

Govorice v Marsovski vasi

Banachovo skrčitveno načelo

Jaka Horvat, Lovro Kastelic, Niko Pompe
Mentor: Nives Gošnjak



Povzetek

Pri našem projektu smo spoznali metrične prostore, v njih definirali zaporedja in si pogledali funkcijo skrčitve. Za njo smo dokazali Banachovo skrčitveno načelo in ga uporabili na primeru širjenja govoric med marsovci.

1 Uvod

Svoj projekt smo začeli z zgodenco naravnost iz marsovske vasice. V njej prebiva n marsovcev, med katere se je nekega dne razširila vroča govorica. Če bi vsi skupaj staknili glave bi ugotovili, da pravzaprav vsi skupaj poznajo celotno zgodbo, čeprav celote sam ne ve nihče. Zaradi same narave dogodka, pa se to seveda ni zgodilo in marsovci so raje čez dan opravljali, kot jim je to pač v navado, zvečer pa razmislili o vseh novih informacijah, ki so jih dobili.

Seveda ni prvič, da se je med te marsovce razširila taka novica, zato so v opravljanju dosti bolj utečeni kot navadni zemljani, in to delajo previdno. Vsak maršovec ima namreč načrt, od koga vse bo pridobil nove informacije čez dan, hkrati pa znajo tudi oceniti, koliko svojih informacij čez dan pozabijo. Da pa ne izpadejo kot največje čenče, si upajo na dan izvedeti le določen delček informacij od vsakega marsovca, zato pazijo, da se deleži vseh novopridobljenih informacij seštejejo v manj kot 1.

Za primer si pogledjmo marsovca Maksa, ki že vrsto let uporablja svojo formulo. Maks bo čez dan obiskal svoje 3 najboljše prijatelje: Maja, Marka in Mateja. Med pogovorom z njimi bo izvedel 20 % informacij, ki jih je zjutraj vedel Maj, 10 % informacij, ki jih je zjutraj vedel Mark in 5 % informacij, ki jih je zjutraj vedel Matej. Poleg tega bo čez dan nekaj svojega znanja pozabil in bo tako vedel 60 % tistih informacij, ki jih je sam vedel zjutraj. Vsi ti deleži se skupaj seštejejo v 95 % oziroma 0,95, kar je manj kot 1, torej je Maksova formula ustrezna. Neko tako verzijo svoje formule ima prav vsak maršovec iz te vasi in jo uporabi čisto vsak dan.

Nas pa zanima, kako učinkovit je ta sistem obrekovanja. Ali zaradi celotnega sisetma novica neprestano kroži ali se skupno znanje kdaj ustali? Kakšen vpliv (če sploh) ima razporeditev začetnega znanja med posamezne marsovce? Za odgovor na ta vprašanja pa smo se najprej morali poglobiti v teorijo metričnih prostorov in celoten problem prevesti v jezik matematike.

2 Metrični prostor

Definicija 1. Naj bo M neprazna množica na kateri definiramo funkcijo $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Tej funkciji pravimo **metrika ali razdalja** in za njo velja,

- $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$ za vsaka $x, y \in M$ (pozitivna definitnost),
- $d(x, y) = d(y, x)$ za vsaka $x, y \in M$ (simetričnost),
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za vsake $x, y, z \in M$ (trikotniška neenakost).

Par (M, d) imenujemo **metrični prostor**.

Poglejmo si nekaj primerov najbolj znanih metrik.

- **Evklidska metrika** je definirana v $\mathbb{R}^n$ ter je običajna razdalja izračunana s pomočjo Pitagorovega izreka.

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

- **Manhattanska razdalja** ali taksi razdalja je vsota absolutnih razlik v koordinatah, definirana je v $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

- **Maksimetrika** za razdaljo vzame največjo absolutno razliko komponent dveh vektorjev definiranih v $\mathbb{R}^n$.

