Kirchoffov izrek

Manca Ernst, Primož Markovič, Teja Zabukovec
Mentor: Matija Likar

Povzetek

V članku predstavimo problem štetja vpetih dreves v grafu. Izpeljemo Kirchoffov izrek, ki povezuje število vpetih dreves v grafu z lastnimi vrednostmi sosednostne matrike grafa. Izrek uporabimo na primeru hiperkocke.

1 Uvod

Poglejmo si naslednji kombinatorični problem. Na Marsu se je zgodil šokanten dogodek. Na planet je priletel asterokubid, ki je zaradi Marsove unikatne atmosfere zavzel obliko kocke. Ugotovili smo, da se na njegovih ogliščih nahaja dragocena ruda, svoje rudniške rove pa lahko napeljemo le po robovih te kocke. Zaradi finančnih omejitev želijo skopati sistem rovov, tako da bo za vsak par vozlišč obstajala le ena pot. Lotijo se kopanja, a kmalu ugotovijo, da imajo veliko izbir, kakšen sistem rovov izbrati. Začnejo se prepirati o vseh možnih poteh in že nameravajo pripraviti anketo z vsemi povezavami, da bi se ljudstvo lahko odločilo za najboljše, vendar hitro ugotovijo, da ne vejo, koliko je sploh vseh možnih sistemov rovov, ki jih lahko izkopljejo. Možnosti je bilo tako veliko, da so med debato čisto pozabili na kamnine in začeli razmišljati le še o štetju takih sistemov.

2 Grafi in vpeta drevesa

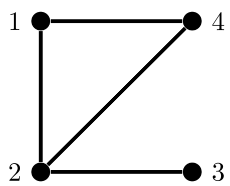
K problemu bomo pristopili preko spektralne teorije grafov. Za začetek si poglejmo nekaj osnovnih pojmov teorije grafov, s katerimi formaliziramo svoj kombinatorični problem.

Definicija 1. ***Graf*** *$G = (V, E)$ je urejen par, kjer je*

- *$V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ neprazna množica **vozlišč** ali **točk** grafa,*
- *$E = \{e_1, \ldots, e_q\}$ pa množica **povezav** med njimi. Vsaka povezava je določena z množico dveh vozlišč, ki jo povezuje.*

Kocko v našem uvodnem problemu lahko modeliramo kot graf, tako da vzamemo njena oglišča za množico vozlišč. Dve vozlišči pa v grafu povežemo natanko tedaj, ko ju povezuje rob kocke. V nadaljevanju bomo še privzeli, da je med dvema vozliščema največ ena povezava, vozlišče pa ne sme imeti povezave same nase. Privzeli bomo tudi, da je množica vozlišč končna. Z izrazom $v_i \sim_G v_j$ bomo označili, da sta vozlišči v_i in v_j povezani v grafu G. Vozliščema, ki ju neka povezava povezuje, bomo rekli **krajišči** te povezave.

Primer 1. *Imamo graf* $G = (V, E)$ *z vozlišči* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *in povezavami* $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (1, 4)\}$.



Slika 1: Graf na štirih vozliščih.

Poglejmo si še nekaj lastnosti grafov, ki nam bodo pomagali pri problemu. **Stopnja vozlišča** $d(v)$ je število povezav v grafu, ki imajo vozlišče v za eno izmed svojih krajišč. Graf je **d-regularen**, če ima vsako vozlišče v grafu stopnjo d. Stopnje vozlišč v zgornjem primeru grafa so prikazane v spodnji tabeli.

vozlišče v	**stopnja vozlišča** $d(v)$
1	2
2	3
3	1
4	2

Tabela 1: Stopnje vozlišč v zgornjem primeru grafa.

Zaporedje vozlišč $v_1 v_2 \ldots v_n$ v grafu imenujemo **sprehod**, če $v_i \sim_G v_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, n - 1$. Grafu pravimo, da je **povezan**, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod, ki se začne v enem in konča v drugem vozlišču. Graf v zgornjem primeru, je povezan.

Grafe pa lahko med sabo tudi množimo. Naj bosta $G = (V_1, E_1)$ in $H = (V_2, E_2)$ grafa. Njun produkt $G \times H = (V, E)$ definiramo kot

- $V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$,
- $E = \left\{ \{(u, v), (u', v')\} \middle| u, u' \in V_1,\ v, v' \in V_2, \begin{array}{c} (u = u') \wedge (v \sim_H v'), \\ \text{ali} \\ (u \sim_G u') \wedge (v = v') \end{array} \right\}$.

Naj bosta $G = (V, E)$ in $H = (V', E')$ grafa. Pravimo, da je H **podgraf** grafa G, če velja $V' \subseteq V$ in $E' \subseteq E$. Poseben tip podgrafa je **vpeti podgraf**, ki vsebuje vsa vozlišča prvotnega grafa, oz. $V' = V$.

Spoznajmo še nekaj vrst grafov, ki se pogosto pojavljajo.

