Aksiomatska geometrija

Katja Anzeljc, Dominik Grahek Ličer, Julija Omahen
Mentor: Tim Milanez

Povzetek

Geometrijo, ki jo poznamo iz osnovne in srednje šole, z vpeljavo aksiomov zgradimo v formalno matematično teorijo.

1 Uvod

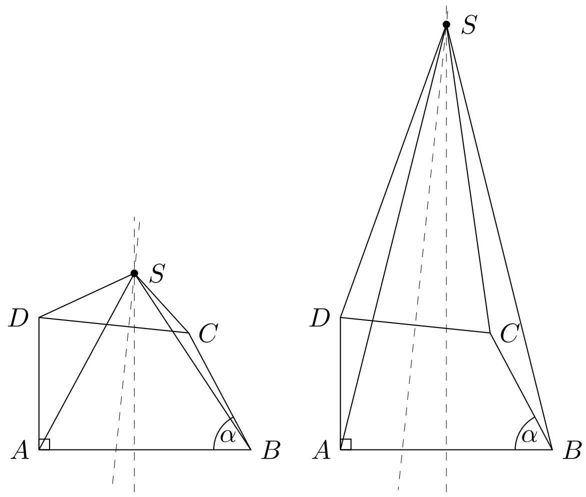
V osnovni in srednji šoli geometrijske naloge povečini rešujemo na osnovi skice, preko katere si nato z uporabo znanih izrekov zamislimo rešitev. Vendar skice so lahko zavajajoče, kot to pokaže naslednji primer.

Zgled 1. *Naj bo α poljuben kot, za katerega velja $\alpha < 90$. Zanašajoč se na levo skico na sliki 1, pokažimo, da velja $\alpha = 90$.*

Vzemimo poljubni dve točki A in B v ravnini. Točko C izberemo tako, da je kot $\measuredangle CBA$ enak α. Naj bo D točka, ki leži na istem bregu premice $\overleftrightarrow{AB}$ kot točka C, za katero velja $AD = BC$ in $\measuredangle BAD = 90$. Opazimo, da se simetrali daljic $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$ sekata. Označimo njuno presečišče s S.

Po lastnostih simetral sta trikotnika ΔABS in ΔDCS enakokraka z vrhom v S, zato velja $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ in $\overline{DS} \cong \overline{CS}$. Po konstrukciji pa je tudi $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, zato morata po pravilu SSS za skladnost trikotnikov biti trikotnika ΔASD in ΔBSC skladna. Od tod sledi, da sta kota $\measuredangle SAD$ ter $\measuredangle CBS$ skladna. Po enakokrakosti trikotnika ΔABS pa sta tudi kota $\measuredangle BAS$ in $\measuredangle SBA$ skladna, zato je kot α, ki ga lahko zapišemo kot vsoto kotov $\measuredangle CBS$ in $\measuredangle SBA$, skladen kotu $\measuredangle BAD$, ki ga lahko zapišemo kot vsoto kotov $\measuredangle SAD$ in $\measuredangle BAS$. Dobimo $\alpha = \measuredangle BAD = 90$.

Kot je razvidno na sliki 1, je napaka v našem dokazu bila napačno narisana skica, preko katere smo, popolnoma zanašajoč se na skico, korake v našem argumentu utemeljili brez pravega razmisleka. Na napačno narisani skici namreč točka S leži v takšni poziciji, da daljica $\overline{BS}$ deli kot $\measuredangle CBS$ na dva dela, kar nas vodi do napačnega prepričanja, da je kot α enak vsoti kotov $\measuredangle CBS$ in $\measuredangle SBA$. Na pravilno narisani skici pa to očitno ne velja. To nas motivira, da geometrijo, ki jo poznamo, zgradimo od začetka in jo postavimo na trde temelje, ki jim pravimo aksiomi.



Slika 1: Napačno narisana skica (na levi), skupaj s pravilno narisano skico (na desni).

2 Incidenčna geometrija

Aksiomatsko zgradbo ravninske geometrije bomo začeli s parom $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, kjer je $\mathcal{R}$ množica in $\mathcal{P}$ neka množica podmnožic množice $\mathcal{R}$. Elementom množice $\mathcal{R}$ pravimo **točke**, elementom množice $\mathcal{P}$ pa **premice**. Množico $\mathcal{R}$ imenujemo **ravnina**, naboru $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ pa **geometrija**.

Če je točka T element premice p, bomo rekli, da T **leži na** premici p oziroma, da p **poteka skozi** T. Točke, ki ležijo na isti premici, imenujemo **kolinearne**.

Med točkami in premicami bomo zahtevali, da veljajo naslednja razmerja.

I-1. Za vsaki dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ju vsebuje.

