Domneve

Blaž Peter Brunšek, Jure Kreže, Val Sajko
Mentor: Jan Genc

Povzetek

Skupina človeških raziskovalcev se je zaradi nesreče z raketo zbudila na neznanem planetu. Sumijo, da je Mars, vendar niso prepričani. Kako lahko uporabijo svoje znanje statistike, da ugotovijo, če so na Marsu ali ne?

1 Uvod

Blaise Pascal, John Conway, Jurij Vega in Viktor Vagner so bili na potovanju z raketo po vesolju. Žal je raketo izdelalo podjetje Boeing in so bili zelo skopi. Približno 400.000 kilometrov stran od Zemlje je zaradi neplačanih programerjev detektor prenehal delovati. Vsi so vdihnili poseben plin, ki ga je izumil Jakob Bernoulli za potnike, ki jim je zmanjkalo hrane, in zaspali za neznano število ur.

Ko so se zbudili, so se znašli na neznanem planetu v nepremikajoči se raketi. Sistem za avtopilot je deloval, vendar se je med pristankom toliko opreme pokvarilo, da navigacija ni delovala. Vedeli niso niti ne, koliko časa so spali. Niso mogli ugibati, kaj je bila njihova razdalja od doma.

»Aja!« je vzkliknil Conway, ki se je že parkrat potepal po vesolju, »sumim, da smo na Marsu... Veliko Marsovcev vidim in okolica mi izgleda znana.«

Pascal, ki nikoli ni rad tvegal, mu je odgovoril: »To bi bilo treba preveriti. Moramo nekoga vprašati ali analizirati prst. Če smo na Marsu, bomo veliko lažje prišli nazaj domov, sicer imamo pred nami veliko dela.«

Nekaj časa so hodili naokrog in opazovali okolico. Našli so se v Marsovski metropoli, Škofji Loki, in se sprehajali po trgovinah. Trgovci niso govorili znanega jezika.

»Nemogoče,« doda Vagner, ki je tako zelo dolgo čakal na odgovor, ker so njegove kognitivne sposobnosti linearno padale med urami slabega spanca in je bil precej mentalno omejen, »ne govorijo slovenščine in naša orodja za analizo so pokvarjena. Nekako drugače moramo ugotoviti, kje smo.«

Vsi so rahlo paničarili, vendar so po dolgem sprehodu okrog Škofje Loke približno vrnili svoje kognitivne sposobnosti na 10 %. Zaradi izboljšane kognicije se je Vega spomnil, da ima sumljivo obsežno znanje nezemljanske zakonodaje po celotni Rimski cesti, in razglasil: »Aha! Marsovci so zelo slavno ksenofobični! Ne dopuščajo več kot 20 % populacije nemarsovcev. Lahko bi jih anketirali in ugotovili, če je več kot 20 % nemarsovcev!«

Vsi so se, kljub sumu nezakonitih poslov z nezemljani s strani Vega, strinjali in začeli sestavljati anketo.

Ta trenutek se je Pascal spomnil, da Marsovci vidijo najbolje od vseh vrst v vesolju, in tako za njih pripravil pregled vida.

Pascal je hodil po Celju, ki je rdéč, vendar je barva pretirano izgovorjena (vsi vedno vlečejo é, ko jo izgovorijo), in anketiral prebivalce. Uspešno je anketiral 1000 prebivalcev, preden so mu prepovedali nadaljnje delovanje, in se vrnil k raketi.

Ko je Pascal našel svoje prijatelje, jim je sporočil žalostne novice: »Žal je 23% nemarsovcev. Ne vem, kje smo.« Vagner, ki je nekaj časa spal in je imel boljše kognitivne sposobnosti kot ostali, je komentiral: »To ni nujno. Statistično bi lahko vseeno samo imel slab vzorec. Moramo izračunati, kolikšna je verjetnost, da smo na Marsu!«

Vsi so bili zelo zadovoljeni z njegovim predlogom in začeli razmišljati. Problem je, da so se spomnili le najbolj osnovnih konceptov v statistiki in verjetnosti. Na srečo so eni najpametnejših ljudi v zgodovini, zato so se odločili, da bodo izpeljali to, kar lahko z uporabo logike. Sčasoma so se njihove kognitivne sposobnosti vračale in so prišli do rešitve. Tedaj je vprašanje, ali so lahko prepričani, če so na Marsu?