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}$$

- **Diskretna metrika**

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

3 Zaporedja v Metričnih prostorih

Definicija 2. *Zaporedje v metričnem prostu (M, d) je preslikava $a : \mathbb{N} \rightarrow M$. Celotno zaporedje označimo z $\{a_n\}$, n -ti člen zaporedja pa je označen z $a(n)$ ali a_n .*

Definicija 3. *Točka $s \in M$ je **stekališče zaporedja** $\{a_n\}$, če vsaka njena okolica vsebuje neskočno členov zaporedja oz. če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neskončno indeksov $i \in \mathbb{N}$, tako da velja $d(a_i, s) < \varepsilon$.*

Definicija 4. *Zaporedje a_n **konvergira** proti $a \in M$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \geq N$ velja $d(a_n, a) < \varepsilon$. Točko a imenujemo **limita zaporedja** $\{a_n\}$ in označimo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. V tem primeru je a edino stekališče zaporedja $\{a_n\}$.*

Definicija 5 (Cauchyjev pogoj). *Zaporedje $\{a_n\}$ je **Cauchyjevo**, če so razlike med dovolj poznimi členi poljubno majhne oz. če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za vsaka $n, m \geq N$ velja $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

Izrek 1. *Če je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, potem je Cauchyjevo.*

Dokaz. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je vsak člen, z indeksom $i \geq N$ za manj kot ε oddaljen od $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Sedaj izberemo poljubna indeksa $m, n \geq N$. Iz pogoja za konvergentnost sledi

$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{in} \quad d(a_m, a) < \varepsilon.$$

Ker nas zanima razdalja med a_n in a_m si pomagamo s trikotniško neenakostjo in dobimo

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < 2\varepsilon.$$

□

Obratno ni nujno res, saj lahko v metričnem prostoru (M, d_2) , kjer je $M = (0, +\infty)$, izberemo zaporedje $\{a_n\}$, ki je podano s funkcijo $a_n = \frac{1}{n}$. To zaporedje je očitno Cauchyjevo, edini kandidat za limito tega zaporedja pa je število 0. Ker število 0 ni v naši množici M , to zaporedje v našem metričnem prostoru ne konvergira.

Izrek 2. *Cauchyjevo zaporedje ima kvečjemu 1 stekališče.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali s protislovjem.

Predpostavimo, da sta a in b stekališči Cauchyjevega zaporedja $\{a_n\}$ in $a \neq b$. Ker $a \neq b$ velja $d(a, b) > 0$, torej lahko izberemo $\varepsilon < \frac{d(a, b)}{3}$.

Ker je zaporedje Cauchyjevo, velja, da za ta ε obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $n, m \geq N$ velja $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Ker je a stekališče, v njegovi ε okolici lahko najdemo neskončno členov, zato obstaja $i \geq N$, da velja $d(a_i, a) < \varepsilon$. Posledično velja tudi, da za vsak $j \geq i$ sledi $d(a_i, a_j) < \varepsilon$.

S pomočjo trikotniške neenakosti lahko hitro poračunamo, da zaradi naše izbire ε velja $d(a_i, b) > 2\varepsilon$, torej za vsak $j \geq i$ velja $d(a_j, b) > \varepsilon$.

V ε okolici točke b je zato lahko največ $i - 1$ členov zaporedja, torej b ne more biti stekališče zaporedja $\{a_n\}$. $\square$

4 Polni metrični prostori in skrčitve

Definicija 6. Metrični prostor (M, d) je **poln**, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v prostoru (M, d) tudi konvergentno.

Definicija 7. Funkcija $f : M \rightarrow M$, je **skrčitev**, če obstaja $q < 1$, da za vsaka $x, y \in M$ velja

$$q \cdot d(x, y) \geq d(f(x), f(y)).$$

Izrek 3 (Banachovo skrčitveno načelo). Naj bo (M, d) poln metrični prostor in f skrčitev. Obstaja natanko ena $a \in M$, za katerega velja $f(a) = a$. Točko a imenujemo **fiksna točka**.

Velja tudi, da za poljuben $x_0 \in M$ lahko sestavimo zaporedje

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

ki konvergira proti fiksni točki a , kar lahko zapišemo kot $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Preden se lotimo dokaza samega izreka, bomo definirali še zveznost funkcije in lastnosti njene limite, saj bomo to kasneje uporabili v dokazu.

Definicija 8. Funkcija f je **zvezna v točki** $a \in D_f$, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da za vsak x , za katerega velja $d(x, a) < \delta$, sledi $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Če je f zvezna v vsaki točki iz D_f , pravimo, da je f **zvezna funkcija**.

