Numerična integracija

Eva Bračun, Ronja Pražnikar
Mentor: Jan Genc

Povzetek

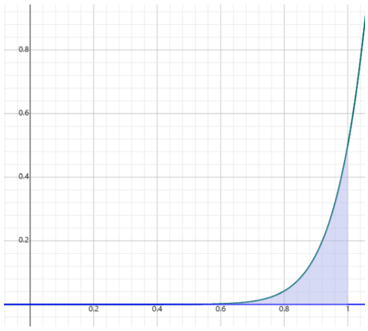
V projektu je obravnavana numerična integracija. Predstavljena je polinomska interpolacija, nato pa je uporabljena pri ocenjevanju vrednosti določenega integrala, in s tem je poiskana vrednost števila π.

1 Uvod

V tem projektu se ukvarjamo z numerično integracijo. Zanimalo nas je, kako bi lahko aproksimirali število π. Po pregledu različnih metod smo ugotovili, da bi lahko za dosego tega cilja uporabili metodo numerične integracije. Te metode so izjemno uporabne, saj natančna integracija funkcije f ni vedno možna, oziroma je zelo težka. V teh primerih lahko uporabimo numerično integracijo, da aproksimirano vrednost poljubnega določenega integrala z integrali interpolacijskih polinomov.

Določeni integral se v matematiki uporablja za izračun ploščine med grafom funkcije f in x-osjo na intervalu $[a, b]$. Zapišemo ga v obliki $\int_a^b f(x)\,dx$, kjer je $f(x)$ funkcija, a in b pa meji intervala, na katerem funkcijo integriramo. Za izračun določenega integrala funkcije $f(x)$ lahko uporabimo Newton-Leibnizovo formulo. Spodaj je prikazan primer določenega integrala in izračuna njegove vrednosti

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{12}}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 \left((x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\
&= \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)\right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2578}{3465}.
\end{aligned}$$



Slika 1: Graf določenega integrala zgoraj izračunane funkcije.

2 Polinomska interpolacija

Pri numerični integraciji želimo poiskati polinom p, ki se prilega originalni funkciji f. To storimo, ker se da polinome enostavno integrirati z uporabo Newton-Leibnizove formule. Zato lahko kot približek integrala funkcije $f(x)$ uporabimo integral polinoma $p(x)$. Polinom skonstruiramo tako, da izberemo točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, skozi katere bo polinom potekal. Kako podoben bo polinom originalni funkciji je odvisno od števila točk, ki jih izberemo. Uporabili bi lahko katerega koli izmed polinomov, ki potekajo skozi vse izbrane točke, toda računanje bo najlažje s tistim najnižje stopnje.

Za dokaz o obstoju in enoličnosti polinoma p z zgornjimi lastnostmi moramo dokazati pomembno lemo o polinomih.

Lema 1. *Polinoma se v neki točki x_0 ujemata, če velja $p_1(x_0) = p_2(x_0)$. Z deg$(p(x))$ označimo stopnjo polinoma, torej najvišjo potenco spremenljivke, ki nastopa v polinomu. Stopnja konstantnih polinomov je 0. Stopnja ničelnega polinoma ni definirana, za potrebe računanja pa jo lahko določimo kot $-\infty$. Če se polinoma $p(x)$ in $q(x)$ ujemata v več kot $\max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$ točkah, sta enaka.*

Dokaz. Definiramo polinom $h(x) = p(x) - q(x)$. Opazimo, da se polinoma p in q ujemata v točki x_0 natanko tedaj, ko je x_0 ničla polinoma h. Prav tako je očitno, da je $\deg(h(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$ ter označimo $\deg(h(x)) = M$. Iz predpostavke vemo, da ima $h(x)$ več kot M ničel, saj se $p(x)$ in $q(x)$ ujemata v več kot M točkah.

Po osnovnem izreku algebre ima neničelni polinom $h(x)$ toliko kompleksnih ničel, kot je njegova stopnja, torej je h ničelni polinom, iz česar sledi, da sta p in q enaka.