2 Neodvisnost dogodkov

Neodvisnost je v verjetnostnem računu in stohastiki odnos med dvema dogodkoma. Dogodka sta neodvisna, če pojav prvega ne povzroči večje verjetnosti nastopa drugega dogodka. Oziroma če pojav enega dogodka ne vpliva na izid drugega in obratno. Velja torej naslednja definicija:

Definicija 1. *Dogodek A je neodvisen od B, če je $P(A|B) = P(A)$.*

Definicija 2. *Dogodka A in B sta neodvisna, če zanju velja*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definirajmo sedaj neodvisnost poljubnega končnega števila dogodkov.

Definicija 3. *Dogodki $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ so neodvisni, če je*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in za poljubna naravna števila

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n.$$

Posplošimo še definicijo na neskončno množico dogodkov oblike $\{A_1,\ A_2,\ \ldots\}$.

Definicija 4. *Dogodki $A_1,\ A_2, \ldots$ so neodvisni, če je njihova poljubna končna podmnožica neodvisna.*

Zgled 1. *Vržemo 5 standardnih kock. Kolikšna je verjetnost, da pri vsaj eni pade šestica? To nalogo rešimo z osnovnim izrekom o kombinatoriki in definicijo verjetnosti. Po definiciji neodvisnosti dogodkov lahko izračunamo nasprotni dogodek, da šestica ne pade, in njegova verjetnost je*

$$P(A) = \frac{5^5}{6^5}.$$

Če verjetnost tega dogodka odštejemo od 1, dobimo verjetnost želenega dogodka

$$P(B) = 1 - \frac{5^5}{6^5}.$$

Ker so meti kock neodvisni, lahko verjetnost nasprotnega dogodka izračunamo tudi kot produkt petih verjetnosti, da na eni kocki ne pade šestica, torej

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Opazimo torej, da si lahko računanje verjetnosti večih sočasnih neodvisnih dogodkov preoblikujemo v računanje posamičnih verjetnosti, kar je ponavadi lažje rešiti.

3 Slučajne spremenljivke

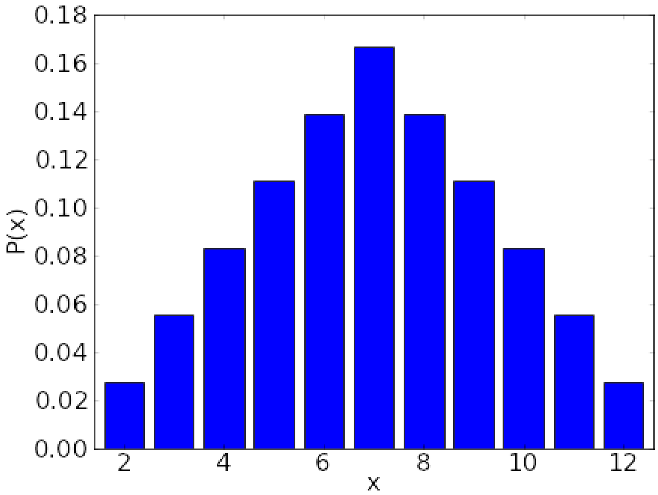
Poglejmo si zelo neformalno definicijo slučajnih spremenljivk.

Definicija 5. *Slučajne spremenljivke so števila, ki naključno nastanejo pri izvajanju poskusa.*

Sicer slučajnih spremenljivk formalno ne bomo definirali, jih bomo pa razložili s primerom.

Zgled 2. *Zamislimo si, da izvajamo poskus, v katerem večkrat vržemo dve igralni kocki. Primer slučajne spremenljivke je številska vrednost, ki bi jo lahko opazovali - na primer vsota pik na igralnih kockah ob posameznem metu.*

Za boljšo predstavo o naravi poskusa si lahko pomagamo s histogramom - grafom porazdelitve verjetnosti izidov za posamezne vrednosti slučajne spremenljivke.