Če je funkcija f zvezna v točki $a \in D_f$, potem obstaja limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in velja, da je enaka $f(a)$.

Zveznost funkcije v neki točki lahko zato opišemo tudi z zaporedji.

Izrek 4 (Karakterizacija zveznosti z zaporedji). Naj bo funkcija f zvezna v točki $a \in D_f$. Potem za vsako zaporedje $\{x_n\} \subset D_f$, ki konvergira proti a , velja, da zaporedje $\{f(x_n)\}$ konvergira proti $f(a)$.

Sicer velja tudi obratno, a je za naš dokaz ta implikacija dovolj dobra.

Dokaz. Naj bo $\{x_n\} \subset D_f$ poljubno zaporedje, ki konvergira proti a , in $\varepsilon > 0$ poljuben.

Ker je f zvezna v točki a , vemo, da obstaja $\delta > 0$, tako da za vsak x , za katerega velja $d(x, a) < \delta$, sledi $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Prav tako je naše zaporedje konvergentno z limito v a , torej za to δ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $d(x_n, a) < \delta$. Sedaj lahko pogledamo člene zaporedja $\{f(x_n)\}$.

Ker za vsak $n \geq N$ velja $d(x_n, a) < \delta$, zaradi zveznosti f v a velja tudi $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. To pomeni, da so dovolj pozni členi zaporedja $\{f(x_n)\}$ poljubno blizu $f(a)$, torej velja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. $\square$

Posledica te trditve je, da lahko pri računanju limit vrstni red (zvezne) funkcije in limite zamenjamo in velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x).$$

Sam rezultat se pri tem ne spremeni, nam pa dostikrat olajša reševanje problemov.

Vrnimo se sedaj k dokazu Banachovega skrčitvenega načela (3). Dokazati moramo obstoj fiksne točke a in njeno enoličnost. Izrek nam pove kje začeti: z dokazom obstoja limite ustvarjenega zaporedja. Za to pa moramo dokazati, da zaporedje konvergira. Ker je M poln metrični prostor, je dovolj pokazati, da je Cauchyjevo.

Dokaz obstoja fiksne točke. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem zaradi trikotniške neenakosti za vsak par (x_n, x_m) , $n < m$, velja

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m).$$

Po definiciji zaporedja velja, da je $x_k = f(x_{k-1})$, zato lahko za vsak $k \in \mathbb{N}$ napišemo

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})).$$

Ker je f skrčitev, sledi $d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \leq q \cdot d(x_k, x_{k+1})$.

Tako lahko omejimo vsak $d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq q^k \cdot d(x_n, x_{n+1})$.

Torej velja

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + q \cdot d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + q^{m-n-1} \cdot d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + q \cdot d(x_n, x_{n+1}) + q^2 \cdot d(x_n, x_{n+1}) + \cdots \end{aligned}$$

Izpostavimo $d(x_n, x_{n+1})$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1})(1 + q + q^2 + \cdots) = d(x_n, x_{n+1}) \sum_{i=0}^{\infty} q^i.$$

Vsota na koncu izraza je vsota geometrijske vrste, za katero se izkaže, da je enaka $\frac{1}{1-q}$. Torej velja

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) \frac{1}{1-q}.$$

Zgornjo neenakost bi radi še natančneje omejili, zato si pogledjmo kako lahko omejimo $d(x_n, x_{n+1})$. Po definiciji našega zaporedja velja

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_n).$$

Če to sedaj združimo, dobimo

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq q^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Neenakosti združimo in dobimo oceno

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) \frac{1}{1-q} \leq q^n \cdot d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q}.$$

Na desni strani enačbe so q , x_0 , in x_1 konstante, zato je vrednost desne strani odvisna zgolj od izbire n . Ker pa je $q < 1$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, torej lahko za poljuben $\varepsilon' > 0$ izberemo dovolj velik n , da velja

$$q^n < \varepsilon'.$$

Za izbran ε lahko tako določimo ε' , tako da bo veljalo $\varepsilon' \cdot d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} < \varepsilon$.

Če to sedaj večkrat uporabimo, dobimo

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) \frac{1}{1-q} \leq q^n \cdot d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} \leq \varepsilon' \cdot d(x_0, x_1) \frac{1}{1-q} < \varepsilon.$$

Dobili smo, da lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo N , da za vsaka $n, m \geq N$ velja $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, torej je zaporedje $\{x_n\}$ Cauchyjevo.

