Neskončnost množic

Eva Bračun, Ema Franko, Timotej Potočnik
Mentorica: Katarina Grilj

Povzetek

V članku ponovimo osnovne pojme funkcij, s pomočjo katerih primerjamo moči neskončnih množic. Dokažemo, da zaradi Cantorjevega izreka o potenčnih množicah obstaja neskončno različnih neskončnosti. S pomočjo lastnosti slik množic dokažemo Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek.

1 Uvod

Neskončnost je zanimiv a nenavaden koncept. Ljudje si jo predstavljajo na različne načine. Mnogi ob besedi neskončnost najprej pomislijo na vesolje, drugi na premice in ravnine, medtem ko nekaterim na misel pade neskončno sovraštvo do predmeta slovenščine. Mi pa se bomo osredotočili na primerjavo moči neskončnih množic in raziskovanje različnih neskončnosti.

2 Ponovitev osnovnih pojmov funkcij

Preden se poglobimo v neskončnost množic, se spomnimo osnovnih pojmov in lastnosti funkcij.

Definicija 1. *Naj bosta A in B množici. Funkcija $f\colon A \to B$ je:*

- ***injektivna**, če poljubna različna elementa iz A preslika v različna elementa iz B,*
- ***surjektivna**, če je vsak element iz B slika vsaj enega elementa iz A,*
- ***bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.*

Če je funkcija $f\colon A \to B$ bijektivna, je vsak element $y \in B$ slika natanko enega elementa $x \in A$. Njena inverzna funkcija $f^{-1}\colon B \to A$ je potem definirana s predpisom $f^{-1}(y) = x$. Za inverzno funkcijo velja $f^{-1}(f(a)) = a$ za vsak $a \in A$ in $f(f^{-1}(b)) = b$ za vsak $b \in B$. Vemo, da je funkcija bijektivna natanko takrat, ko obstaja njena inverzna funkcija. Za dokaz bijektivnosti funkcije je torej dovolj dokazati obstoj inverzne funkcije.

Trditev 1. *Če je funkcija bijektivna, je njena inverzna funkcija prav tako bijektivna.*

Dokaz. Naj bo $f\colon A \to B$ bijektivna funkcija in $x,\ y \in B$. Predpostavimo, da velja $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$. Iz tega sledi $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y))$. Ker je f^{-1} inverzna funkcija od f, velja $x = y$. S tem smo dokazali, da sta sliki dveh elementov enaki le, če sta elementa enaka. Funkcija f^{-1} je torej injektivna.

Dokažimo še surjektivnost. Izberimo poljubni element $a \in A$. Ker velja $f^{-1}(f(a)) = a$, je f^{-1} surjektivna, saj smo našli element iz množice B, ki se slika v element a. Ker je funkcija f^{-1} injektivna in surjektivna, je tudi bijektivna. □

Definirajmo še kompozitum funkcij in dokažimo nekaj njegovih osnovnih lastnosti.

Definicija 2. *Naj bodo A, B in C množice ter $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ funkciji.* ***Kompozitum funkcij*** *f in g je funkcija s predpisom*

$$x \mapsto g(f(x)),$$

ki slika iz množice A v množico C. Označimo jo z $g \circ f$.

Trditev 2. *Naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ funkciji. Če sta f in g:*

- *injektivni, je tudi $g \circ f$ injektivna,*
- *surjektivni, je tudi $g \circ f$ surjektivna,*
- *bijektivni, je tudi $g \circ f$ bijektivna.*

Dokaz. Najprej predpostavimo, da sta f in g injektivni funkciji. Naj bosta $x,\ y \in A$ taka elementa, da velja $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Po definiciji kompozituma je to enako $g(f(x)) = g(f(y))$. Zaradi injektivnosti funkcije g velja $f(x) = f(y)$. Ker je tudi funkcija f injektivna, sledi $x = y$.

Nato predpostavimo, da sta f in g surjektivni funkciji. Izberemo poljuben $c \in C$. Zaradi surjektivnosti funkcije g vemo, da obstaja nek element $b \in B$, ki ga g slika v c, torej $g(b) = c$. Prav tako zaradi surjektivnosti f vemo, da obstaja nek element $a \in A$, za katerega velja $f(a) = b$. Posledično kompozitum $g \circ f$ preslika element a v c.