Slika 1: Histogram porazdelitve verjetnosti za posamezen izid poskusa. Na vodoravni osi so vrednosti naše slučajne spremenljivke označene z X (vsota pik na igralnih kockah), na navpični pa verjetnost izida.

Še en od znanih primerov porazdelitve slučajne spremenljivke je Bernoullijeva porazdelitev.

Definicija 6. *Če ima neka slučajna spremenljivka X naslednjo porazdelitev*

- *zavzame vrednost 1 z verjetnostjo p,*
- *zavzame vrednost 0 z verjetnostjo $1 - p$,*

*potem pravimo, da ima X **Bernoullijevo porazdelitev**, kar zapišemo kot*

$$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p).$$

Primer poskusa in slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena Bernoullijevo, je lahko število padlih grbov po nekaj metih kovanca. Izbrana slučajna spremenljivka lahko namreč zavzame vrednost 1 z verjetnostjo $0,5$ (če pade grb) in vrednost 0 z verjetnostjo $0,5$ (če ne pade grb). V tem primeru je kovanec pošten, lahko pa bi imeli verjetnost $0,3$, da pade grb, in verjetnost $0,7$, da ne pade grb.

3.1 Zvezne porazdelitve

Porazdelitev se razlikuje od prejšnjih v primeru, da izidi slučajne spremenljivke zavzamejo nek interval. Definicija je naslednja.

Definicija 7. *Slučajna spremenljivka X ima* **zvezno porazdelitev***, če obstaja nenegativna funkcija $f_X\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, tako da je*

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

Tej funkciji pravimo **gostota slučajne spremenljivke***.*

Opazimo, da bo X res porazdelitev, ko velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1.$$

Verjetnost, da zvezna slučajna spremenljivka zavzame vrednost na danem intervalu, je po definiciji določenega integrala enaka kar ploščini pod grafom funkcije gostote na podanem intervalu. Sedaj si bomo ogledali posebne primere zveznih porazdelitev, ki bodo uporabni kasneje v članku.

3.1.1 Normalna porazdelitev

Definicija 8. *Rečemo, da ima X* ***normalno porazdelitev*** *s parametroma μ in $\sigma^2 > 0$, če je njena gostota*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

To označimo kot $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Opazimo, da je funkcija gostote te funkcije simetrična glede na os $x = \mu$, saj velja $f_X(\mu-t) = f_X(\mu+t)$. Izkaže se tudi, da je število σ enako razdalji med μ in točkama prevoja grafa funkcije gostote.

Normalna porazdelitev je odvisna od dveh parametrov: μ in σ, vendar kasneje bomo opazili, da si lahko računanje s poljubno normalno porazdelitvijo preoblikujemo s pomočjo preprostih relacij, ki veljajo med normalnimi porazdelitvami. V naslednjem razdelku definiramo posebno različico normalne porazdelitve. Na njo se bomo v nadaljevanju večkrat navezali. S pomočjo povezav med normalnimi porazdelitvami bomo uspeli računanje s poljubno normalno porazdelitvijo preoblikovati v računanje s to različico, saj zanjo poznamo zanesljive hitre metode zelo natančnih izračunov.

3.1.2 Standardizirana normalna porazdelitev

Če za parametra normalne porazdelitve vzamemo kar $\mu = 0$ in $\sigma = 1$, dobimo naslednjo porazdelitev.

Definicija 9. *Normalna porazdelitev je* ***standardizirana****, če velja*

$$Z \sim N(0, 1).$$

3.1.3 Porazdelitvena funkcija

Definicija 10. ***Porazdelitvena funkcija*** *$F_X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ je definirana z naslednjim predpisom*

$$F_X(x) := P(X \leqslant x).$$

Torej porazdelitvena funkcija je funkcija porazdelitve slučajne spremenljivke X, ki nam pove verjetnost, da je vrednost slučajne spremenljivke manjša ali enaka argumentu x. Izračuna se z naslednjim integralom

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx.$$

3.1.4 Funkcija Φ

Definicija 11. *Za standardizirano normalno porazdelitev*

$$Z \sim N(0,1)$$

je porazdelitvena funkcija označena z naslednjim zapisom

$$F_Z(x) = \Phi(x).$$

Velja torej

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Zapišimo trditev, ki nam bo pomagala v nadaljevanju.

