbb{Z}$. Tedaj lahko zapišemo

$$L(x'+y'\sqrt{d}) = L((x+y\sqrt{d})u^{-k}),$$

$$(\log|x'+y'\sqrt{d}|, \log|x'-y'\sqrt{d}|) = (\frac{log|n|}{2} + \delta\log(u), \frac{log|n|}{2} - \delta\log(u)).$$

Naj bo $s := \max(|x'+y'\sqrt{d}|, |x'-y'\sqrt{d}|)$, potem je $\frac{|n|}{s} = \min(|x'+y'\sqrt{d}|, |x'-y'\sqrt{d}|)$. Sledi, da je

$$|x'| = \frac{|x'+y'\sqrt{d}+x'-y'\sqrt{d}|}{2} \leq \frac{|x'+y'\sqrt{d}| + |x'-y'\sqrt{d}|}{2} = \frac{s+\frac{|n|}{s}}{2}.$$

Velja, da je lahko $\frac{|n|}{s}$ največ $\sqrt{|n|}$, s pa najmanj toliko. Vemo tudi, da velja

$$s \leq \sqrt{|n| \cdot u}.$$

Zato lahko zapišemo

$$|x'| \leq \frac{1}{2}(s + \frac{|n|}{s}) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{|n|\cdot u} + \frac{|n|}{\sqrt{|n|\cdot u}}) = \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}})}{2}.$$

Na podoben način lahko zapišemo tudi

$$\begin{aligned} |y'| &= \frac{|x'+y'\sqrt{d} - x' + y'\sqrt{d}|}{2\sqrt{d}} \\ &\leq \frac{|x'+y'\sqrt{d}| + |-(x'-y'\sqrt{d})|}{2\sqrt{d}} \\ &= \frac{s+\frac{|n|}{s}}{2\sqrt{d}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{d}}(\sqrt{|n|\cdot u} + \frac{|n|}{\sqrt{|n|\cdot u}}) \\ &= \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})}{2\sqrt{d}}. \end{aligned}$$

□

5 Zaključek

Z uporabo Dirichletovega načela smo ugotovili, da ima navadna Pellova enačba vedno netrivialno rešitev. Iz dejstva, da lahko nove rešitve enačbe dobimo z množenjem starih, smo ugotovili, da ima enačba neskončno mnogo rešitev. Za splošno in navadno Pellovo enačbo torej velja, da lahko dobimo neskončno rešitev, če imamo vsaj eno netrivialno rešitev.