Kot zadnje predpostavimo, da sta f in g bijektivni funkciji. Ker za kompozitum $g \circ f$ velja, da je injektiven in surjektiven, je tudi bijektiven. □

3 Moč množic

Moč množice lahko definiramo kot število njenih elementov, vendar je s preštevanjem mogoče primerjati le množice s končnim številom elementov. S pomočjo spodnjih definicij pa bomo lahko primerjali še moči množic z neskončnim številom elementov. Najprej si poglejmo, kdaj imata množici enako moč.

Definicija 3. *Množici A in B imata* ***enako moč****, kadar obstaja bijektivna preslikava $f\colon A \to B$. Množici, ki imata enako moč, sta* ***ekvipolentni****, kar označimo z $|A| = |B|$.*

S pomočjo lastnosti inverzne funkcije in kompozituma, ki smo jih dokazali v prejšnjem razdelku, lahko dokažemo naslednje trditve.

- Če velja $|A| = |B|$, velja tudi $|B| = |A|$, saj je inverzna funkcija f^{-1} bijektivna.
- Če veljata enakosti $|A| = |B|$ in $|B| = |C|$, velja tudi $|A| = |C|$ zaradi bijektivnosti kompozituma $g \circ f$, ki slika iz množice A v C.
- Enakost $|A| = |A|$ velja, saj je funkcija, ki vsak element $x \in A$ preslika vase, bijektivna.

Definicija 4. *Moč množice A je* ***manjša ali enaka moči*** *množice B, če obstaja injektivna preslikava $f\colon A \to B$.*

Moč množice A je ***manjša*** *od moči množice B, če obstaja injektivna preslikava $f\colon A \to B$, ampak ne obstaja bijektivna preslikava iz množice A v množico B.*

4 Moči neskončnih množic

V tem poglavju želimo ugotoviti, ali so moči različnih neskončnih množic enake ali se razlikujejo.

Najprej primerjamo moč množice naravnih števil $\mathbb{N}$ z močjo množice naravnih števil, ki ji dodamo število 0. Tako množico označimo z $\mathbb{N}_0$.

Trditev 3. *Moč množice naravnih števil je enaka moči množice* $\mathbb{N}_0$

Dokaz. Definiramo funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ s predpisom $f(n) = n - 1$. Da bi dokazali, da imata množici enako moč, je dovolj preveriti, da je ta funkcija bijektivna.

Najprej preverimo injektivnost. Izberemo poljubna elementa $n,\ m \in \mathbb{N}$, za katera velja $f(n) = f(m)$. Uporabimo predpis funkcije, da enačbo preoblikujemo v $n - 1 = m - 1$. Enačbo uredimo in dobimo $n = m$, torej je funkcija f injektivna.

Nato preverimo surjektivnost. Izberemo poljuben element $a \in \mathbb{N}_0$. Iščemo element iz $\mathbb{N}$, ki ga funkcija f preslika v a. Ugotovimo, da velja $f(a+1) = a$. S tem smo dokazali surjektivnost. Ker je f injektivna in surjektivna, je bijektivna.

Poiščemo še inverz funkcije f. Na podlagi predpisa osnovne funkcije določimo, da je njen predpis $f^{-1}(n) = n + 1$. Preverimo lahko, da velja $f(f^{-1}(n)) = n$. □

Primerjamo še moč množice naravnih števil z močjo množice sodih naravnih števil. S tem smo množici $\mathbb{N}$ odstranili neskončno število elementov.

Trditev 4. *Množica sodih naravnih števil ima enako moč kot množica naravnih števil.*

Dokaz. Naj bo A množica sodih naravnih števil. Definiramo $f\colon \mathbb{N} \to A$ s predpisom $f(n) = 2n$. Da dokažemo bijektivnost funkcije f, moramo dokazati injektivnost in surjektivnost.

Injektivnost preverimo z izbiro poljubnih elementov $n,\ m \in \mathbb{N}$, za katera velja $f(n) = f(m)$. S pomočjo predpisa funkcije preoblikujemo enačbo v $2m = 2n$. Enačbo uredimo in dobimo $n = m$. S tem smo dokazali injektivnost funkcije f.

Surjektivnost funkcije f dokažemo tako, da izberemo poljuben element $x \in A$ in iščemo element iz $\mathbb{N}$, ki ga bo funkcija f preslikala v x. Iz predpisa sklepamo, da je $f(\frac{x}{2}) = x$. Ker je x sodo število, vemo, da je $\frac{x}{2}$ naravno število. Funkcija f je torej surjektivna. □

Primerjamo še moč množice $\mathbb{N}$ z množico celih števil $\mathbb{Z}$. S tem smo množici $\mathbb{N}$ dodali neskončno število elementov.