Trditev 1. *Verjetnost, da vrednost slučajne spremenljivke $Z \sim N(0,1)$ leži na intervalu (a,b), lahko izračunamo kot*

$$P(Z \in (a,b)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Dokaz. Verjetnost, da vrednost slučajne spremenljivke Z leži na intervalu (a,b), je po definiciji

$$P(Z \in (a,b)) = \int_a^b f_Z(x)\, dx.$$

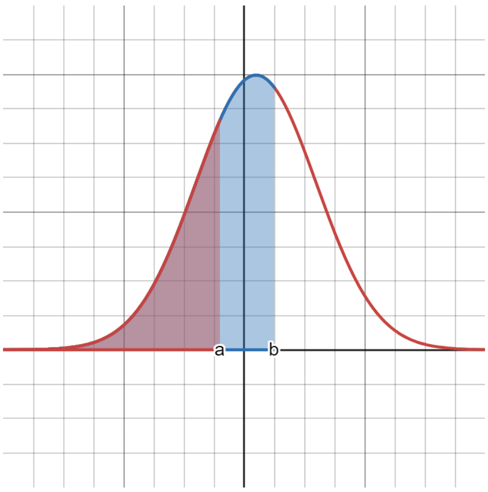
Ta integral se da razbiti na dva z upoštevanjem pravil o spremembi mej pri seštevanju oz. odštevanju integralov

$$\int_a^b f_Z(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f_Z(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_Z(x)\, dx.$$

V tej enačbi sta integrala na desni strani po definiciji enaka $\Phi(b)$ in $\Phi(a)$, torej se lahko enačba zapiše kot

$$P(Z \in (a,b)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□



Slika 2: Izračun vrednosti slučajne spremenljivke na intervalu.

Izrek 1. *Velja enakost*

$$\Phi(\infty) = 1.$$

Ker funkcijskih vrednosti funkcije Φ ne moremo na hitro računati na pamet, se ponavadi računa z njo z uporabo preglednice, na kateri so označeni pari argumentov in vrednosti funkcije Φ.

Standard Normal Probabilities

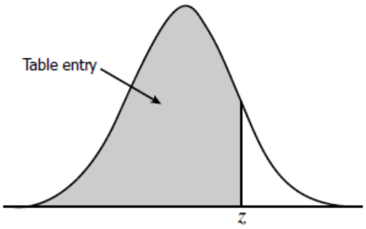


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177

Slika 3: Tabela vrednosti funkcije Φ.

3.2 Povezava med normalnimi porazdelitvami

Kljub temu da so morda različne normalne spremeljivke normalne, so njihove normalne krivulje postavljene na različnih mestih na abscisni osi in so bolj ali manj sploščene. Te krivulje je najbolje pretvoriti v standardizirano normalno porazdelitev, za katero poznamo razpredelnico vrednosti.

Pri tem si lahko pomagamo s sledečima izrekoma.

Izrek 2. *Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki ter velja, da je $X \sim N(a, b^2)$ in $Y \sim N(c, d^2)$, je*

$$X + Y \sim N(a + c, b^2 + d^2).$$

Izrek 3. *Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ slučajna spremenljivka, potem velja*

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Dokaz. Označimo $Y = aX + b$. Opazimo s pomočjo preurejanja neenačbe v argumentu, da je

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX + b \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Ker je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx,$$

velja po osnovnem izreku analize $F'_X(x) = f_X(x)$. Zato lahko izračunamo

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F'_Y(y) &= \\ &= F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \\ &= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

$\square$

Oglejmo si uporabo teh izrekov na dveh zgledih.

Zgled 3. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, za kateri velja, da je $X \sim N(0,1)$ in $Y = aX + b$. Izračunajmo verjetnost $P(Y \leqslant t)$.*

$$P(Y \leqslant t) = P(aX + b \leqslant t) = P\left(X \leqslant \frac{t-b}{a}\right) = \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Torej v splošnem bo veljalo, da lahko povežemo poljubno normalno porazdelitev s standardizirano normalno porazdelitvijo, kot vidimo v zgledu 3.