- **Polni graf** ali **klika** K_n je graf z n vozlišči, kjer je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi. Tako ima klika $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav in je $(n - 1)$-regularna.
- **Pot** P_n je graf z n vozlišči, kjer povežemo med sabo vozlišče i in vozlišče $i+1$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
- **Cikel** C_n je graf z n vozlišči, kjer povežemo med sabo vozlišče i in vozlišče $i+1$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ter tudi prvo in zadnjo vozlišče $(1, n)$, da dobimo 2-regularen graf. Če nek graf vsebuje cikel kot podgraf, pravimo da ima graf cikel, oz. da je cikličen. V nasprotnem primeru pravimo, da je graf acikličen.

- **Hiperkocka** $H_n = (V, E)$ je graf, ki je produkt n-tih poti P_2. Tako ima graf 2^n vozlišč in $2^{n-1} \cdot n$ povezav, s čimer dobimo n-regularen graf.

Poglejmo si še eno lemo, ki nam bo prišla prav v nadaljevanju.

Lema 1. *Če graf nima cikla, potem ima vsaj eno vozlišče s stopnjo* 1.

Dokaz. Izberimo si poljubno vozlišče v grafu in se premikamo po povezavah, tako da se nikoli ne vrnemo na vozlišče, od koder smo prišli. Ker graf nima cikla, ne bomo nikoli prišli na isto vozlišče dvakrat, torej bomo morali sčasoma priti do nekega vozlišča, iz katerega ne bomo mogli nadaljevati, saj je krajišče le ene povezave. Tako vozlišče ima stopnjo 1. □

Vrsta grafa, ki se pojavi v našem problemu, je drevo.

Definicija 2. *Grafu $G = (V, E)$ rečemo* ***drevo****, če je povezan in nima ciklov. Vozliščem v drevesu, ki imajo stopnjo* 1*, pravimo* ***listi****.*

Za reševanje kombinatoričnih problemov je koristno poznati še nekaj ekvivalentnih pogojev, kdaj je graf drevo.

Lema 2. *Naj bo G graf z n vozlišči. Naslednje izjave so ekvivalente*

(a) graf G je drevo,

(b) graf G je povezan in ima $n-1$ povezav,

(c) graf G nima cikla in ima $n-1$ povezav,

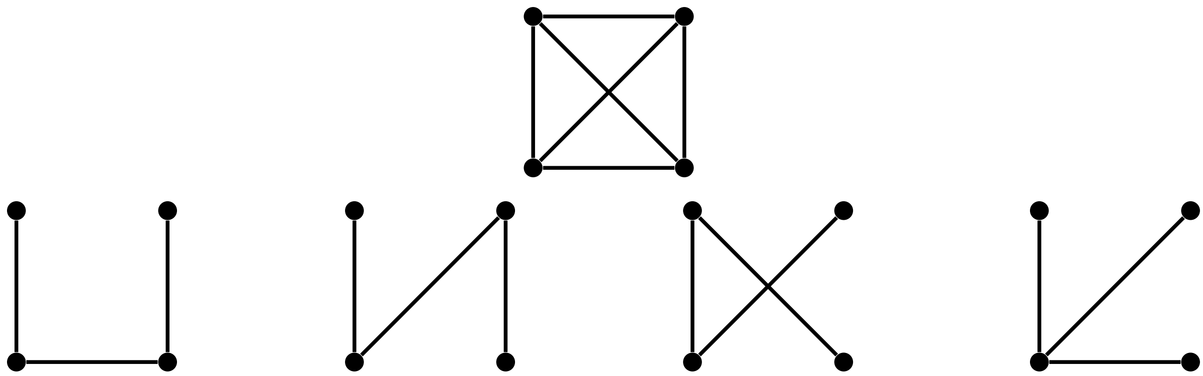
(d) med vsakim parom vozlišč v G obstaja natanko ena pot.

Dokaz. Dokazali bomo le ekvivalentnost izjav (a) in (c), ostale pare pa lahko bralec poskusi dokazati sam. Najprej dokažimo, da izjava (a) implicira izjavo (c). Po definiciji drevesa naš graf nima ciklov, tako da je prvi pogoj zadoščen. Drugi pogoj pokažemo z indukcijo na številu vozlišč n. Baza indukcije $n = 1$ je očitna. Sedaj predpostavimo, da ima drevo z $n-1$ vozlišči $n-2$ povezav, želimo pa dokazati, da ima drevo z n vozlišči $n-1$ povezav. Po lemi 1 si lahko izberemo en list drevesa in ga odstranimo skupaj s povezavo, ki ga povezuje s preostankom grafa. Tako dobimo graf z $n-1$ vozlišči. S tem zagotovo ne bomo ustvarili novih ciklov. Ker smo odstranili list, nobeni drugi dve vozlišči v prvotnem grafu nista bili povezani preko njega, zato bodo vsa preostala vozlišča ostala povezana. Torej je nastali graf drevo z $n-1$ vozlišči. Po indukcijski predpostavki ima to drevo $n-2$ povezav. Ker smo odstranili eno povezavo, ima prvotno drevo $n-1$ povezav, kar zaključuje indukcijo.