Trditev 5. *Moč množice naravnih števil je enaka moči množice celih števil.*

Dokaz. Naravna in cela števila razporedimo v vrsto na spodaj prikazan način.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

Na podlagi tega želimo definirati funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Zapišemo ustrezni predpis.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}; & \text{če } n \text{ sod,} \\ -\frac{n-1}{2}; & \text{če } n \text{ lih.} \end{cases}$$

Injektivnost preverimo z izbiro poljubnih elementov $n,\ m \in \mathbb{N}$, za katera velja $f(n) = f(m)$. Dokaz moramo ločiti na tri primere.

1. Če sta n in m soda, zanju zaradi predpisa velja $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$. Enačbo uredimo in dobimo $n = m$.
2. Če sta n in m liha, zanju po predpisu velja $-\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2}$. Enačbo uredimo in dobimo $n = m$.
3. Če je n sod in m lih, velja $\frac{n}{2} = -\frac{m-1}{2}$. Ko enačbo uredimo, dobimo $n - 1 = -m$. Leva stran enačbe je večja ali enaka 0, desna pa je manjša od 0, zato pridemo do protislovja. Takšna elementa torej ne obstajata.

Ker mora vedno veljati $n = m$, je funkcija f injektivna.

Dokažimo še surjektivnost. Naj bo $x \in \mathbb{Z}$ poljuben element. Ločimo tri primere:

1. Če je $x = 0$, se element 1 slika v x.
2. Če je $x > 0$, velja $f(2x) = x$.
3. Če je $x < 0$, ugotovimo, da je $f(-2x + 1) = x$.

S tem, da smo poiskali ustrezne elemente, ki se slikajo v x, smo dokazali surjektivnost. Ker je funkcija f injektivna in surjektivna, je bijektivna. Množici $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ imata torej enako moč. □

Definicija 5. *Množica je* ***števno neskončna****, če ima enako moč kot množica naravnih števil.*

Ugotovili smo, da so množice $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ in množica vseh sodih naravnih števil števno neskončne. Zdaj nas zanima, če obstajajo še kakšne druge neskončnosti.

5 Moč množice realnih števil

Dokazali bomo, da množica realnih števil ni števno neskončna in je večja od množice naravnih števil. To pomeni, da ne obstaja bijektivna preslikava med množico naravnih števil in množico realnih števil. Za to bomo uporabili Cantorjev diagonalni dokaz.

Izrek 1. *Množica naravnih števil* $\mathbb{N}$ *ima manjšo moč od množice realnih števil* $\mathbb{R}$*.*

Dokaz. Očitno je, da obstaja injektivna funkcija iz naravnih v realna števila. Že npr. $f_1(x) = x$ slika iz naravnih v realna števila (saj so naravna števila podmnožica realnih števil) in dveh različnih elementov ne slika v enak element. Sledi, da je $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$.

Če želimo dokazati, da velja $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, moramo dokazati, da ne obstaja bijektivna funkcija iz naravnih v realna števila. Funkcija je bijektivna, če je injektivna in surjektivna hkrati, torej je dovolj, da dokažemo, da ne obstaja surjektivna funkcija.

Predpostavimo, da je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ surjektivna. To pomeni, da bo za vsako realno število obstajalo neko naravno število, ki se bo slikalo vanj.

Da bi prišli do protislovja, je dovolj, da najdemo realno število x, ki ni v zalogi vrednosti funkcije f. Število x določimo po naslednji metodi. V številu $f(1)$ vzamemo prvo števko za decimalno vejico in jo primerjamo s številom tri. Če je drugačna od tri, naj bo $d_1 = 3$, če pa je enaka tri, naj bo $d_1 = 4$. Podobno za vsak $n \in \mathbb{N}$ v številu $f(n)$ pogledamo n-to števko za decimalno vejico in jo primerjamo s številom 3. Če je različna od tri, naj bo $d_n = 3$, če pa je enaka tri, naj bo $d_n = 4$. Definiramo število $x = 0.d_1d_2d_3....$ Za vsak $n \in \mathbb{N}$ nam torej d_n predstavlja n-to števko za decimalno vejico števila x.