Dokazali smo, da v primeru, ko se polinoma $p(x)$ in $q(x)$ ujemata v več kot $\max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$ točkah, velja $p(x) = q(x)$. □

V nadaljevanju bomo dokazali obstoj in enoličnost polinoma $p(x)$, ki poteka skozi izbrane točke (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots, (x_n, y_n)$ in je med vsemi takimi polinomi minimalne stopnje. Te točke so poljubno izbrana vozlišča, torej točke, ki ležijo na grafu $f(x)$ in skozi katere poteka tudi polinom p.

Izrek 1. *Za $n \in \mathbb{N}$ in paroma različne točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ter poljubne $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kjer velja $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, obstaja natanko en polinom $p(x)$ s stopnjo, ki je manjša ali enaka $n-1$, tako da je $p(x_i) = y_i$.*

Dokaz. Izrek dokažemo po dveh korakih, saj moramo najprej dokazati enoličnost polinoma, nato pa še njegov obstoj.

Če je polinom enoličen pomeni, da obstaja samo en polinom s takimi lastnostmi. Najprej dokažemo enoličnost polinoma $p(x)$. Recimo, da obstajata dva takšna polinoma $p(x)$ in $q(x)$, definiramo polinom $h(x) = p(x) - q(x)$. Iz predpostavke vemo, da za vsak i velja $p(x_i) = y_i$ in $q(x_i) = y_i$. To pomeni, da je $h(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0$, zato so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ničle $h(x)$, torej ima $h(x)$ natanko n ničel. Vemo, da je $\deg(p(x)) \leq n-1$ in $\deg(q(x)) \leq n-1$, kar pomeni da je $\deg(h(x)) \leq n-1$. Ničelni polinom in $h(x)$ se ujemata v vsaj n točkah, saj ima $h(x)$ natanko n ničel. Vendar je $n \geq \max(\deg(0), \deg(h(x)))$, zato velja $h(x) \equiv 0$. To pomeni, da je $p(x) = q(x)$, kar pomeni, da smo dokazali enoličnost polinoma $p(x)$.

Nato dokažemo tudi obstoj polinoma $p(x)$. To storimo s pomočjo Langrangeevih baznih polinomov, ki jih definiramo za $i = 1, 2, \ldots, n$ in zapišemo v obliki $l_{n,i}(x)$

$$\begin{aligned} l_{n,i}(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \\ &= \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \end{aligned}$$

Zapišimo tri opazke o Lagrangeovem polinomu.

1. Velja, da so $l_{n,i}(x)$ polinomi, saj je imenovalec konstanta. To velja, saj je x_i različen od vseh $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.
2. Velja $l_{n,i}(x_i) = 1$, saj sta števec in imenovalec enaka.
3. Za $j \neq i$ velja $l_{n,i}(x_j) = 0$, ker se x_j ujema z natanko enim od $x_1, x_2, \ldots, x_n$. To pomeni, da je števec in posledično celoten polinom enak 0.

Zdaj lahko polinom $p(x)$ definiramo s pomočjo Lagrangeevih baznih polinomov in dobimo naslednji izraz

$$\begin{aligned} p(x) &= y_1 \cdot l_{n,1}(x) + \ldots + y_n \cdot l_{n,n}(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot l_{n,i}(x). \end{aligned}$$

Potrebno je še potrditi, da $p(x)$ ustreza izreku, torej mora zadoščati trem kriterijem.

- Funkcija $p(x)$ je polinom, saj so $l_{n,i}(x)$ tudi polinomi.
- Velja, da je $\deg(p(x)) \leq n - 1$, ker je $\deg(l_{n,i}(x)) = n - 1$. To drži, saj ima $l_{n,1}(x)$ stopnjo natanko $n - 1$, saj člena $x - x_i$ ni.
- Nazadnje velja tudi $p(x_i) = y_i$. To lahko ugotovimo, ker

$$p(x_i) = y_i \cdot l_{n,1}(x_i) + \ldots + y_n \cdot l_{n,n}(x_i) = y_i \cdot 1 + 0 = y_i.$$

Tako smo dokazali obstoj in enoličnost polinoma $p(x)$ s stopnjo $n - 1$, tako da je $p(x_i) = y_i$. $\square$

3 Numerična integracija

V tem poglavju pokažemo dva pomembna izreka za numerično integracijo. Z pomočjo Lagrangeevega izreka dokažemo enačbo za izračun napake pri numeričnem integriranju.