Dokažimo še implikacijo v drugo smer. Spomnimo, da želimo dokazati, da je naš graf povezan in nima ciklov. Druga lastnost je seveda očitna. Naj bo G acikličen graf z $n-1$ povezavami. Po lemi 1 mu lahko, podobno kot prej, odstranimo neko vozlišče s stopnjo 1 skupaj s povezavo, ki ga povezuje s preostankom grafa. Dobimo acikličen graf G' z $n-2$ povezavami, ki je po naši indukcijski predpostavki drevo, torej je povezan. Želimo dokazati, da je tudi graf G povezan. To drži, saj iz grafa G' dobimo G tako, da dodamo eno vozlišče in povezavo nanj. Dodano vozlišče je povezano z nekim vozliščem v G' in posledično tudi z vsemi ostalimi vozlišči v G'. Torej je G povezan. Sledi, da je G res drevo, kar zaključuje indukcijo. □

Definicija 3. ***Vpeto drevo*** *je vpet podgraf, ki je drevo.*

Če pogledamo četrto izmed ekvivalentnih definicij drevesa, vidimo, da želimo v uvodnem problemu prešteti vpeta drevesa grafa kocke H_3. K takemu problemu je težko pristopiti na naiven kombinatoričen način, zato bomo v nadaljevanju vpeta drevesa grafa prešteti z uporabo linearne algebre. Lažji kombinatorični problem je prešteti vsa vpeta drevesa klike. Na sliki 2 so prikazana vpeta drevesa klike K_4. V splošnem bomo število vpetih dreves v grafu G označili s $\kappa(G)$.



Slika 2: Graf K_4 in njegovih 16 vpetih dreves (izvzemši rotacije in zrcaljenja).

3 Linearna algebra

Spoznali bomo nekaj ključnih izrekov iz linearne algebra, ki nam bodo koristili pri uvodnem problemu. Predpostavili bomo, da je bralec seznanjen z osnovnimi koncepti, kot so vektor, matrika, transponirana matrika in produkt dveh matrik. Bralec lahko osveži svoje znanje s [1]. Vrednost v i-ti vrstici j-tega stolpca matrike A bomo označili z $[A]_{ij} = a_{ij}$. Začnimo z definicijo permutacije, preko katere bomo definirali determinanto matrike.

Definicija 4. ***Permutacija*** *σ je bijekcija na množici $\{1, \ldots, n\}$. Množico vseh permutacij n elementov označimo s S_n.*

Spomnimo, da na množici z n elementi obstaja $n!$ permutacij. Permutacijo lahko zapišemo na več načinov, enega izmed njih smo si ogledali v naslednjem primeru.

Primer 2. *Za množico $\{1, 2, 3, 4\}$ se eno izmed permutacij lahko zapiše kot*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

kjer so v prvi vrstici elementi v običajnem vrstnem redu, v drugi vrstici pa vrednosti v katere se ti elementi slikajo. To lahko splošneje zapišemo kot

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Potrebovali bomo še dve lastnosti permutacije. **Število inverzij** permutacije (σ) je število parov (i, j), kjer sta $i < j$ in $\sigma(j) < \sigma(i)$. **Signatura** permutacije $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\sigma)}$. Za permutacijo σ iz prvega primera sta taka para $(1, 2)$ in $(1, 3)$ iz česar sledi, da je $(\sigma) = 2$.

3.1 Determinanta matrika

Definicija 5. *Determinanta matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right).$$

Zgled 1. *Izpišimo determinanto splošne matrike za $n = 2$ in $n = 3$.*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ker je število permutacij množice z n elementi enako $n!$, je tak način računanja determinante nepraktičen. Bolj običajno je računati determinanto z razvojem po vrstici ali stolpcu.

Izrek 1. *Ekvivalentno lahko determinanto matrike A definiramo preko razvoja po vrsticah ali po stolpcih*

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}\det A_{1k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det A_{k1},\end{aligned}$$

kjer je A_{ij} matrika, ki smo ji odvzeli i-to vrstico in j-ti stolpec. Omenimo še, da izrek drži, tudi ko namesto prve vrstice ali prvega stolpca opazujemo poljubno vrstico ali poljuben stolpec.

Dokaz izreka lahko bralec najde v [1], mi pa bomo dokazali, da definiciji sovpadata pri razvoju matrike 3×3 po prvi vrstici.

Zgled 2.

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} &= a_{11}\cdot(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}\cdot(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}\cdot(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

Transponirana matrika neke matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ je matrika $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ki jo dobimo tako, da zamenjamo vrstice in stolpce matrike A, natančneje $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$. Bralca spomnimo še na nekaj uporabnih lastnosti pri računanju determinante.

Lema 3. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika. Zanjo veljajo naslednje lastnosti*

(a) $\det A^T = \det A$,

(b) če v A menjamo dve sosednji vrstici, se predznak determinante spremeni,

(c) če ima A vrstico samih ničel, potem je $\det A = 0$,

(d) če ima A dve enaki vrstici, potem je $\det A = 0$,

(e) če je A trikotna matrika, torej je $a_{ij} = 0$ za vse $i > j$, potem je $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,

(f) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$,

(g) če poljubni vrstici v A prištejemo poljubno drugo vrstico v A se determinanta matrike ne spremeni.