Zgled 4. *Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ slučajna spremenljivka. Izračunajmo a in b tako, da bo $aX+b \sim N(0,1)$. Dokazali smo že, da velja*

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) = N(0,1).$$

Enačimo argumente:

$$\begin{aligned} a\mu + b &= 0, \\ a^2\sigma^2 &= 1 \end{aligned}$$

in iz dobljenih enačb izpostavimo parametra a in b.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sigma} \\ b &= -\frac{\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

S tema enačbama lahko poljubno normalno porazdelitev pretvorimo v standardizirano normalno.

3.3 Pričakovana vrednost

Razložimo motivacijo za vpeljavo pričakovane vrednosti na zgledu. Zamislimo si, da igramo igro na srečo. Pri tej igri imamo na mizi 5 ploščic označenih z 1, ploščico označeno z 2, ploščico označeno s 3, ploščico označeno z D (dvojno) in 4 ploščice označene s S (stop). Skupno torej 12 ploščic. Na začetku jih obrnemo in premešamo. Igralec ploščice obrača od leve proti desni, dokler ne naleti na ploščico označeno s S. Ob koncu igre dobi izplačilo, ki je enako vsoti števil, ki jih vidimo na mizi. Če je med ploščicami, ki jih lahko vidimo, ploščica z oznako D, je izplačilo enako dvakratniku vsote števil, ki jih vidimo.

Smiselno bi se bilo vprašati, koliko bi bili pripravljeni plačati za igranje te igre, da bi lahko tudi ocenili, če je takšno igro smiselno večkrat igrati (če želimo imeti dobitek). Zanima nas torej pričakovano izplačilo igre oziroma pričakovana vrednost tega poskusa.

Izračunamo lahko povprečje izplačila za čim večje število odigranih iger, ki bi ustrezalo največjemu smiselnemu plačilu. Naj slučajna spremenljivka X označuje vsoto vidnih številk na mizi, ki določa izplačilo ob igri. Denimo, da lahko dobimo n različnih izplačil x_1, x_2, ..., x_n, potem bi plačali

$$\frac{x_1 \cdot (\text{št. ponovitev } x_1) + x_2 \cdot (\text{št. ponovitev } x_2) + \ldots + x_n \cdot (\text{št. ponovitev } x_n)}{\text{št. ponovitev poskusa}},$$

to pa lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \frac{\text{št. ponovitev } x_1}{m} + \cdots + x_n \cdot \frac{\text{št. ponovitev } x_n}{m} &= \\ = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n), \end{aligned}$$

kjer smo z m označili število ponovitev poskusa. To nas motivira, da definiramo pričakovano vrednost.

Definicija 12. *Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v_1, v_2, ..., v_n. Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X je*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot P(X = v_i).$$

Definicija 13. *Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v_1, v_2, ... Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X je*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cdot P(X = v_i).$$

Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena zvezno, uporabimo naslednjo definicijo.

Definicija 14. *Če je X zvezna slučajna spremenljivka, je pričakovana vrednost spremenljivke X*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot f_X(v)\, dv.$$

Sedaj bomo določili pričakovano vrednost za nas najpomembnejših dveh porazdelitev.

Trditev 2. *Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena* Bernoulli(p)*, je enaka $E(X) = p$.*

Dokaz. Naj bo

$$X \sim \text{Bernoulli}(p).$$

Dokaza se lahko lotimo z zgornjo formulo za izračun pričakovane vrednosti. Upoštevamo tudi, da pri Bernoullijevi porazdelitvi nastopa vrednost 1 z verjetnostjo p in vrednost 0 z verjetnostjo $1 - p$

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p)$$

in dobimo

$$E(X) = p.$$

□

Trditev 3. *Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke, ki ima porazdelitev $N(\mu, \sigma^2)$, je enaka μ.*

Dokaz. Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena normalno. Gre za zvezno porazdelitev, torej uporabimo definicijo pričakovane vrednosti zvezne slučajne spremenljivke