Število x se od $f(1)$ razlikuje vsaj na prvem mestu za decimalno vejico, od $f(2)$ vsaj na drugem, od $f(3)$ vsaj na tretjem itd. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ se torej x od $f(n)$ razlikuje vsaj na n-tem mestu za decimalko. Posledično ni enako nobenemu številu v zalogi vrednosti. Prišli smo do protislovja, funkcija f torej ni surjektivna, kar pomeni, da ni bijektivna. Ker ne obstaja bijektivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, množici $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nimata enake moči. □

Za primer si vzamimo funkcijo, katere funkcijske vrednosti prvih 4 naravnih števil so zapisane spodaj.

$$\begin{gathered} f(1) = 0.47302... \\ f(2) = 5.13263... \\ f(3) = 2.09273... \\ f(4) = 1.75392... \\ \cdots \end{gathered}$$

Po naši metodi bomo tako dobili število x, ki se začne z

$$0.3433...$$

Omenimo še, da je bilo število tri, s katerim smo primerjali števke izbrano naključno, in bi lahko izbrali tudi kakšno drugo strategijo spreminjanja števk.

6 Cantorjev izrek

Za končno množico A z n členi je moč njene potenčne množice kar 2^n. Različne podmnožice namreč dobimo tako, da se za vsak element odločimo ali je v podmnožici ali pa ga ni. Za vsak element imamo torej dve možnosti. Tako je vseh podmnožic $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ (n-krat število dvojk) oziroma 2^n. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ vemo, da je $2^n > n$, torej za poljubno končno množico A velja $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. Dokažimo še, da to velja tudi za neskončne množice.

Izrek 2 (Cantorjev izrek)**.** *Za poljubno množico A velja, da je moč njene potenčne množice večja od moči množice same*

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|.$$

Dokaz. Dokaz je sestavljen iz dveh korakov. Najprej dokažemo, da je množica manjša ali enaka svoji potenčni množici, v drugem koraku pa dokažemo, da nista enako močni. Tako sledi, da je množica strogo manjša od svoje potenčne množice.

1. Najprej dokažimo, da je $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Pokazati moramo torej obstoj injektivne preslikave

   $$f \colon A \to \mathcal{P}(A).$$

   Tem pogojem zadostuje funkcija f, ki vsakemu elementu v množici A priredi podmnožico A, v kateri je samo ta element. Za vsak $x \in A$ namreč vemo, da je $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.

   Preverimo, da je funkcija f injektivna. Naj bosta $x,\ y \in A$ taka elementa, da velja $f(x) = f(y)$. Iz predpisa funkcije f sledi $\{x\} = \{y\}$, torej je $x = y$. S tem smo dokazali

   $$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|.$$

2. Dokažimo še, da je $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. Predpostavimo, da sta množici enako močni. To pomeni, da obstaja bijektivna preslikava $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$. Naj bo S taka podmnožica množice A, ki vsebuje vse elemente x iz A, ki se slikajo v tako množico $f(x)$, da element sam ni v njej. Velja torej

   $$S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

   Vzamimo tak $a \in A$, da velja

   $$f(a) = S.$$

   (a) Če je $a \in S$, potem po zgoraj dani definiciji $f(a) = S$ velja, da $a \in f(a)$. Element a se torej slika v podmnožico, ki a vsebuje. Po definiciji množice S in ker smo predpostavili, da $a \in S$, vemo, da a ni v $f(a)$. Pridemo torej do protislovja.

   (b) Obravnavamo še primer, ko $a \notin S$. Po definiciji S se a slika v podmnožico, ki tudi sama vsebuje a, velja torej $a \in f(a)$. Ker je $f(a) = S$, spet pridemo do protislovja.

   Pokazali smo torej, da ne more obstajati tak a, ki se slika v S. Ker je $S \in \mathcal{P}(A)$, je S tak element $\mathcal{P}(A)$, ki ni slika nobenega elementa iz A. Funkcija ni surjektivna, torej tudi ne bijektivna. Ker ne obstaja bijektivna preslikava med množicama, nista enako močni.

V dveh korakih smo torej dokazali, da je poljubna množica A strogo manjša od njene potenčne množice.

□

Velja torej, da ima potenčna množica vsake množice večjo moč kot množica sama

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|.$$

Posledično obstaja neskončno različnih neskončnosti, saj lahko vedno vzamemo potenčno množico predpostavljeno največje množice in tako dobimo še večjo množico.

7 Slike množic

Ekvipolenco množic smo dokazovali z iskanjem bijektivnih preslikav med množicami. Ker pa je včasih lažje najti dve injektivni preslikavi, bomo dokazali Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek. Najprej poglejmo, kaj je to slika množice in dokažimo lastnost slike množice injektivne funkcije, ki jo bomo uporabili pri dokazu izreka.