Dokaz. Dokazali bomo le prvo izmed lastnosti. Dokaze ostalih lahko bralec poišče v [1]. Zaradi prve lastnosti veljajo preostale tudi če zamenjamo izraz vrstica z izrazom stolpec.
Prvo lastnost bomo dokazali z indukcijo po n. Baza indukcije $n = 1$ očitno velja, saj je taka matrika enaka sebi transponirani matriki. Za splošen n determinanto A^T razpišemo z razvojem po vrstici in uporabimo definicijo transponirane matrike ter indukcijsko predpostavko za podmatrike velikosti $(n-1)\times(n-1)$. Dobimo vsoto, ki je enaka determinanti matrike A preko razvoja po stolpcu.

$$\begin{aligned}\det A^T &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[A^T]_{1k}\det(A^T_{1k})\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[A]_{k1}\det(A_{k1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[A]_{k1}\det(A_{k1})\\ &= \det A\end{aligned}$$

□

Lema 4. *Naj bo* $(k_1, \ldots, k_m)$ *m-terica različnih celih števil med* 1 *in* n *ter naj bo* $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. *Z* $B_{k_1,\ldots,k_m}$ *označimo matriko* B, *v kateri vzamemo le vrstice* $k_1, \ldots, k_m$ *v tem vrstnem redu. Naj bo* $(j_1, \ldots, j_m)$ *enaka m-terica, vendar v naraščajočem vrstnem redu. Potem velja*

$$\det(B_{k_1,\ldots,k_m}) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_m) \cdot \det(B_{j_1,\ldots,j_m})$$

Zgoraj smo s $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_m)$ *označili signaturo permutacije na množici* $\{j_1, \ldots, j_m\}$, *ki slika element* j_i *v* k_i.

Lema 5. *(Cauchy-Binetova formula) Naj bosta* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *in* $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *matriki. Če je* $n < m$, *je* $\det(AB) = 0$, *sicer pa je*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |S| = m}} \det A[S] \cdot \det B[S].$$

V zgornjem izrazu $A[S]$ *označuje matriko* A, *v katerem obdržimo le stolpce z indeksi v množici* S, *istem vrstnem redu kot v originalni matriki. Podobno,* $B[S]$ *označuje matriko* B, *v kateri ohranimo le ustrezne vrstice.*

Dokaz. Uporabimo definicijo determinante in nato še definicijo produkta matrik

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{m} [AB]_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{k\sigma(i)} \right).
\end{aligned}$$

Permutacijo σ lahko razpišemo kot m-terico $(l_1, \ldots, l_m)$, kjer je $l_i = \sigma(i)$. Prav tako lahko razvijemo produkt vsot v izrazu

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \le l_1,\ldots,l_m \le m} \operatorname{sgn}(l_1, \ldots, l_m) \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{1k} [B]_{k\sigma(1)} \right) \cdots \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{mk} [B]_{k\sigma(m)} \right) \\
&= \sum_{1 \le l_1,\ldots,l_m \le m} \operatorname{sgn}(l_1, \ldots, l_m) \sum_{1 \le k_1,\ldots,k_m \le n} [A]_{1k_1} \cdots [A]_{mk_m} \cdot [B]_{k_1 1} \cdots [B]_{k_m l_m} \\
&= \sum_{1 \le l_1,\ldots,l_m \le m} \operatorname{sgn}(l_1, \ldots, l_m) \sum_{1 \le k_1,\ldots,k_m \le n} \left(\prod_{i=1}^{m} [A]_{ik_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{m} [B]_{k_i l_i} \right).
\end{aligned}$$

V zgornjem izrazu prvič seštevamo po vseh m-tericah $(l_1, \ldots, l_m)$, drugič pa po vseh m-tericah $(k_1, \ldots, k_m)$. Vrstni red teh dveh seštevanj lahko menjamo, člene tipa $[A]_{ik_i}$ pa lahko nesemo pred drugo vsoto

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \le k_1,\ldots,k_m \le n} \sum_{1 \le l_1,\ldots,l_m \le m} \operatorname{sgn}(l_1, \ldots, l_m) \left(\prod_{i=1}^{m} [A]_{ik_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{m} [B]_{k_i l_i} \right) \\
&= \sum_{1 \le k_1 \ldots k_m \le n} \left(\prod_{i=1}^{m} [A]_{ik_i} \right) \sum_{1 \le l_1 \ldots l_m \le m} \operatorname{sgn}(l_1, \ldots, l_m) \left(\prod_{i=1}^{m} [B]_{k_i l_i} \right).
\end{aligned}$$

Desno stran izraza prepoznamo kot determinanto matrike B, v kateri obdržimo le vrstice $k_1, \ldots, k_m$, v tem vrstnem redu. Tako matriko bomo označili z $B_{k_1,\ldots,k_m}$.

$$\sum_{1 \le k_1 \ldots k_m \le n} [A]_{1k_1} \ldots [A]_{mk_m} \cdot \det(B_{k_1,\ldots,k_m})$$

Naj bo $(j_1, \ldots, j_m)$ urejena m-terica vrednosti iz $(k_1, \ldots, k_m)$ v nepadajočem vrstnem redu. Signaturo m-terice $(k_1, \ldots, k_m)$ definiramo preko števila inverzij m-terice (števila indeksov $i < j$, kjer je $k_i < k_j$).