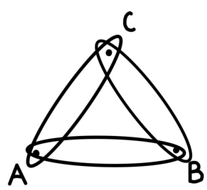
I-2. Vsaka premica vsebuje vsaj dve različni točki.

I-3. Ravnina vsebuje vsaj tri nekolinearne točke.

Geometrijo, ki zadošča zgornjim trem aksiomom, imenujemo **incidenčna geometrija**. V njej bomo premico, ki vsebuje različni točki A in B, označili z $\overleftrightarrow{AB}$.

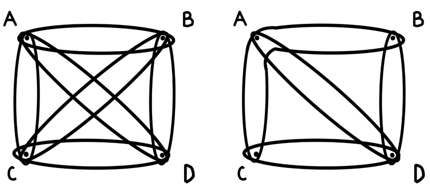
Zgled 2. *Oglejmo si, kako incidenčna geometrija z n točkami izgleda za majhne n.*

- $n = 1, 2$*: Geometrija ne obstaja, saj ne zadošča* ***I-3****.*
- $n = 3$*: Označimo točke geometrije z A, B in C. Po* ***I-1*** *skozi vsaki dve izmed točk A, B, C poteka natanko ena premica, ki pa ne sme vsebovati vseh treh točk hkrati, saj so te točke po aksiomu* ***I-3*** *nekolinearne. Premic z manj kot dvema točkama nimamo zaradi aksioma* ***I-2****, torej geometrija vsebuje le premice $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ in $\{A, C\}$ (glej sliko 2).*



Slika 2: Incidenčna geometrija na treh točkah.

- $n = 4$*: Označimo točke geometrije z A, B, C in D. Z obravnavo primerov, ko naša geometrija ne vsebuje nobene premice s tremi točkami ali pa vsebuje eno premico s tremi točkami, dobimo (do vrstnega reda točk natančno) dve različni geometriji, ki sta prikazani na sliki 3.*



Slika 3: Incidenčna geometrija na štirih točkah.

Trditev 1. *Poljubni dve različni premici se sekata v največ eni točki.*

Dokaz. Če se premici p in q sekata v dveh različnih točkah, morata po aksiomu **I-1** biti enaki. Različni premici se torej lahko sekata v kvečjemu eni točki. □

Trditev 2. *Za vsako točko T obstaja vsaj ena premica, na kateri T ne leži.*

Dokaz. Po aksiomu I-3 obstajajo tri nekolinearne točke A, B in C. Če je T ena izmed njih, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $T = A$. Po nekolinearnosti je potem $\overleftrightarrow{BC}$ premica, ki ne poteka skozi T.

Če je T različna od točk A, B, C, opazimo, da T ne more ležati hkrati na premici $\overleftrightarrow{AB}$ in premici $\overleftrightarrow{BC}$, saj bi sicer po **I-1** ti premici morali biti enaki, kar pa je v nasprotju z nekolinernostjo točk A, B, C. Vsaj ena izmed premic $\overleftrightarrow{AB}$ in $\overleftrightarrow{BC}$ torej ne poteka skozi T. □

Naloga 1. *Naj bo $\mathcal{R} = \{A, B, C, D, E, F\}$ in*

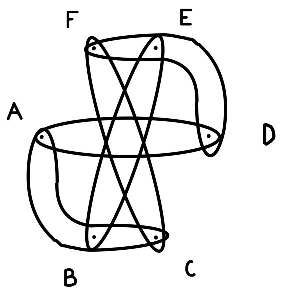
$$\mathcal{P} = \{\{A, B, C\}, \{D, E, F\}, \{A, D\}, \{B, E\}, \{C, F\}\}.$$

Ugotovi, katerim incidenčnim aksiomom ustreza geometrija $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$.

Rešitev. **I-1:** Ne velja, saj skozi točki A in F ne gre nobena premica.

I-2: Velja.

I-3: Velja, saj so na primer točke A, E, F nekolinearne.



Slika 4: Geometrija na šestih točkah, ki ne zadošča vsem incidenčnim aksiomom.

3 Aksiom ravnila

Strukturo iz prejšnjega poglavja bomo sedaj obogatili z vpeljavo razdalje, ki je eden izmed najbolj ključnih pojmov v geometriji. Preden pa to storimo, se spomnimo, kaj pomeni, da je funkcija bijektivna.