Izrek 2 (Lagrangeev izrek)**.** *Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tedaj obstaja takšno število $c \in (a, b)$, tako da velja*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Ko dobimo polinom p, s katerim lahko aproksimiramo funkcijo f, lahko izračunamo tudi napako med njima.

Izrek 3. *Naj bo funkcija $f \in C^n([a, b])$. To pomeni, da ima funkcija f vsaj n zveznih odvodov. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paroma različne točke na intervalu $[a, b]$ in naj bo polinom $\omega(x)$ definiran s predpisom $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Tedaj obstaja $\zeta \in [min(x_1, x_2, \ldots, x_n, x), max(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)]$, tako da velja*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^n(\zeta)}{n!} \omega(x).$$

S $f(x)$ označimo funkcijo, ki jo želimo aproksimirati, s $p(x)$ pa Lagrangeev polinom, ki poteka skozi točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dokaz. Dokaz ločimo na dva primera, in sicer, ko x sovpada z eno od točk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, in na primer, ko ne.

1. Naj velja $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
   V tem primeru enačba velja, saj imata obe strani vrednost 0. Polinom p je interpoliran tako, da se v vrednostih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ujema s $f(x_n)$. Tako velja $f(x_n) = p(x_n)$, oziroma $f(x_n) - p(x_n) = 0$. Po definiciji velja tudi $\omega(x) = 0$, torej sta leva in desna stran enaki.

2. Naj velja $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
   Definirajmo funkcijo $g(y) = f(y) - p(y) - c \cdot w(y)$, tako da je c takšna konstanta, da velja $g(x) = 0$. Konstanta c vedno obstaja, saj so $f(x), p(x)$ in $\omega(x)$ numerične vrednosti za nek specifičen x, in po definiciji $\omega(x) \neq 0$, torej bo tudi c le neka številka. Velja

   $$g \in C^n\left([a, b]\right).$$

   Poglejmo si obnašanje funkcije v x_i. Točke $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ so ničle funkcije g. Saj so v točkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funckije f, p in ω enake 0, zato je 0 tudi g, v točki x pa $g(x) = 0$ sledi iz izbire konstante c.

   Po Lagrangeveem izreku na vsakem intervalu $[u, v]$, kjer sta u in v zaporedni točki iz množice $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x\}$, obstaja nek c, tako da velja $g'(c) = 0$. Funkcija g ima vsaj $n{+}1$ ničel na intervalu $[\min(x_1, \ldots, x_n, x),\ \max(x_1, \ldots, x_n, x)]$. Enak korak lahko naredimo na $g''(x)$, ki je $(n-2)$-krat odvedljiv. Dobimo, da ima na enakem intervalu $g''(x)$ vsaj $n-1$ ničel. Posplošeno torej velja za $g^{(k)} \in C^{n-k}$, da ima $g^{(k)}$ vsaj $n-k+1$ ničel.

   Ko je $k = n$ ima $g^{(n)}$ vsaj $n - n + 1$ ničel, torej 1 ničlo. To pomeni, da bo na intervalu $[u, v]$ obstajala vsaj ena vrednost ζ_x, za katero bo veljalo $g^{(n)}(\zeta_x) = 0$. Torej je

   $$g^{(n)}(\zeta_x) = f^{(n)}(\zeta_x) + p^{(n)}(\zeta_x) - c \cdot \omega^{(n)}(\zeta_x) = 0.$$