Signatura m-terice je -1, če je število inverzij liho, in 1, če je število inverzij sodo. Po lemi 4 vidimo, da je $\det(B_{k_1,\ldots,k_m}) = \operatorname{sgn}(k_1,\ldots,k_m)\det(B_{j_1,\ldots,j_m})$, torej

$$\sum_{1\leq k_1,\ldots,k_m\leq n} [A]_{1k_1}\ldots[A]_{mk_m}\cdot \operatorname{sgn}(k_1,\ldots,k_m)\cdot \det(B_{j_1,\ldots,j_m}).$$

Namesto, da seštevamo po vseh m-tericah $(k_1,\ldots,k_m)$, lahko iteriramo po vseh urejenih m-tericah $(j_1,\ldots,j_m)$ in njihovih permutacijah

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_m\leq n} \det(B_{j_1,\ldots,j_m}) \sum_{\sigma\in S_m} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^m [A]_{ij_{\sigma(i)}}\\
&= \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_m\leq n} \det(B_{j_1,\ldots,j_m})\det(A_{j_1,\ldots,j_m})\\
&= \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |S|=m}} \det A[S]\cdot\det B[S],
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnjih korakih prepoznali determinanto matrike A, v kateri obdržimo le stolpce, ki ustrezajo m-terici $(j_1,\ldots,j_m)$, in upoštevaje 3 (d) vzeli v poštev le tiste m-terice $(j_1,\ldots,j_m)$, ki imajo paroma različne vrednosti. $\square$

Iz zgornje leme sledi znana posledica izreka za kvadratne matrike. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem je namreč $\det(AB) = \det A\cdot\det B$.

3.2 Lastna vrednost in lastni vektor

Povzemimo še nekaj ključnih definicij in izrekov iz linearne algebra, ki jih bomo koristili v nadaljevanju.

Lema 6. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Enačba $A\cdot v = \mathbf{0}$, kjer $\mathbf{0}$ označuje stolpični vektor z n ničlami in je neznanka vektor v, ima netrivialno rešitev natanko tedaj, ko je $\det(A) = 0$.*

Definicija 6. *Real število λ je **lastna vrednost** matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, če obstaja neničelni vektor $v \in \mathbb{R}^n$, imenovan **lastni vektor**, tako da je $Av = \lambda\cdot v$. Izrazu $\det(tI_n - A)$ pravimo karakteristični polinom matrike A. Označimo ga s $p_A(t)$. V izrazu smo z I_n označili **identično matriko** dimenzije n. To je matrika, kjer je $a_{ij} = 1$ natanko tedaj, ko je $i = j$.*

Lema 7. *Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima lastno vrednost λ natanko tedaj, ko je $p_A(\lambda) = 0$.*

Dokaz. Po definiciji lastne vrednosti matrike obstaja neki neničelni vektor v, tako da je $Av = \lambda v = \lambda I_n v$. Enačbo lahko preuredimo v $\lambda I_n v - Av = 0$. Zaradi distributivnosti lahko vektor v izpostavimo in dobimo $(\lambda I_n - A)v = 0$. Vektor v je po predpostavki neničelni, zato je po lemi 6 velja $\det(\lambda I_n - A) = 0$, kar po definiciji karakterističnega polinoma velja, če in samo če je $p_A(\lambda) = 0$. $\square$

4 Število vpetih dreves v grafu

Vrnimo se sedaj k prvotnem problemu. V splošnem nas zanima število vpetih dreves v nekem grafu. Najprej si bomo ogledali, kako lahko ta problem prevedemo na linearno algebro. Za to je treba svojemu grafu prirediti **orientacijo**, oziroma smer povezav. To pomeni, da vsaki povezavi med parom vozlišč določimo začetno in končno vozlišče. V nadaljevanju bomo videli, da lahko za rešitev problema izberemo poljubno orientacijo.

Definicija 7. *Naj bo $G = (V, E)$ graf s p vozlišči in q povezavami. Grafu lahko definiramo naslednje matrike.*

- ***Sosednostna matrika*** *$A(G)$ je matrika $\mathbb{R}^{p\times p}$, kjer je $[A(G)]_{ij}$ število povezav med vozliščema v_i in v_j. Ob naših predpostavkah je to število lahko le 0 ali 1, kjer je slednje mogoče samo, če $i \neq j$.*

- ***Incidenčna matrika*** *$M(G)$ je matrika $\mathbb{R}^{p\times q}$, za katero velja*

$$[M(G)]_{ij} = \begin{cases} -1, & \textit{če ima povezava } e_j \textit{ začetek v vozlišču } v_i, \\ 1, & \textit{če ima povezava } e_j \textit{ konec v vozlišču } v_i, \\ 0, & \textit{če vozlišče } v_i \textit{ ni krajišče povezave } e_j. \end{cases}$$

- ***Laplaceova matrika*** *$L(G)$ je matrika $\mathbb{R}^{p\times p}$, za katero velja*

$$[L(G)]_{ij} = \begin{cases} -m_{ij}, & \textit{kadar } i \neq j, \\ d(v_i), & \textit{kadar } i = j. \end{cases}$$

  pri čemer z $d(v_i)$ označimo stopnjo vozlišča v_i in z m_{ij} število povezav med vozliščema v_i in v_j, neodvisno od njihove orientacije.