Ker je (M, d) poln metrični prostor, velja, da to zaporedje konvergira proti neki točki $a \in M$, kar lahko zapišemo kot $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zdaj pa moramo dokazati še, da je a fiksna točka.

Ker izpustitev prvega člena zaporedja ne spremeni njegove limite, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a.$$

Spomnimo se, da je naše zaporedje definirano kot $x_{n+1} = f(x_n)$, zato lahko celotno enakost zapišemo kot

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a).$$

Za predzadnjo enakost uporabimo dejstvo, da je f skrčitev in zato zvezna funkcija. Za te pa velja, da lahko v enačbah vrstni red limite in funkcije menjamo (4). $\square$

Dokaz enoličnosti. Enoličnost točke a bomo dokazali s protislovjem.

Recimo, da sta a in b fiksni točki, in $a \neq b$. Velja $f(a) = a$ in $f(b) = b$.

Potem velja

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q \cdot d(a, b),$$

kar ne more biti res, ker je $q < 1$. Torej, obstaja natanko ena fiksna točka. $\square$

5 Marsovske govorice

Spomnimo se našega začetnega problema z marsovci. Ideja je, da ima vsak maršovec neko začetno znanje, ki se iz dneva v dan spreminja. Lahko bi vsakega maršovca predstavljali posebej, a se izkaže, da bo za naš problem veliko lažje, če gledamo vektor skupnega znanja. Torej

$$M = (m_1, m_2, m_3, \dots, m_n),$$

kjer m_i predstavlja znanje i -tega maršovca, ki je vrednost med 0 (ne ve nič) in 1 (ve vse).

Spreminjanje znanja pa bomo opisali s funkcijo F , ki jo lahko definiramo po komponentah. F bo i -to komponento vektorja M preslikala s funkcijo f_i , ki jo definiramo kot

$$f_i(m_i) = a_{i1} \cdot m_1 + a_{i2} \cdot m_2 + \dots + a_{in} \cdot m_n,$$

kjer je a_{ij} odstotek znanja, ki ga i -ti maršovec prejme od j -tega. Ta funkcija v resnici predstavlja, kako se znanje i -tega maršovca spremeni vsak dan. Za skupen vektor znanja pa bo veljalo

$$F(M) = (f_1(m_1), f_2(m_2), \dots, f_n(m_n)).$$

Ker smo rekli, da mora biti vsota vseh deležev, ki jih lahko prejme posamezni maršovec od ostalih, manjša od 1, mora veljati tudi $q_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1$.

Počasi se nam začne dozdevati, da bi F lahko, v pravilno izbranem metričnem prostoru, bila funkcija skrčitve. Poleg tega je zaporedje vektorjev znanja, ki so iz dneva v dan preslikani s funkcijo F , definirano kot zaporedje, opisano v Banachovem skrčitvenem načelu, ki konvergira proti fiksni točki. Če nam torej uspe najti primeren metrični prostor, v katerem je F funkcija skrčitve in v katerem lahko uporabimo Banachovo skrčitveno načelo, bo naš problem rešen. Skupni vektor znanja bo v tem primeru namreč konvergiral k neki fiksni točki oz. fiksnemu vektorju znanja, kar lahko razumemo kot ponehanje govorice.

Glede na definicijo funkcije F , bo naša množica očitno $\mathbb{R}^n$, pri izbiri metrike pa smo gledali na to, katera metrika ima, ne glede na dimenzijo prostora, dovolj enostavno formulo, zato smo se odločili za d_∞ oziroma maksimetriko. Naš problem bi torej radi reševali v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, za kar pa moramo najprej dokazati njego polnost.

Trditev 1. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ je poln prostor.

Preden začnemo dokazovati to trditev, dokažimo pomožne izreke, ki nam bodo v dokazu prišli prav.

Lema 1. Naj bo $\{a_n\}$ omejeno zaporedje v $\mathbb{R}$, tj. obstajata $m, M \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $a_i \in \{a_n\}$ velja $m \leq a_i \leq M$. Potem ima zaporedje vsaj eno stekališče.