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot f_X\, dv.$$

V našem primeru torej računamo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot v\, dv.$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot v\, dv = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot v\, dv = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot (v - \mu)\, dv + \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dv \right)
\end{aligned}$$

Na tej točki za lažje računanje levega integrala določimo $-(v - \mu)^2 = m$ kot novo spremenljivko. Desni integral lahko pomnožimo (novo spremenljivko uvedemo le za računanje levega integrala) z ulomkom pred oklepajem in iz njega izpostavimo konstanto μ ter ga preoblikujemo v

$$\mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dv.$$

Tu lahko opazimo, da integriramo porazdelitveno funkcijo (v našem primeru normalno porazdelitveno funkcijo) po celotni realni osi, kar pa je po definiciji enako 1. Vrednost desnega integrala pomnoženega z ulomkom pred oklepajem je torej kar $\mu \cdot 1 = \mu$.

Po uvedbi nove spremenljivke pa se levi integral preoblikuje v določen integral, ki ima za spodnjo mejo

$$\lim_{v \to -\infty} -(v-\mu)^2 = -\infty,$$

za zgornjo mejo pa prav tako

$$\lim_{v \to \infty} -(v-\mu)^2 = -\infty.$$

Integral na levi je torej določen integral z isto spodnjo in zgornjo mejo in je zato enak 0. Sedaj lahko vidimo, da je pričakovana vrednost normalno porazdeljene slučajne spremenljivke enaka

$$E(X) = 0 + \mu = \mu.$$

□

Poglejmo, kako na zgledu izračunati pričakovano vrednost. Zanimiv in praktičen primer je uporaba teoretične različice sodobne pečice, katere ideja je bila zasnovana prav na Marsu.

Zgled 5. *Pečica začne ob koncu peke piskati in iz praktičnih razlogov jo je možno ugasniti samo s pritiskom na gumb, kadar je število piskov enako* 2^n*, kjer je* $n \in \mathbb{N}_0$*, torej kadar je število piskov enako* $1, 2, 4, 8, \ldots$ *Iz drugih praktičnih razlogov pa se z vsakim pritiskom na ta gumb pečica ugasne z verjetnostjo* $p = 0,5$*. Zanima nas, kolikokrat bomo najverjetneje pritisnili na gumb, da se bo pečica ugasnila.*

Označimo slučajno spremenljivko - število vseh piskov pečice - kot X*. Opazimo, da je verjetnost, da pečico ugasnemo po številu sekund, ki ni potenca števila* 2*, enaka* 0*. Uporabimo formulo za izračun pričakovane vrednosti*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(X=i) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2},$$

vendar ta vsota pa očitno nima končne vrednosti, zato sklepamo, da se pečica nikoli ne izključi.

3.4 Varianca

Definirajmo še eno količino, ki bo koristna za poglavje, ki sledi:

Definicija 15. Varianca *slučajne spremenljivke* X *je*

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Poglejmo si dva primera varianc. Najprej za Bernoullijevo porazdelitev.

Izrek 4. *Če je* X *slučajna spremenljivka, za katero velja* $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$*, je* $\mathrm{var}(X) = p(1-p)$*.*

Dokaz. Najprej opazimo, da velja

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - p^2,$$

Za slučajno spremenljivko X^2 velja

$$X^2 = \begin{cases} 1^2, & \text{z verjetnostjo } p, \\ 0^2, & \text{z verjetnostjo } 1-p. \end{cases}$$

Torej je porazdelitev X^2 enaka porazdelitvi X. Iz tega sledi $E(X^2) = p$ oz.

$$\mathrm{var}(X) = p - p^2.$$

□

Druga pomembna varianca, ki jo bomo omenili, je varianca normalne porazdelitve. To bomo le navedli brez dokaza.

Izrek 5. *Če je* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *slučajna spremenljivka, potem velja* $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$*.*

4 Centralni limitni izrek

V tem poglavju se bo pokazala uporabna vrednost variance in pričakovane vrednosti. V ta namen navedimo naslednji izrek.