   Polinom $p(x)$ je stopnje $n-1$, zato je njegov n-ti odvod enak 0. Polinom $\omega(x)$ je stopnje n in člen pred x^n ima koeficient 1, zato velja, da je njegov n-ti odvod enak konstantnemu polinomu $n!$. Sledi $f^{(n)}(\zeta_x) - c \cdot n! = 0$, torej

   $$c = \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!}.$$

   Ko vstavimo c nazaj v prvotno enačbo, dobimo iskan rezultat. Za vsak $x \in [a, b]$, torej obstaja $\zeta_x \in [\min(x_1, x_2, \ldots, x_n, x), \max(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)]$, tako da velja

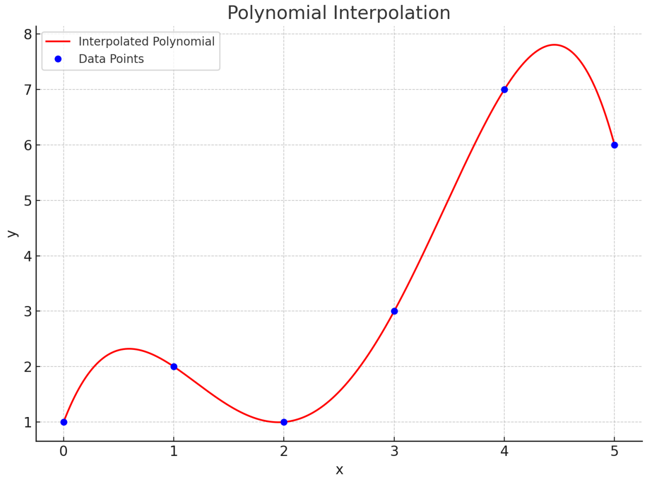
   $$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!}\omega(x).$$

Oba primera smo dokazali in tako zaključili dokaz izreka. □

4 Numerično integriranje

Na žalost večine funkcij ne moremo integrirati po standardnih metodah, kot so substitucija, per partes ali s standardno tabelo integralov. Numerično integriranje je zato uporabno, da lahko izračunamo dovolj dober približek za integral te funkcije. Želimo izračunati $\int_a^b f(x)\,dx$. Izberimo točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na intervalu $[a, b]$ in naj bo p interpolacijski polinom skozi točke $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Vemo, da za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!} \cdot \omega(x).$$



Slika 2: Primer interpolacije.

4.1 Terminologija

Definicija 1. *Točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kjer se funkcija f in Lagrangeev polinom p ujemata, poimenujemo* ***vozli****. Integral i-tega Lagrangeevega polinoma z oznako $\alpha_i = \int_a^b l_{n,i}(x)\,dx$ poimenujemo* ***uteži****.* ***Napako*** *označimo z $R(f)$ in jo izračunamo s formulo $\int_a^b \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!} \cdot \omega(x)\,dx$, kar je enako integralu funkcije $f - p$.* ***Približek*** *intervala pa označimo z $I(f)$, kar predstavlja integral interpoliranega polinoma $\int_a^b p(x)\,dx$.*

Interpolirani polinom izračunamo tako, da seštejemo zmnožke uteži in funkcijske vrednosti v vozlih vseh vozlov. Torej

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot l_{n,i}(x).$$

Integral funkcije $f(x)$ lahko na drugačen način zapišemo kot vsoto približka $I(f)$ in napako tega približka $R(f)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = I(f) + R(f) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot l_{n,i}(x)\,dx + \int_a^b \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!} \cdot \omega(x)\,dx.$$

Integral približka lahko izračunamo, saj je to le integral polinoma. Integral napake pa izračunamo težje. Sledeča izreka sta lahko uporabna pri integriranju funkcije napake.