Definicija 1. *Funkcija $f \colon A \to B$ je **bijektivna**, če je hkrati*

- ***injektivna**: za vsaka $x, y \in A$ iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$, in*

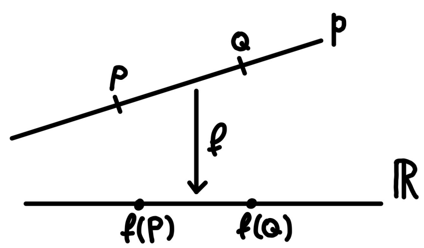
- ***surjektivna:*** *za vsak $y \in B$ obstaja $x \in A$, da velja $f(x) = y$.*

Bijektivne funkcije so ravno tiste funkcije $f\colon A \to B$, ki imajo inverz, tj. takšno funkcijo $g\colon B \to A$, za katero velja $g \circ f = id_A$ in $f \circ g = id_B$. Inverz funkcije f označimo z f^{-1}.

A1 (Aksiom ravnila)**.** *Obstaja funkcija $d\colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, ki poljubnima točkama $P, Q \in R$ priredi realno število $d(P, Q)$, za katero velja sledeče. Če je p poljubna premica, potem obstaja bijektivna funkcija $f\colon p \to \mathbb{R}$, za katero velja*

$$d(P, Q) = |f(P) - f(Q)| \tag{1}$$

za vsaka $P, Q \in p$. Funkciji f pravimo ***koordinatni sistem*** *za premico p, številu $d(P, Q)$ pa* ***razdalja*** *med točkama P in Q.*



Slika 5: Koordinatni sistem f za premico p.

Razdaljo $d(P, Q)$ med točkama P in Q bomo včasih označili tudi s PQ.

Opomba 1. *Naj bo $f\colon p \to \mathbb{R}$ koordinatni sistem za premico p. Potem je tudi funkcija $g = a \cdot f + c$, kjer je $a \in \{-1, 1\}$ ter $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, koordinatni sistem za p. Res, bijektivnost funkcije f pokaže bijektivnost funkcije g in velja račun*

$$\begin{aligned} |g(P) - g(Q)| &= |a \cdot f(P) + c - a \cdot f(Q) - c| \\ &= |a \cdot (f(P) - f(Q))| \\ &= |a||f(P) - f(Q)| \\ &= |f(P) - f(Q)| \\ &= d(P, Q). \end{aligned}$$

Zgled 3 (Evklidska ravnina)**.** *Naj bo $\mathcal{R}$ kartezična ravnina $\mathbb{R}^2$ ter $\mathcal{P}$ množica običajnih premic v $\mathbb{R}^2$. Enostavno se da preveriti, da je geometrija $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ incidenčna. Pokažimo, da zadošča aksiomu* **A1***, če jo opremimo z običajno razdaljo*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Vzemimo poljubno premico p. Če p ni navpična premica, jo lahko opišemo z enačbo $y = kx + n$ za neka $k, n \in \mathbb{R}$. Koordinatni sistem f za p bomo izbrali tako, da bo za vsaki dve točki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in p$ veljalo

$$\begin{aligned} |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (kx_2 + n - kx_1 - n)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= |\sqrt{1 + k^2} \cdot x_2 - \sqrt{1 + k^2} \cdot x_1|. \end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da lahko za koordinatni sistem za p vzamemo kar funkcijo

$$f(x,y) = \sqrt{1+k^2} \cdot x,$$

ki je bijektivna in po zgornjem računu zadošča enačbi (1), torej tvori koordinatni sistem za p.

Če je p navpična premica, jo lahko opišemo z enačbo $x = c$ za nek $c \in \mathbb{R}$. Za koordinatni sistem f želimo, da za vsaka $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in p$ velja

$$\begin{aligned} |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(c-c)^2 + (y_2-y_1)^2} \\ &= |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Za f lahko torej vzamemo kar funkcijo $f(x,y) = y$.

Razdalji (2) pravimo **evklidska razdalja**, geometriji iz zgornjega zgleda, opremljeni z evklidsko razdaljo, pa **evklidska ravnina**. Za funkcijo d pa bi lahko vzeli tudi kakšno drugo razdaljo. Oglejmo si, kako se izbira koordinatnih sistemov spremeni, če za d vzamemo t.i. *taksi razdaljo.*

Zgled 4. *Definirajmo razdaljo med točkama $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ kot*

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \tag{3}$$

Za premico z enačbo $y = kx + n$ sedaj velja račun

$$\begin{aligned} |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| &= d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= |x_2 - x_1| + |kx_2 + n - kx_1 - n| \\ &= |x_2 - x_1| + |k| \cdot |x_2 - x_1| \\ &= |x_2 - x_1| \cdot (1 + |k|), \end{aligned}$$

torej lahko za njen koordinatni sistem vzamemo funkcijo

$$f(x,y) = (1 + |k|) \cdot x.$$

Analogno se prepričamo, da funkcija $f(x,y) = y$ podaja koordinatni sistem za premico z enačbo $x = c$.

Aksiom **A1** močno omeji raznolikost geometrij, ki jih obravnavamo, kar nakaže naslednji zgled.