Ker je mogoče vsakemu grafu prirediti tovrstne matrike, lahko kombinatorični problem štetja vpetih dreves na grafu prevedemo na linearno algebro. Kjer je nedvoumno, o katerem grafu govorimo, bomo te tri matrike na kratko označili z A, M in L. Algebraično bomo dokazali Kirchhoffov izrek o številu vpetih dreves na grafu in tako tudi prišli do rešitve problema za hiperkocko H_n. Za dokaz izreka potrebujemo še naslednje leme.

Lema 8. *Naj bosta $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ incidenčna matrika in $L \in \mathbb{R}^{p\times p}$ Laplaceova matrika istega grafa. Potem je $MM^T = L$.*

Dokaz. Dimenziji MM^T in L sta očitni enaki. Treba je še dokazati le, da je $[MM^T]_{ij} = [L]_{ij}$ za vsaka indeksa $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Po definiciji množenja matrik velja

$$\begin{aligned} [MM^T]_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} [M]_{ik}[M^T]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q} [M]_{ik}[M]_{jk}. \end{aligned}$$

Zdaj ločimo primera, ko je $i \neq j$ oziroma $i = j$.

1. Če velja $i \neq j$ in želimo, da $[M]_{ik}[M]_{jk} \neq 0$, morata biti vozlišči v_i in v_j povezani. Po definiciji incidenčne matrike ena od vrednosti $[M]_{ik}$ in $[M]_{jk}$ pri nekem $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ zavzema vrednost -1, druga pa 1, torej je produkt $[M]_{ik}[M]_{jk}$ enak -1. Vsota $\sum_{k=1}^{q}[M]_{ik}[M]_{jk}$ je potem enaka nasprotni vrednosti števila povezav med vozlišči v_i in v_j, kar ustreza definiciji Laplaceove matrike L.

2. Če velja $i = j$, je
$$[M]_{ik}[M]_{jk} = [M]_{ik}^2,$$
iz česar sledi
$$[MM^T]_{ii} = \sum_{k=1}^{q} [M]_{ik}^2.$$
Za vozlišče v_i, ki sovpada s k-to povezavo, je vrednost $[M]_{ik}^2$ enaka 1, sicer pa 0. Potem je vsota $\sum_{k=1}^{q}[M]_{ik}^2$ enaka stopnji vozlišča $d(v_i)$ in je
$$[MM^T]_{ii} = d(v_i),$$
kar tudi ustreza definiciji Laplaceove matrike in zaključuje dokaz. □

Lema 9. *Naj bo G d-regularen graf s p vozlišči.*

1. *Velja $L(G) = dI_p - A(G)$.*

2. *Če ima matrika $A(G)$ lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, potem ima matrika $L(G)$ lastne vrednosti $d - \lambda_1, d - \lambda_2, \dots, d - \lambda_p$.*

Dokaz.

1. Če identično matriko I_p pomnožimo s skalarjem d, dobimo matriko

$$dI_p = \begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}$$

in izraz $dI_p - A(G)$ je potem enak

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -a_{12} & \dots & -a_{1p} \\ -a_{21} & d & \dots & -a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{p1} & a_{p2} & \dots & d \end{bmatrix}.$$

Vrednosti na diagonali matrika $dI_p - A(G)$ so enake d, kar je ravno stopnja vozlišča v_i. Vse ostale vrednosti a_{ij}, za katere $i \neq j$, so enake nasprotnim vrednostim elementov matrike $A(G)$, torej je razlika matrik $dI_p - A(G)$ ravno Laplaceova matrika $L(G)$ grafa G.

2. Naj bosta λ_i lastna vrednost in v_i lastni vektor matrike $A(G)$. Vemo, da velja $\lambda_i v_i = A(G)v_i$ in $L(G) = dI_p - A(G)$, iz česar sledi

$$\begin{aligned} L(G)v_i &= (dI_p - A(G))v_i \\ &= dv_i - A(G)v_i \\ &= (d - \lambda_i)v_i. \end{aligned}$$

Potem je $d - \lambda_i$ lastna vrednost in v_i lasten vektor matrike $L(G)$, kar zaključuje dokaz. □

Definicija 8. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $M(G)$ njegova incidenčna matrika.* ***Reducirana incidenčna matrika*** *$M_0(G)$ je matrika $M(G)$, ki ji odstranimo zadnjo vrstico.*

Lema 10. *Naj bo G povezan graf s p vozlišči in q povezavami in naj bo S podmnožica $p - 1$ povezav. Potem je*

$$\det M_0[S] = \begin{cases} \pm 1, & \textit{če povezave v } S \textit{ tvorijo vpeto drevo in} \\ 0, & \textit{če povezave v } S \textit{ ne tvorijo vpetega drevesa,} \end{cases}$$

kjer $M_0[S]$ označuje matriko M_0, v kateri obdržimo le stolpce, ki ustrezajo povezavam iz S.

Dokaz. Naj bo M incidenčna matrika grafa G in naj bo $e_k \in E$ neka povezava, ki ima v_p za eno izmed krajišč. Naj bo $M_0[S]$ matrika, katere množica povezav S tvori vpeto drevo T.krajišče Vemo, da elementi m_{ij} matrike $M_0[S]$ zavzemajo vrednosti ± 1, če predstavljajo konce oziroma začetke povezav v S, ali 0, če ne tvorijo nobene povezave.