Definicija 6. *Naj bosta A in B množici, $f\colon A \to B$ funkcija ter $S \subseteq A$.* ***Slika podmnožice*** *S je množica $f_*(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$.*

Trditev 6. *Naj bosta A in B množici, $f\colon A \to B$ injektivna funkcija ter X in Y poljubni podmnožici množice A. Potem je slika podmnožice X brez slike podmnožice Y enaka sliki podmnožice X brez Y. Velja torej*

$$f_*(X)\backslash f_*(Y) = f_*(X\backslash Y).$$

Dokaz. Enakost množic bomo dokazali v dveh korakih. Najprej bomo dokazali, da je poljuben element $z \in f_*(X)\backslash f_*(Y)$ tudi v množici $f_*(X\backslash Y)$, v drugem koraku pa še obratno.

1. Za poljuben element $z \in f_*(X)\backslash f_*(Y)$ vemo, da obstaja nek $a \in X$, za katerega velja $f(a) = z$. Ker $z \notin f_*(Y)$, vemo, da a ne more biti v množici Y. Sledi, da je $a \in X\backslash Y$, torej zares velja $z \in f_*(X\backslash Y)$.

2. Za poljuben element $z \in f_*(X\backslash Y)$ pa vemo, da obstaja nek a, ki je element X, da velja $z = f(a)$ in $a \notin Y$. Sledi, da je $z \in f_*(X)$. Zaradi injektivnosti mora a biti edini element, ki se slika v z, torej z ni v množici $f_*(Y)$. Sledi, da je $z \in f_*(X)\backslash f_*(Y)$.

□

8 Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek

Lastnost slik podmnožic, ki smo jo spoznali v prejšnjem razdelku, najprej uporabimo, da dokažemo naslednjo lemo.

Lema 1. *Če sta A_1 in B_1 množici, za kateri velja $B_1 \subseteq A_1$ in $|A_1| \leq |B_1|$, je $|A_1| = |B_1|$.*

Dokaz. Naj bosta A_1 in B_1 množici, za kateri velja $B_1 \subseteq A_1$ in $|A_1| \leq |B_1|$. Zaradi $|A_1| \leq |B_1|$ vemo, da obstaja injektivna funkcija $f\colon A_1 \to B_1$. Naj bo $C_1 = A_1\backslash B_1$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}$, kjer je $n \geq 2$, definiramo:

$$A_n = f_*(A_{n-1}), \qquad B_n = f_*(B_{n-1}), \qquad C_n = A_n\backslash B_n.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ po definiciji velja $f_*(C_n) = f_*(A_n\backslash B_n)$. Ker je funkcija f injektivna, po trditvi 6 vemo:

$$f_*(A_n\backslash B_n) = f_*(A_n)\backslash f_*(B_n) = A_{n+1}\backslash B_{n+1} = C_{n+1}.$$

Zaradi injektivnosti funkcije f je torej slika množice C_n za vsak $n \in \mathbb{N}$ enaka množici C_{n+1}. Definiramo množico $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ in funkcijo $g\colon A_1 \to B_1$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} f(x); & x \in C, \\ x; & x \notin C. \end{cases}$$

Zdaj želimo dokazati, da je funkcija g bijektivna. Najprej dokažimo, da je injektivna. Naj bosta x in y taka elementa iz množice A_1, da velja $g(x) = g(y)$.
Imamo 3 možnosti:

1. Najprej si pogledamo primer, ko sta $x,\ y \in C$, torej velja $f(x) = f(y)$. Ker je f injektivna funkcija, vemo, da je $x = y$.

2. Če velja $x,\ y \notin C$, potem zaradi predpisa funkcije g vemo $x = y$.

3. V primeru, da je $x \in C$ in $y \notin C$, vemo, da obstaja nek $n \in \mathbb{N}$, tako da je $x \in C_n$. Dokazali smo že, da potem velja $f(x) \in C_{n+1}$. Ker pa $y \notin C$ in $f(x) \in C$ ter hkrati zaradi predpisa funkcije g velja $f(x) = y$, smo prišli do protislovja.

S tem smo dokazali, da je funkcija g injektivna. Zdaj bomo dokazali še, da je surjektivna.
Naj bo z poljuben element v množici B_1. Ločimo 2 primera:

1. Če je $z \in C$, obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, kjer je $n \geq 2$, da je $z \in C_n$. Dokazali smo že, da je $f_*(C_{n-1}) = C_n$. Iz predpisa funkcije g sklepamo, da velja $g_*(C_{n-1}) = C_n$. Obstaja torej tak $x \in C_{n-1}$, da je $g(x) = z$.