Zgled 5 (Končna ravnina)**.** *Naj bo $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ geometrija s končnim številom točk. Ker je v njej poljubna premica p tudi sestavljena iz končnega števila točk, v tej geometriji ne more veljati aksiom* **A1***, saj med končno množico in množico realnih števil $\mathbb{R}$ ne obstaja bijekcija.*

4 Osnovni geometrijski pojmi

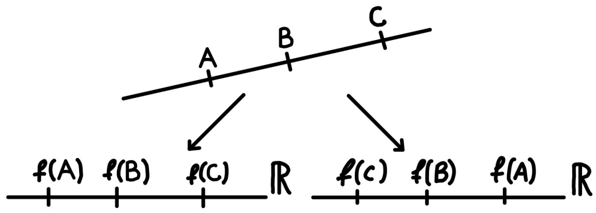
Ena izmed najosnovnejših geometrijskih idej je vmesnost točk, ki pa se izkaže za presenetljivo uporabno. Formalno vmesnost definiramo na sledeči način.

Definicija 2. *Naj bodo A, B, C tri paroma različne kolinearne točke. Rečemo, da je B* **med** *A in C, če obstaja koordinatni sistem $f\colon \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ za premico $\overleftrightarrow{AB}$, v katerem točka $f(B)$ leži med $f(A)$ in $f(C)$. To zapišemo kot $A * B * C$.*

Trditev 3. *Če je $A * B * C$, potem je tudi $C * B * A$.*

Dokaz. Naj bo f koordinatni sistem za $\overleftrightarrow{AB}$, v katerem $f(B)$ leži med $f(A)$ in $f(C)$. Potem $f(B)$ leži med $f(C)$ in $f(A)$, zato isti koordinatni sistem pokaže, da velja $C * B * A$. □

Trditev 4. *Naj bosta A in B poljubni dve točki. Potem*



Slika 6: Točka B leži med točkama A in C, če velja bodisi $f(A) < f(B) < f(C)$ bodisi $f(C) < f(B) < f(A)$.

(1) obstaja točka C, da velja $A * B * C$,

(2) obstaja točka D, da velja $D * A * B$,

(3) obstaja točka E, da velja $A * E * B$.

Dokaz. Naj bo f koordinatni sistem za premico $\overleftrightarrow{AB}$ in označimo $f(A) = a$ ter $f(B) = b$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $b > a$. Sedaj imamo $a < b < b + 1$, zato za $C = f^{-1}(b + 1)$ po definiciji velja $A * B * C$. Nadalje vzamemo $D = f^{-1}(a - 1)$ ter $E = f^{-1}(\frac{a+b}{2})$, ki po istem razmisleku zadoščata željenim lastnostim. □

Izrek 1. *Za poljubne tri paroma razline kolinearne točke A, B, C velja natanko ena izmed vsebovanosti $A * B * C$, $B * A * C$ ali $A * C * B$.*

Dokaz. Rezultat sledi iz dejstva, da na realni osi za poljubne tri različne točke velja, da je natanko ena izmed njih med drugima dvema. □

Definicija 3. *Naj bosta A in B različni točki.* ***Daljica*** *s krajiščema A in B je množica*

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{T \in \overleftrightarrow{AB} \mid A * T * B\}.$$

Če za daljici $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$ velja $AB = CD$, pravimo, da sta **skladni** in pišemo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Definicija 4. ***Poltrak*** *s krajiščem v točki C, ki poteka skozi točko D, je množica*

$$\overrightarrow{CD} = \{T \in \overleftrightarrow{CD} \mid \textit{ne velja } T * C * D\}.$$

Po Izreku 1 je poltrak $\overrightarrow{CD}$ ravno množica točk T, za katere velja ali $C * T * D$ ali $C * D * T$ ali pa je T ena izmed točk C in D.

Definicija 5. ***Kot*** *je unija dveh poltrakov z istim krajiščem, ki nista vsebovana v isti premici. Če je kot unija poltrakov $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, potem točki A pravimo* ***vrh*** *kota, poltraka $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ imenujemo* ***kraka*** *kota ter kot označimo z $\measuredangle BAC$.*

Opomba 2. *Zaporedje krakov v oznaki kota ni pomembno, zato velja*

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAB.$$

Definicija 6. *Naj bodo A, B in C tri nekolinearne točke.* ***Trikotnik*** *z oglišči A, B in C je množica*

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}.$$

Daljice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ in $\overline{AC}$ imenujemo ***stranice*** *trikotnika, kote $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ABC$ in $\measuredangle BCA$ pa* ***notranji koti*** *trikotnika.*

Lema 1. *Za poljubni dve točki A in B obstaja koordinatni sistem $f : \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$, tako da velja*

$$\overrightarrow{AB} = \{T \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(T) \geq 0\}. \tag{4}$$

Dokaz. Naj bo g nek koordinatni sistem za premico $p = \overleftrightarrow{AB}$. Po Opombi 1 je tudi $g + C$, kjer je $C = -g(A)$, koordinatni sistem za p. Če je $g(B) + C > 0$, vzamemo $f = g + C$, če pa je $g(B) + C < 0$, vzamemo $f = -(g + C)$. V obeh primerih je f koordinatni sistem za p, v katerem velja $f(A) = 0$ ter $f(B) > 0$.