Izrek 6. ***Centralni limitni izrek*** *Naj bodo* $X_1, X_2, \dots$ *neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke, za katere velja* $E(X_i) = \mu$ *in* $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$*. Za dovolj velike* n *velja*

$$X_1 + \cdots + X_n \overset{\cdot}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2),$$

kjer $\overset{\cdot}{\sim}$ *predstavlja približno porazdelitev.*

Ta izrek nam pove, da se porazdelitev vsote slučajnih spremenljivk, ki so neodvisne in enako porazdeljene in za katere velja $E(X_i) = \mu$ in $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$ približuje normalni porazdelitvi. Izrek je bolj natančen, ko se povečuje število slučajnih spremenljivk, ki jih seštevamo. Pri tem je X_i i-ta slučajna spremenljivka. Centralni limitni izrek se pogosto uporablja skupaj s standardizacijo na naslednji način.

Trditev 4. *Naj bo*

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$

in naj bosta a *in* b *taki realni števili, da velja*

$$aS_n + b \overset{\cdot}{\sim} N(0, 1).$$

Tedaj velja

$$P(S_n \in (a, b)) = \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Dokaz. Centralni limitni izrek nam pove, da ima S_n porazdelitev

$$S_n \overset{\cdot}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2).$$

S pomočjo zgleda 4 lahko najdemo taki števili c in d, da velja $cS_n + d \overset{\cdot}{\sim} N(0, 1)$. To sta

$$c = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \text{in} \qquad d = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma}.$$

Tedaj velja porazdelitev

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (X_1 + \cdots + X_n) - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} \overset{\cdot}{\sim} N(0, 1),$$

ki jo postavimo na skupni imenovalec in dobimo

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\cdot}{\sim} N(0, 1).$$

Po tem preoblikovanju velja, da je verjetnost enaka

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

□

4.1 Domneve

Za rešitev začetnega problema bomo morali spoznati še nekaj osnov statistike. Poglejmo si, kaj so domneve. Zamislimo si, da z eksperimentom želimo določiti informacijo o nekem parametru (recimo parametru o porazdelitvi). Včasih imamo za ta parameter že kakšno idejo, recimo, da je kovanec pošten. To je **ničelna domneva** in jo označimo s H_0. Če je opazovanje eksperimenta preveč neskladno s H_0, H_0 **zavrnemo**, sicer pa rečemo, da **odstopanja niso statistično dovolj značilna (za zavrnitev)**. Negacijo H_0 označimo s H_1 in jo imenujemo **alternativna domneva**. Če H_0 zavrnemo, sprejmemo H_1. Domneve H_0 nikoli ne sprejmemo, saj bi morda v drugem vzorcu našli protiprimer (dovolj je en za zavrnitev). Torej če želimo sprejeti H_0, raje za ničelno domnevo postavimo H_1 in jo zavrnimo. Postopek odločitve se imenuje preizkus. Preizkus ustreza stopnji tveganja α, če

$$P(H_0 \text{ zavrnemo} \mid H_0 \text{ velja}) \leqslant \alpha.$$

Po tem sprejmemo končno odločitev, α pa si vnaprej določimo glede na to, kako majhno tveganje za napako pri našem končnem sklepu želimo (manjši α pomeni manjše tveganje). Na podlagi izbrane stopnje tveganja in zgornje neenačbe določimo območje intervala za naš parameter, kjer se zavrne H_0 in nastalemu območju rečemo **zavrnitveno območje**. Z drugimi besedami: če je vrednost slučajne spremenljivke po izvedenem preizkusu v zavrnitvenem območju, našo domnevo zavrnemo. Torej lahko določimo neko zavrnitveno območje oziroma interval, na primer (c, ∞). To bi pomenilo, da če je vrednost slučajne spremenljivke večja od c, našo domnevo zavrnemo.
Oglejmo si še verjetnost

$$P(H_0 \text{ zavrnemo} \mid H_1 \text{velja}) = 1 - \beta.$$

To število imenujemo **moč preizkusa**, vendar na podlagi njega ne določamo zavrnitvenega območja, a je vseeno dobro, da je čim višji. Nanj lahko gledamo kot na stranski produkt preizkusa.