Dokaz. Naj bosta m in M spodnja in zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$. To pomeni, da za vsaki $i \in \mathbb{N}$ velja $m \leq a_i \leq M$.

Naj bo S množica vseh $x \in \mathbb{R}$, za katere velja $a_i \leq x$ za končno mnogo indeksov i .

Zaporedje je navzgor omejeno z m , torej od njega ni manjši noben člen zaporedja, kar pomeni, da je $m \in S$ in množica S zagotovo ni prazna. Poleg tega je M zgornja meja

$\{a_n\}$, na intervalu $[m, M]$ pa je neskončno mnogo členov, M zagotovo ni v S , torej je M zgornja meja od S .

Množica S je navzgor omejena, torej obstaja najmanjša zgornja meja, ki jo označimo s $s := \sup S$. Velja, da je členov med m in $s - \varepsilon$ končno mnogo, saj bi sicer $s - \varepsilon$ bila zgornja meja S . Velja pa tudi, da število $s + \varepsilon$ ni v S , torej je od njega manjših neskončno mnogo členov zaporedja. To pomeni, da je med $s - \varepsilon$ in $s + \varepsilon$ oz. v ε okolici s neskončno členov. Ker to velja za vsak ε , je s stekališče. $\square$

Lema 2. Če je zaporedje $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ Cauchyjevo, potem je konvergentno.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je Cauchyjevo zaporedje v $\mathbb{R}$ omejeno.

Ker je zaporedje Cauchyjevo, velja, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za vsaka $n, m \geq N$ velja $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Izberimo $\varepsilon = 1$ in za njega najdemo primeren $N \in \mathbb{N}$. Za vsak poznejši člen v zaporedju posledično velja, da je znotraj intervala $(a_N - 1, a_N + 1)$, zunaj tega intervala pa je končno mnogo členov. Zaporedje je zato omejeno in ima po lemi (1) vsaj eno stekališče. Ker pa je zaporedje tudi Cauchyjevo, po izreku (2) sledi, da ima zgolj eno stekališče. Ker je zaporedje hkrati omejeno in ima natanko eno stekališče, konvergira. $\square$

Dokaz Trditve 1. Pogoji za poln prostor je, da vsako Cauchyjevo zaporedje v njem konvergira.

Naj bo $\{X_i\}$ poljubno Cauchyjevo zaporedje v $\mathbb{R}^n$.

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$$

$$X_3 = (x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n})$$

$$\vdots$$

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$ in določimo njemu primeren $N \in \mathbb{N}$. Za poljubna $m, k \geq N$ zato velja, da je $d_\infty(X_k, X_m) < \varepsilon$. Natančneje si pogledjmo, kaj nam d_∞ pove o posameznih komponentah vektorjev X_k in X_m .

Velja $d_\infty(X_k, X_m) = \max\{|x_{ki} - x_{mi}|; i = 1, \dots, n\}$, kjer je x_{ij} j -ta komponenta i -tega člena v zaporedju. Ker d_∞ vzame največjo vrednost izmed $|x_{ki} - x_{mi}|$, sledi, da je $|x_{ki} - x_{mi}| < \varepsilon$ za vsak $i = 1, \dots, n$.

Zaporedje j -tih komponent naših vektorjev $\{x_{ij}\}_i$, torej $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}, \dots$, je zgolj številsko zaporedje v $\mathbb{R}$. Ker vemo, da lahko za poljuben ε najdemo $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $j = 1, \dots, n$ in za vsaka $k, m \geq N$ velja $|x_{kj} - x_{mj}| < \varepsilon$, je to zaporedje v množici $\mathbb{R}$ z Evklidsko metrikio Cauchyjevo. V lemi (2) smo pokazali, da iz tega sledi konvergentnost.

Označimo limito zaporedja posamezne komponente z $x_j := \lim_{i \rightarrow \infty} x_{ij}$. Sedaj lahko iz teh limit sestavimo vektor $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zaporedje $\{X_i\}$ očitno po komponentah konvergira k vektorju X . Ker imajo ti vektorji zgolj končno mnogo komponent, je dovolj enostavno pokazati, da je posledično X limita zaporedja $\{X_i\}$.