Pokažimo, da velja enakost (4). Naj bo T poljubna točka na premici $\overleftrightarrow{AB}$. Če T ne leži na $\overrightarrow{AB}$, potem velja $T * A * B$, zato $f(A) = 0$ leži med $f(T)$ in $f(B) > 0$, od koder sledi $f(T) < 0$. Če je $T \in \overrightarrow{AB}$, je točka T bodisi enaka enaka izmed točk A in B bodisi velja ena izmed vmesnosti $A * T * B$ ali $A * B * T$. V vsakem od teh primerov po istem razmisleku kot zgoraj sledi $f(T) \geq 0$. □

Trditev 5. *Če je $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, potem je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.*

Dokaz. Po Lemi 1 za premico $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ obstaja koordinatni sistem f, tako da velja $\overrightarrow{AB} = \{T \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(T) \geq 0\}$ in $f(A) = 0$. Po predpostavki je $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, zato velja $f(C) > 0$.

Točka $T \in \overleftrightarrow{AB}$ leži na poltraku $\overrightarrow{AB}$ natanko tedaj, ko je $f(T) \geq 0$. Ker je $f(A) = 0$ in $f(C) > 0$, pogoj $f(T) \geq 0$ velja natanko tedaj, ko imamo bodisi $f(A) \leq f(T) \leq f(C)$ bodisi $f(A) \leq f(C) \leq f(T)$. Ti dve neenakosti pa veljata natanko tedaj, ko je ali $T \in \{A, C\}$ ali $A * T * C$ ali $A * C * T$ oziroma $T \in \overrightarrow{AC}$. S tem smo pokazali, da je res $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. □

Posledica 2. *Če je $B_1 \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ in $C_1 \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$, potem velja $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1AC_1$.*

5 Separacija ravnine

Definicija 7. *Podmnožica $M \subseteq \mathcal{R}$ je **konveksna**, če je za vsaki dve točki $A, B \in M$ daljica $\overline{AB}$ vsebovana v M.*

A2 (Aksiom o separaciji ravnine)**.** *Za poljubno premico p množica $\mathcal{R} \backslash p$ razpade na dve disjunktni množici H_1 in H_2, ki zadoščata naslednjima pogojema.*

(*i*) *H_1 in H_2 sta konveksni množici.*

(*ii*) *Če je $A \in H_1$ in $B \in H_2$, potem daljica $\overline{AB}$ seka premico p.*

Množici H_1 in H_2 imenujemo **polravnini, omejeni s premico** p. Če točki A in B ležita v isti polravnini, omejeni s premico p, rečemo, da ležita na istem **bregu** premice p.

Zgled 6. (1) *Najbolj enostaven primer geometrije, ki zadošča **A2**, je evklidska ravnina.*

(2) *Naj bo*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

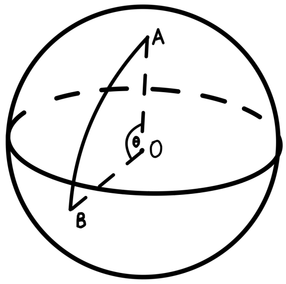
sfera ter $\mathcal{P}$ množica presekov ravnin v $\mathbb{R}^3$, ki potekajo skozi izhodišče O, s sfero $\mathcal{R}$. Z drugimi besedami, za premice na sferi vzamemo kroge v $\mathbb{R}^3$ s središčem v O in polmerom 1. Da se preveriti, da je geometrija $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ incidenčna.
*Na sferi $\mathcal{R}$ razdaljo med točkama A in B definiramo na sledeči način. Če narišemo daljici $\overline{AO}$ in $\overline{BO}$, nam ti oklepata nek kot θ, katerega velikost proglasimo za razdaljo med A in B (glej sliko 7). Trdimo, da geometrija $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, opremljena z razdaljo d, ne zadošča **A1**. Recimo, da za premico p, ki poteka skozi točki $A(1, 0, 0)$ in $B(0, 0, 1)$, obstaja koordinatni sistem f. Za točki $C = f^{-1}(0)$ in $D = f^{-1}(4)$ potem velja*

$$d(C, D) = |f(C) - f(D)| = |0 - 4| = 4,$$

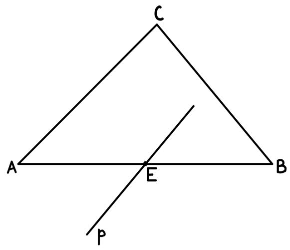
*vendar $d(C, D) \leq \pi$, torej enačba (1) ne more veljati. Velja pa v tej geometriji aksiom **A2**, saj vsaka premica razdeli sfero na dve polobli, ki zadoščata pogojema (i) in (ii).*