Matriki $M_0[S]$ odstranimo stolpec, ki ustreza povezavi e_k, ter vrstico, ki ustreza drugemu krajišču povezave e_k in dobimo matriko $M_0'[S] \in \mathbb{R}^{(p-2)\times(p-2)}$. Determinanto matrike $M_0[S]$ izračunamo z razvojem po stolpcu. Vse vrednosti v vrstici in stolpcu, ki smo ju odstranili, razen tiste, ki določa začetek oziroma konec povezave e, so enake 0, zato velja enakost

$$\det M_0[S] = \pm \det M_0'[S].$$

Ko matriki $M_0[S]$ odstranimo stolpec in vrstico, odstranimo povezavo e_k in združimo vozlišči, ki ju e_k povezuje, ter tako dobimo drevo T'. Potem lahko z indukcijo dokažemo, da je $\det M_0' = \pm 1$, iz česar res sledi $\det M_0[S] = \pm 1$.

Obravnavajmo še primer, ko množica povezav S ne tvori vpetega drevesa. Po lemi 2(c) ta množica vsebuje usmerjene povezave $e_1, \dots, e_r$, ki tvorijo cikel. Naj bo $v = [v_1, \dots, v_{p-1}]$ neničelni vektor, definiran z

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{če med obhodom cikla prepotujemo povezavo } e_i \text{ v smeri njene usmeritve,} \\ -1, & \text{če med obhodom cikla prepotujemo povezavo } e_i \text{ v nasprotni smeri,} \\ 0, & \text{če povezave } e_i \text{ ne prepotujemo.} \end{cases}$$

Opazimo, da dobimo

$$M_0[S] \cdot v = 0.$$

Vektor v tukaj ne more biti ničelni vektor, saj mora cikel, katerega prepotujemo imeti vsaj tri povezave, iz česar po lemi 6 sledi

$$\det M_0[S] = 0.$$

$\square$

V dokazu smo videli, da je determinanta matrike $M_0[S]$ neodvisna od izbire orientacije povezav v G. V nadaljevanju bomo uporabljali incidenčno matriko zgolj v kontekstu njene determinante, ki je sedaj dobro definirana. Sedaj lahko dokažemo Kirchhoffov izrek, ki nam pove število vpetih dreves na grafu. Dokaze nekaterih lem in posledic, ki jih bomo zaradi njihove malovažnosti izpustili, lahko bralec poišče v [3].

Izrek 2 (Kirchhoffov izrek)**.** *Naj bo G povezan graf in naj bo L njegova Laplaceova matrika. Z L_0 označimo Laplaceovo matriko L, ki smo ji vzeli zadnji stolpec in zadnjo vrstico. Potem je število vpetih dreves na grafu G enako*

$$\kappa(G) = \det L_0.$$

Dokaz. Po lemi 8 je $L = MM^T$, iz česar sledi $L_0 = M_0 M_0^T$. Determinanto matrike L_0 lahko potem izračunamo s pomočjo Cauchy-Binetove formule in lastnosti 3(a) ter dobimo

$$\begin{aligned}\det L_0 &= \sum_{\substack{|S|=p-1 \\ S\subseteq\{1,2,\ldots,q\}}} (\det M_0[S])(\det M_0^T[S]) \\ &= \sum_{\substack{|S|=p-1 \\ S\subseteq\{1,2,\ldots,q\}}} (\det M_0[S])^2.\end{aligned}$$

Zaradi leme 10 je $\det M_0[S] = \pm 1$, kadar povezave v S tvorijo vpeto drevo, oziroma je $\det M_0[S] = 0$, če povezave ne tvorijo vpetega drevesa. Sledi, da je v primeru, da povezave v S tvorijo vpeto drevo, $(\det M_0[S])^2 = 1$, in v nasprotnem primeru $(\det M_0[S])^2 = 0$, torej je res $\kappa(G) = \det L_0$. $\square$

4.1 Število vpetih dreves na hiperkocki H_n

S pomočjo Kirchhoffovega izreka lahko potem rešimo začetni problem in izračunamo število vpetih dreves na hiperkocki H_n. Vemo, da je število vpetih dreves na grafu G enako $\kappa(G) = \det L_0$. Izkaže se, da lahko s pomočjo naslednje leme izrek poenostavimo tako, da za izračun števila vpetih dreves potrebujemo zgolj lastne vrednosti grafu prirejene sosednostne ali Laplaceove matrike.