Za poljuben $\varepsilon > 0$ vemo, da za vsako zaporedje komponent $\{x_{ij}\}_i$ obstaja $N_j \in \mathbb{N}$, da za vsak $k \geq N_j$ velja $|x_j - x_{kj}| < \varepsilon$. Določimo $N := \max\{N_j ; j = 1, \dots, n\}$. Sedaj za vsak j velja, da za vsak $k \geq N$ sledi $|x_j - x_{kj}| < \varepsilon$ in posledično velja, da je $d_\infty(X_N, X) < \varepsilon$, torej je X res limita tega zaporedja. $\square$

Da bi lahko uporabili Banachovo skrčitevno načelo, mora naša prej definirana funkcija F biti skrčitev.

Trditev 2. *Funkcija F je skrčitev.*

Dokaz. Naj bosta $X = (x_1, \dots, x_n)$ in $Y = (y_1, \dots, y_n)$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^n$.

Če želimo dokazati, da je F skrčitev moramo najti $q < 1$, za katerega velja

$$d_\infty(F(X), F(Y)) \leq q \cdot d_\infty(X, Y).$$

Določimo $R := d_\infty(X, Y) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}$. Za razdaljo med slikama vektorjev pa velja $d_\infty(F(X), F(Y)) = \max\{|f(x_i) - f(y_i)|; i = 1, \dots, n\}$.

Ker imamo metrični prostor z maksimetriko, je pametno pogledati spreminjanje i -tih komponent. Za x_i in y_i velja

$$\begin{aligned} f(x_i) &= a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n, \\ f(y_i) &= a_{i1} \cdot y_1 + a_{i2} \cdot y_2 + \dots + a_{in} \cdot y_n. \end{aligned}$$

Razdaljo lahko zato enostavno izračunamo in omejimo

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(y_i)| &= |a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \dots + a_{in}(x_n - y_n)| \\ &\leq a_{i1}|x_1 - y_1| + \dots + a_{in}|x_n - y_n| \\ &\leq a_{i1} \cdot R + a_{i2} \cdot R + \dots + a_{in} \cdot R \\ &= R \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} = R \cdot q_i. \end{aligned}$$

Za vsak $i = 1, \dots, n$ torej velja $|f(x_i) - f(y_i)| \leq R \cdot q_i$. Ker je komponent končno mnogo, lahko določimo $q := \max\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ in seveda velja $q < 1$. Sedaj za vsak $i = 1, \dots, n$ velja

$$|f(x_i) - f(y_i)| \leq R \cdot q_i \leq d_\infty(X, Y) \cdot q.$$

Spomnimo se, da je $d_\infty(F(X), F(Y))$ samo največja razdalja med komponentama, torej velja tudi

$$d_\infty(F(X), F(Y)) \leq q \cdot d_\infty(X, Y).$$

Ker je $q < 1$, smo dokazali, da je F skrčitev. $\square$

Sedaj lahko na naših marsovcih in njihovi govorici uporabimo Banachovo skrčitevno načelo. To nam odgovori na vsa naša prej zastavljena vprašanja; ker je prenos informacij iz dneva v dan v resnici zaporedje vektorjev skupinskega znanja, ki se preslikujejo s funkcijo

F , nam izrek pove, da to zaporedje konvergira proti fiksni točki – fiksnemu vektorju znanja. To lahko interpretiramo kot postopno zamiranje čenč in ustalitev nekega skupnega znanja o tej govorici. Prav tako nam izrek pove, da začetna razporejenost znanja ni pomembna. Ta namreč določa le prvi člen našega zaporedja, za njega pa vemo, da vedno konvergira proti fiksni točki.

6 Zaključek

Po vsej tej teoriji smo končno dobili odgovor na naše vprašanje o zgovornih marsovcih: govorice se bodo umirile! Skupinsko znanje se bo ustalilo, prav tako pa znanje vsakega posameznega marsovca. Ubogi prebivalci marsovske vasi si bodo kaj kmalu morali najti drugačne interese in svojo energijo nameniti pomembnejšim stvarem kot zgolj opravljanju.

Literatura

- [1] Zapiski predavanj predmeta Analiza I, prof. dr. Barbare Drinovec Drnovšek (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2024/2025)
- [2] J. Globevnik, M. Bojan, *Analiza I*, 2012, dostopno na: <https://users.fmf.uni-lj.si/globevnik/skripta.pdf>