(3) *Naj bo $\mathcal{R} = \mathbb{R}^3$ ter $\mathcal{P}$ množica običajnih premic v $\mathbb{R}^3$. Potem je $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ incidenčna geometrija, ki zadošča **A1**, ne zadošča pa aksiomu **A2**, saj premice ne razdelijo prostora $\mathbb{R}^3$ na dva disjunktna dela.*

Izrek 3 (Paschev postulat)**.** *Naj bo ΔABC trikotnik ter E točka, za katero velja $A * E * C$. Če premica p poteka skozi E, potem p seka vsaj eno izmed daljic $\overline{AB}$ ali $\overline{BC}$.*



Slika 7: Daljici $\overline{AO}$ in $\overline{BO}$ oklepata kot θ.



Slika 8: Po Paschevem postulatu premica p seka eno izmed stranic $\overline{AC}$ ali $\overline{BC}$.

Dokaz. Recimo, da p ne seka niti daljice $\overline{AC}$ niti daljice $\overline{BC}$. Potem točki B in C, kot tudi točki A in C, ležita na istem bregu premice p. Od tod sledi, da morata A in B ležati na istem bregu premice p, zato $\overline{AB}$ ne seka p po konveksnosti. To pa je v nasprotju z začetnimi predpostavkami, saj p seka daljico $\overline{AB}$ v točki E. □

V nekaterih bolj kompleksnih aksiomatskih sistemih za evklidsko geometrijo je namesto aksioma **A2** kot aksiom privzet Paschev postulat. Na nek način je torej Paschev postulat bolj fundamentalen kot aksiom o separaciji ravnine.

Trditev 6. *Naj bo p poljubna premica ter A in B točki, tako da je $A \in p$ ter $B \notin p$. Tedaj množica $\overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ leži v eni od polravnin, omejenih s premico p.*

Dokaz. Vzemimo poljubno točko $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Če C ne bi ležala na istem bregu premice p kot B, potem bi daljica $\overline{BC}$ sekala p v neki točki, ki mora po Trditvi 1 biti ravno točka A. Torej A leži na $\overline{BC}$, zato velja $B * A * C$. Ta vsebovanost pa je protislovna s predpostavko, da je $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. □

Posledica 4. *Naj bo p premica, $A \in p$ ter $B \notin p$. Tedaj $\overline{AB} \setminus \{A\}$ leži v eni od polravnin, omejenih s premico p.*

Pri reševanju geometrijskih nalog se za zelo uporabnega izkaže tudi naslednji izrek, katerega dokaz bomo izpustili.

Izrek 5 (Izrek o prečki)**.** *Če D leži v notranjosti kota $\measuredangle BAC$, potem poltrak $\overrightarrow{AD}$ seka daljico $\overline{BC}$.*

Tukaj je **notranjost kota** $\measuredangle BAC$ definirana kot presek polravnine H_C, omejene s premico $\overleftrightarrow{AB}$, ki vsebuje točko C, ter polravnine H_B, omejene s premico $\overleftrightarrow{AC}$, ki vsebuje točko B. To množico označimo z $\operatorname{Int} \measuredangle BAC$.

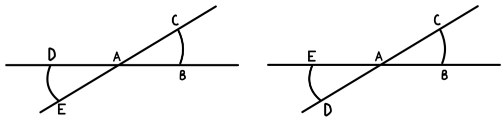
6 Merjenje kotov

Našo dosedanjo aksiomatsko strukturo bomo dopolnili še s konceptom velikosti kota, ki bo vpeljan na podoben način, kot smo vpeljali pojem razdalje – s pomočjo funkcije, ki zadošča specifičnim pogojem.

Definicija 8. (1) *Kota $\measuredangle BAD$ in $\measuredangle DAC$ sta **sokota**, če velja $B * A * C$.*

(2) Kota $\measuredangle BAC$ in $\measuredangle DAE$ sta ***sovršna****, če velja bodisi*

- $B * A * D$ *in* $C * A * E$ *bodisi*
- $B * A * E$ *in* $C * A * D$*.*



Slika 9: Sovršna kota.