2. Če $z \notin C$, iz predpisa funkcije g sledi $g(z) = z$.

To nam pove, da je funkcija g surjektivna. Tako smo našli bijektivno funkcijo, s katero dokažemo lemo. □

Torej, če si izberemo množici A_1 in B_1 za kateri velja $B_1 \subseteq A_1$ in $|A_1| \leq |B_1|$, vemo, da za ti množici velja tudi $|A_1| = |B_1|$

Izrek 3 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Naj bosta A in B množici. Če obstajata injektivni preslikavi $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to A$, potem obstaja bijektivna preslikava iz množice A v množico B*

V jeziku moči množic nam izrek torej pove, da če $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |A|$, potem je $|A| = |B|$.

Dokaz. Izberemo si injektivni funkciji $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to A$.
Nato definiramo novo funkcijo $h\colon B \to g_*(B)$ s predpisom

$$h(x) = g(x).$$

Ker je funkcija g injektivna, je tudi funkcija h injektivna. Prav tako vemo, da je h surjektivna, saj slika v $g_*(B)$. Tako smo našli bijektivno funkcijo, ki slika iz B v $g_*(B)$, zato velja

$$|B| = |g_*(B)|.$$

Dovolj je torej dokazati

$$|g_*(B)| = |A|.$$

Pri tem želimo uporabiti lemo, zato preverimo ali množici zadostujeta pogojema iz leme.

1. Pogoj $g_*(B) \subseteq A$ je izpolnjen.

2. Preveriti moramo, če je pogoj $|A| \leq |g_*(B)|$ izpolnjen. Najprej si pogledamo kompozitum funkcij

$$h \circ f\colon A \to g_*(B).$$

   Vemo, da je ta kompozitum injektiven, ker je kompozitum dveh injektivnih funkcij.

Če uporabimo lemo, vemo, da je $|A| = |g_*(B)|$.
Torej velja tudi

$$|A| = |g_*(B)| = |B|.$$

□

S pomočjo tega izreka primerjajmo še moč množice naravnih števil $\mathbb{N}$ z močjo množice pozitivnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^+$.

Trditev 7. *Moč množice naravnih števil je enaka moči množice pozitivnih racionalnih števil.*

Dokaz. Najprej poiščemo injektivno funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$. Temu ustreza kar funkcija s predpisom $f(n) = n$. Poiskati moramo še injektivno funkcijo $g\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$. Vemo, da lahko vsak element iz $\mathbb{Q}^+$ na enoličen način zapišemo kot ulomek $\frac{m}{n}$, kjer sta n, $m \in \mathbb{N}$ tuji si števili. Definiramo funkcijo g s predpisom $g(\frac{m}{n}) = 2^m \cdot 3^n$.

Dokažimo, da je funkcija g injektivna. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ taka števila, da sta a in b tuji si števili ter c in d tuji si števili. Prav tako naj velja $g(\frac{a}{b}) = g(\frac{c}{d})$. Po predpisu funkcije enačbo preoblikujemo v $2^a \cdot 3^b = 2^c \cdot 3^d$. Ker sta števili na levi in desni strani enačbe enaki, morata imeti enak praštevilski razcep. Posledično velja $a = c$ in $b = d$, torej je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ker smo našli injektivni funkciji $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ in $g\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, po Cantor-Schröder-Bernsteinovem izreku vemo, da je $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$.

□

9 Zaključek

Čeprav se nam ideja o različnih velikostih neskončnosti morda zdi nenavadna, saj si že neskončnost samo težko predstavljamo, smo se v članku ukvarjali s števnimi in neštevnimi neskončnostmi. Ugotovili smo, da obstaja več različnih neskončnosti, kar smo dokazovali z obstoji bijektivnih preslikav med množicami. Prav tako smo dokazali Cantorjev izrek in z njegovim diagonalnim dokazom ugotovili, da ima množica realnih števil večjo moč kot množica naravnih števil. Na koncu smo dokazali še Cantor–Schröder–Bernsteinov izrek, s pomočjo katerega lahko lažje dokazujemo obstoj bijektivnih preslikav med množicami.

Literatura

[1] A. Bauer, *Logika in množice*, 2022, dostopno na `https://www.andrej.com/zapiski/MAT-LMN-2022/lmn.pdf`

[2] Zapiski predavanj predmeta Logika in množice prof. dr. Alexa Simpsona (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2023/2024)