Lema 11. *Naj bo $L \in \mathbb{R}^{p\times p}$ matrika, v kateri je vsota po vrsticah in stolpcih enaka 0 in L_0 matrika, ki nastane, če matriki L odstranimo zadnji stolpec in vrstico. Potem je koeficient pred t v karakterističnem polinomu $\det(tI - L)$ enak*

$$(-1)^{p-1} p \det L_0.$$

Dokaz. Naj bo $L \in \mathbb{R}^{p\times p}$ takšna matrika, da je vsota po vsaki vrstici in stolpcu v njej enaka 0. Izraz $tI - L$ je potem enak

$$tI - L = \begin{bmatrix} t - l_{11} & -l_{12} & \ldots & -l_{1p} \\ -l_{21} & t - l_{22} & \ldots & -l_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{p1} & -l_{p2} & \ldots & t - l_{pp} \end{bmatrix}.$$

Če k zadnji vrstici matrike $tI - L$ prištejemo ostale vrstice te matrike, bodo vse vrednosti v njeni zadnji vrstici enake t, saj je vsota po stolpcu v L enaka 0. Nato iz zadnje vrstice izpostavimo t in novo matriko označimo z $N(t)$. Ker prištevanje vrstic ne spremeni determinante matrike (lema 3(g)), je

$$\det(tI - L) = t \det N(t)$$

in koeficient pred t polinoma $\det(tI - L)$ je enak $\det N(0)$.

Potem k zadnjemu stolpcu matrike $N(0)$ prištejemo vse ostale stolpce. Opazimo, da so vrednosti v zadnjem stolpcu enake 0, razen zadnje, ki je enaka p. Če zdaj z razvojem po zadnjem stolpcu izračunamo determinanto te matrike, po lemi 3(f) dobimo

$$\det N(0) = p\det(-L_0) = p(-1)^{p-1}\det L_0,$$

iz česar sledi, da je koeficient enak $(-1)^{p-1}p\det L_0$. □

Posledica 1.

(a) Naj bo G povezan graf s p vozlišči, in naj bodo lastne vrednosti matrike $L(G)$ enake $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, da velja $\mu_p = 0$.[1] *Potem je*

$$\kappa(G) = \frac{1}{p}\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}.$$

(b) Naj bo G d-regularen graf in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, kjer je $\lambda_p = d$, lastne vrednosti matrike $A(G)$. Potem velja

$$\kappa(G) = \frac{1}{p}(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)\cdots(d-\lambda_{p-1}).$$

Ker je hiperkocka n-regularen graf, potrebujemo za izračun števila njej vpetih dreves zgolj lastne vrednosti njene sosednostne matrike, kar imenujemo **spekter** grafa. Računanja lastnih vrednosti kocke H_3 se lahko bralec loti sam, v splošnem pa bomo za izračun spektra hiperkocke potrebovali naslednjo lemo, ki je pa ne bomo dokazali.

Lema 12. *Naj bosta G in H grafa s sosednostnima matrikama $A(G)$ in $A(H)$. Če imata matriki $A(G)$ in $A(H)$ zaporedoma lastne vrednosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ter $\beta_1, \ldots, \beta_n$, ima matrika $A(G \times H)$ mn lastnih vrednosti oblike*

$$\{\alpha_i + \beta_j \mid i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ in } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Hiperkocka H_n je enaka kartezičnemu produktu

$$H_n = \underbrace{P_2 \times \cdots \times P_2}_{\text{n-krat}},$$

pri čemer je P_2 pot z dvema vozliščema, katere sosednostna matrika ima lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Iz tega sledi, da ima H_n natanko 2^n lastnih vrednosti tipa $2i$, kjer je $i \in \{-n, \ldots, n\}$ in se vsaka pojavi $\binom{n}{i}$-krat. Če to vstavimo v enačbo iz posledice 1(b), dobimo

$$\begin{aligned}\kappa(H_n) &= \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{2^n}(n-\lambda_i)\\ &= \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(2i)^{\binom{n}{i}}\\ &= 2^{2^n-n-1}\prod_{i=1}^{n} i^{\binom{n}{i}}\end{aligned}$$

in s tem tudi število vpetih dreves poljubne hiperkocke H_n.

Če se vrnemo k prvotnemu problemu pa ugotovimo, da je število vpetih dreves v kocki enako 384. Za konec pa v tabeli 2 navedimo še nekaj vrednosti za majhne n.

5 Zaključek

Prvoten kombinatorični problem štetja sistemov rovov asterokubida smo prevedli na problem štetja vpetih dreves v kocki. S pomočjo Kirchoffovega izreka smo ta problem rešili za splošen povezan graf ob predpostavki, da poznamo lastne vrednosti njegove Laplaceove matrike oz. njegov spekter, če gre za d-regularen graf. Tega smo za hiperkocko tudi izračunali in ugotovili, da se bodo MaRSovci pošteno namučili z evalvacijo vseh 384 možnih sistemov rovov asterokubida.

[1] Bralec se lahko prepriča, zakaj ima matrika $L(G)$, kjer je vsota po vrsticah 0, zmeraj lastno vrednost $\mu_p = 0$. Podobno velja za matriko $A(G)$, kjer imamo, da je vsota po vrsticah d, kar nam zagotavlja lastno vrednost $\lambda_p = d$.

n	$\kappa(H_n)$
1	1
2	4
3	384
4	42467328
5	$\sim 2.08 \times 10^{19}$

Tabela 2: Število vpetih dreves v hiperkocki H_n za $n \leq 5$.

Literatura

[1] Artin, M. (2011). Algebra. Addison-Wesley Longman.

[2] Juvan, M., Potočnik, P. (2000). Teorija grafov in kombinatorika: primeri in rešene naloge.

[3] Stanley, R. P. (2011). Enumerative combinatorics: Cambridge University Press.