A3 (Aksiom o kotomeru)**.** *Naj bo $\mathcal{A}$ množica vseh kotov v ravnini $\mathcal{R}$. Potem obstaja funkcija $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ z naslednjimi lastnostmi.*

(1) $0 < \mu(\measuredangle BAC) < 180$ *za vsak kot* $\measuredangle BAC$*.*

(2) Naj bo H polravnina, omejena s premico $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$. Za vsak $0 < r < 180$ obstaja natanko en poltrak $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, za katerega velja $C \in H$ in $\mu(\measuredangle BAC) = r$.

(3) Če je $D \in \operatorname{Int} \measuredangle BAC$, potem velja $\mu(\measuredangle BAC) = \mu(\measuredangle BAD) + \mu(\measuredangle DAC)$.

(4) Za sokota $\measuredangle BAD$ in $\measuredangle DAC$ velja $\mu(\measuredangle ABC) + \mu(\measuredangle CBD) = 180$.

Število $\mu(\measuredangle BAC)$ imenujemo **velikost** kota $\measuredangle BAC$. Kotu z velikostjo 90 pravimo **pravi kot**.

Definicija 9. *Kota $\measuredangle ABC$ in $\measuredangle DEF$ sta*

(i) ***skladna****, če velja $\mu(\measuredangle ABC) = \mu(\measuredangle DEF)$, in*

(ii) ***suplementarna****, če velja $\mu(\measuredangle ABC) + \mu(\measuredangle DEF) = 180$.*

Točko (4) aksioma **A3** lahko na kratko sedaj povemo tudi na sledeči način: sokota sta suplementarna.

Trditev 7. *Sovršna kota sta skladna.*

Dokaz. Naj bosta $\measuredangle BAC$ in $\measuredangle EAD$ sovršna kota. Brez škode za splošnost se lahko omejimo na primer, ko velja $B * A * D$ in $C * A * E$. Opazimo, da sta potem kota $\measuredangle BAC$ in $\measuredangle CAD$ sokota, zato po **A3** velja $\mu(\measuredangle BAC) + \mu(\measuredangle CAD) = 180$. Podobno sta tudi $\measuredangle CAD$ in $\measuredangle DAE$ sokota in $\mu(\measuredangle CAD) + \mu(\measuredangle DAE) = 180$. Sledi $\mu(\measuredangle BAC) = \mu(\measuredangle EAD)$. □

7 Skladnost trikotnikov

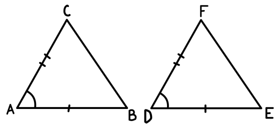
Definicija 10. *Trikotnika ΔABC in ΔDEF sta* ***skladna****, če veljajo skladnosti $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ in $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ter skladnosti $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$, $\measuredangle CBA \cong \measuredangle FED$ in $\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$.*

Trikotnika sta torej skladna, če imata paroma skladne vse stranice in notranje kote. Pri tem je pomembno, v kakšnem vrstnem redu pišemo oglišča, saj v splošnem ne velja $\Delta ABC \cong \Delta BCA \cong \Delta CAB$.

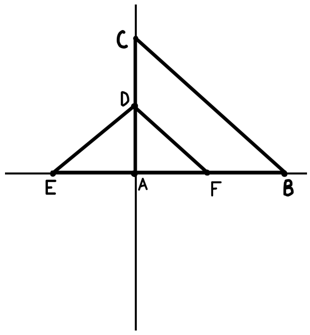
A4 (Aksiom SKS)**.** *Naj bosta ΔABC in ΔDEF trikotnika, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$ in $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Tedaj je $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

Zgled 7. *Naj bo $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{P}$ množica običajnih premic. Če $\mathcal{R}$ opremimo z evklidsko razdaljo, potem že iz srednje šole vemo, da $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ zadošča aksiomu* **A4***. Pokažimo, da če $\mathcal{R}$ opremimo s taksi razdaljo* (3)*, v geometriji $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ aksiom* **A4** *več ne velja.*

Vzemimo točke $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$, $D(0,1)$, $E(-1,0)$ in $F(1,0)$, kot je prikazano na sliki 11. S pomočjo enačbe (3) *izračunamo, da so stranice trikotnika ΔABC dolge $d_1(A,B) = 2$, $d_1(B,C) = 4$ in $d_1(A,C) = 2$, stranice trikotnika ΔDEF pa $d_1(D,E) = 2$, $d_1(E,F) = 2$ in $d_1(D,F) = 2$. Opazimo tudi, da velja $\mu(\measuredangle BAC) = \mu(\measuredangle EDF) = 90$. Trikotnika ΔABC in ΔDEF torej zadoščata pogoju SKS, nista pa skladna, saj imamo $\overline{BC} \ncong \overline{EF}$. Aksiom* **A4** *v tej geometriji torej ne velja.*



Slika 10: Trikotnika, ki zadoščata pogoju SKS.