Izrek 4 (Izrek o povprečni vrednosti)**.** *Naj bo $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in f integrabilna funkcija, ki na $[a,b]$ ne spremeni predznaka. Tedaj obstaja tak $c \in [a,b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = g(c) \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Izrek 5 (Trikotniška neenakost za integrale)**.** *Naj bo f integrabilna funkcija, za katero je tudi $|f(x)|$ integrabilna funkcija. Tedaj velja*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4.2 Sestavljena integracijska pravila

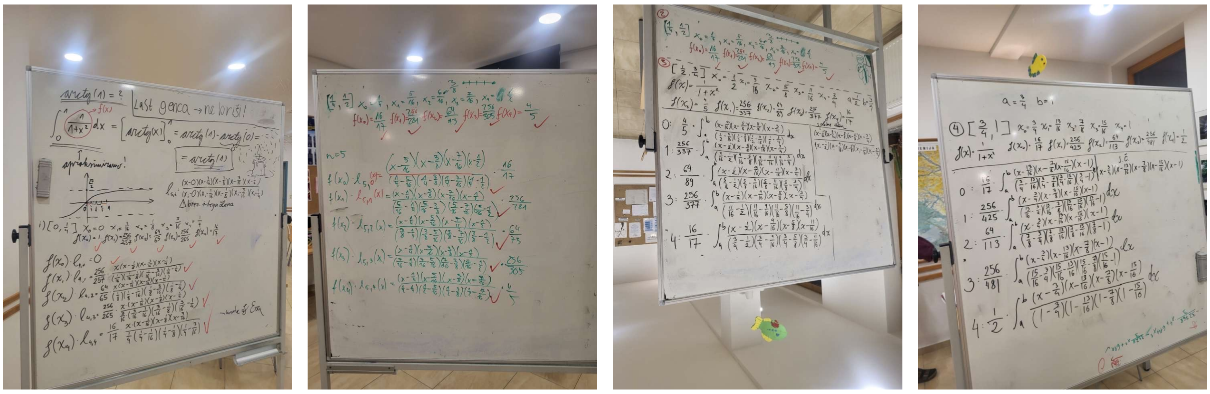
Interval, na katerem integriramo, lahko razdelimo na k podintervalov. Integriramo lahko približek za vsak podinterval in vseh k približkov na koncu seštejemo. To se splača, saj lahko uporabimo enako število vozlov, obratujemo pa s polinomi nižjih stopenj. Na vsakem intervalu tako obratujemo z $\frac{n}{k}$ vozli, torej bo tudi vsak izmed konstruiranih polinomov imel stopnjo $\frac{n}{k} - 1$.

5 Aproksimacija števila π

Aproksimacije števila π smo se lotili preko aproksimacije določenega integrala, čigar vrednost je π. Izbrali smo si integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, katerega vrednost je $\frac{\pi}{4}$. To smo dobili z naslednjim izračunom

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = [\arctan(x)]_0^1 = [\arctan(1) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{4}.$$

Integral smo računali na intervalu $[0,1]$, ta interval pa smo razdelili še na štiri enako dolge intervale $[0,\frac{1}{4}], [\frac{1}{4},\frac{1}{2}], [\frac{1}{2},\frac{3}{4}], [\frac{3}{4},1]$. Na vsakem intervalu smo določili $n = 5$ vozlov. Za vseh $4 \cdot 5 - 4 = 16$ vozlov smo izračunali njihove funkcijske vrednosti $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Za tem smo sestavili vseh 20 različnih Lagrangeevih polinomov 4. stopnje in izračunali njihove določene integrale. Vrednosti integralov smo zmnožili z njihovimi pripadajočimi funkcijskimi vrednostmi in vseh 20 vrednosti sešteli. Končni seštevek predstavlja našo aproksimacijo izbranega integrala, čigar dejanska vrednost je $\frac{\pi}{4}$. Dobljeno vrednost smo zmnožili s 4 in dobili našo aproksimacijo števila π.



Slika 3: Nekateri izmed naših vmesnih korakov.

Dobili smo aproksimacijo $\frac{\pi}{4}$ z ulomkom $\frac{6881920055497445}{8762332737299641}$. Prva spodnja vrednost je naša aproksimacija, druga pa dejanska vrednosti π

$$\mathbf{3.14159266}114,$$

$$\mathbf{3.14159265}358.$$

Ujemata se torej za 7 decimalk za decimalno vejico.

Literatura

[1] D. Kincaid, W. Cheney *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[2] R. L. Burden, J. D. Faires *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1997.