5 Rešitev začetnega problema

Conway je predlagal, da so imeli dovolj izrekov in definicij za rešitev njihovega problema. Določil je, da so želeli biti vsaj 95 % prepričani, da so oz. niso na Marsu. Začel je svoj dokaz z določitvijo stopnje tveganja

$$\alpha = 0,05.$$

Njegova ničelna domneva H_0 je, da so na Marsu. Začel je z določevanjem slučajne spremenljivke

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{če } i\text{-ti anketiranec ni marsovec,} \\ 0, & \text{če } i\text{-ti anketiranec je marsovec.} \end{cases}$$

Ker ta slučajna spremenljivka zavzema le vrednosti 0 in 1, je Vega predlagal, da gre za Bernoullijevo porazdelitev. Tedaj je zapisal

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p).$$

Vagner je začel računati zavrnitveno območje. Vnaprej ve, da je oblike (c, ∞). S c smo označili največjo vrednost spremenljivke, za katero naše domneve še ne zavrnemo. Ravnamo se po neenačbi

$$P(H_0 \text{ zavrnejo} \mid H_0 \text{ je pravilna}) \leqslant \alpha.$$

Za pravilnost ničelne domneve določi, da je na Marsu 20 % nemarsovcev, saj je to mejna vrednost deleža nemarsovcev, določena z marsovsko zakonodajo, in bo račun veljaven tudi za vse druge možne pravilne vrednosti. To preoblikuje v

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{1000}}{1000} > c \mid H_0 \text{ je pravilen}\right) = \\ &= P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{1000}}{1000} > c \mid p = 0,2\right) = \\ &= P(X_1 + \cdots + X_{1000} > 1000c \mid p = 0,2) = \\ &= P(X_1 + \cdots + X_{1000} \in (1000c, \infty) \mid p = 0,2). \end{aligned}$$

Na tej točki je Pascal določil vrednosti za μ in σ z uporabo lastnosti Bernoullijeve distribucije in variance. Ugotovil je, da je $\mu = p$ in da je

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(X_i)} = \sqrt{p(1-p)} = \frac{2}{5}.$$

Sledil je izračun

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 + \cdots + X_{1000} \in (1000c, \infty) \mid p = 0,2) = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{1000c - 1000\mu}{\sigma\sqrt{1000}}\right) = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{1000c - 1000 \cdot 0,2}{\sqrt{1000} \cdot 0,4}\right).
\end{aligned}
$$

Pri tem so upoštevali, da je vrednost funkcije Φ na levi enaka 1, saj gre za vrednost integrala porazdelitvene funkcije po celotni realni osi. Conway ve, da enakost

$$P(X_1 + \cdots + X_{1000} \in (1000c, \infty) \mid p = 0,2) = \alpha$$

poišče ravno pravi c, saj bodo primeri stroge neenakosti dali manjša zavrnitvena območja (podmnožice pravega). Postavi in preoblikuje enačbo

$$
\begin{aligned}
1 - \Phi\left(\frac{1000c - 1000 \cdot 0,2}{\sqrt{1000} \cdot 0,4}\right) &= \alpha, \\
\Phi\left(\frac{1000c - 1000 \cdot 0,2}{\sqrt{1000} \cdot 0,4}\right) &= 0,95.
\end{aligned}
$$

Vega je pogledal na svojo tabelo z vrednostmi inverzne funkcije Φ, ki jo nosi povsod, saj je zelo poznana in uporabna v vsakdanjem življenju, ter našel vrednost argumenta za $\Phi(x) = 0,95$. Izvedel je, da mora veljati

$$\frac{1000c - 1000 \cdot 0,2}{\sqrt{1000} \cdot 0,4} = 1,64$$

oz. $c \approx 0,22$. Iz tega sledi, da je zavrnitveno območje približno interval $(0'22, \infty)$. Njihov eksperiment vrne vrednost $0,23 \in (0'22, \infty)$. Torej sklepajo, da niso na Marsu, saj morajo ničelno domnevo zavrniti.

Literatura

[1] John A. Rice: *Mathematical Statistics and Data Analysis*, tretja izdaja. Brooks/Cole, 2006