Slika 11: Primer dveh trikotnikov, ki glede na taksi razdaljo zadoščata pogoju SKS, a nista skladna.

Definicija 11. *Trikotnik je* ***enakokrak****, če ima dve skladni stranici. Skladni stranici enakokrakega trikotnika imenujemo* ***kraka****, tretjo stranico pa* ***osnovnica****.*

Izrek 6 (Izrek o enakokrakem trikotniku)**.** *V enakokrakem trikotniku ΔABC s krakoma $\overline{AC}$ in $\overline{BC}$ velja $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CBA$.*

Dokaz. Trikotnika ΔABC in ΔBAC imata dva para skladnih stranic $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ in $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ ter skladna vmesna kota. Po aksiomu SKS torej velja $\Delta ACB \cong \Delta BCA$, od koder sledi $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CBA$. □

Trikotnik je **enakostraničen**, če so vse tri njegove stranice med seboj skladne.

Posledica 7. *Enakostraničen trikotnik ima vse notranje kote skladne.*

8 Vzporednost

Geometrijo, v kateri veljajo vsi do sedaj omenjeni aksiomi, tj. vsi incidenčni aksiomi ter aksiomi od **A1** do **A4**, imenujemo **nevtralna geometrija**. V njej kljub vsem privzetim aksiomom trditev, da je vsota velikosti notranjih kotov trikotnika enaka 180, ni nujno res. Rabimo torej še dodaten aksiom, ki bo slonel na vzporednosti.

Definicija 12. *Premici p in q sta* ***vzporedni****, če ne vsebujeta nobene skupne točke. To označimo s $p \parallel q$.*

A5 (Evklidov aksiom o vzporednici)**.** *Naj bo p poljubna premica in A točka, ki ne leži na p. Potem obstaja natanko ena vzporednica na p, ki poteka skozi A.*

Če predpostavimo še ta aksiom, v naši geometriji sedaj veljajo vsi izreki, ki smo jih vajeni iz srednje šole. Takšno geometrijo imenujemo **evklidska geometrija**.

Za konec se z vsem naučenim znanjem lotimo še ene klasične geometrijske naloge. Za njo bomo potrebovali še naslednjo definicijo in trditev, katere dokaz bomo izpustili.

Definicija 13. *Premici p in q sta* ***pravokotni****, če obstajajo točke $A \in p$, $B \in p \cap q$ ter $C \in q$, tako da je $\measuredangle ABC$ pravi kot.*

Trditev 8. *Če sta dve različni premici q in r pravokotni na isto premico p, velja $q \parallel r$.*

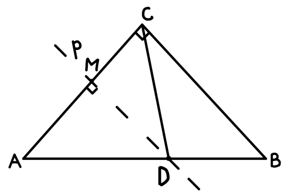
Naloga 2. *Dan imamo pravokotni trikotnik ΔABC s pravim kotom $\measuredangle ACB$. Naj bo M razpolovišče stranice $\overline{AC}$ in p pravokotnica na $\overleftrightarrow{AC}$ skozi M.*

(a) Dokaži, da p seka stranico $\overline{AB}$ v neki točki D.

Rešitev. Po Paschevem postulatu mora premica p sekati eno izmed stranic $\overline{AB}$ ali $\overline{AC}$. Ker sta premici p in $\overleftrightarrow{BC}$ pravokotni na isto premico $\overleftrightarrow{AC}$, morata po Trditvi 8 biti ali enaki, kar očitno ni res, ali pa vzporedni. Premica p torej ne seka premice $\overleftrightarrow{BC}$, zato mora sekati $\overline{AB}$.

(b) Dokaži, da velja $AD = CD$ in $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD$.

Rešitev. Ker je $\overline{AM} \cong \overline{MC}$, po SKS velja $\Delta AMD \cong \Delta CMD$. Sledi $AD = CD$ in $\measuredangle DAM \cong \measuredangle MCD$. Ker pa je B leži na poltraku $\overrightarrow{AD}$ ter C leži na poltraku $\overrightarrow{AM}$, po Trditvi 5 velja $\measuredangle DAM = \measuredangle BAC$. Podobno dobimo $\measuredangle MCD = \measuredangle ACD$, od koder sledi $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD$.



Slika 12: Pomožna skica za Nalogo 2.

Literatura

[1] E. Horvat, *Elementarna geometrija (zapiski predavanj)*, dostopno na `https://ucilnice.arnes.si/pluginfile.php/7159201/mod_resource/content/64/Spletna_zapiski_EG.pdf`.